1.Биномиальный закон распределения.

Биномиальный закон распределения описывает вероятность наступления события A m раз в n независимых испытаниях, при условии, что вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна.

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Например, отдел продаж магазина бытовой техники в среднем получает один заказ на покупку телевизоров из 10 звонков. Составить закон распределения вероятностей на покупку m телевизоров. Построить полигон распределения вероятностей.

m	C_n^m	p^m	q^{n-m}	$P_{m,n}$
0	1	1	0,34867844	0,3486784401
1	10	0,1	0,387420489	0,3874204890
2	45	0,01	0,43046721	0,1937102445
3	120	0,001	0,4782969	0,0573956280
4	210	0,0001	0,531441	0,0111602610
5	252	0,00001	0,59049	0,0014880348
6	210	0,000001	0,6561	0,0001377810
7	120	0,0000001	0,729	0,0000087480
8	45	0,00000001	0,81	0,0000003645
9	10	0,000000001	0,9	0,0000000090
10	1	0,0000000001	1	0,0000000001
$\sum$				1,0000000000

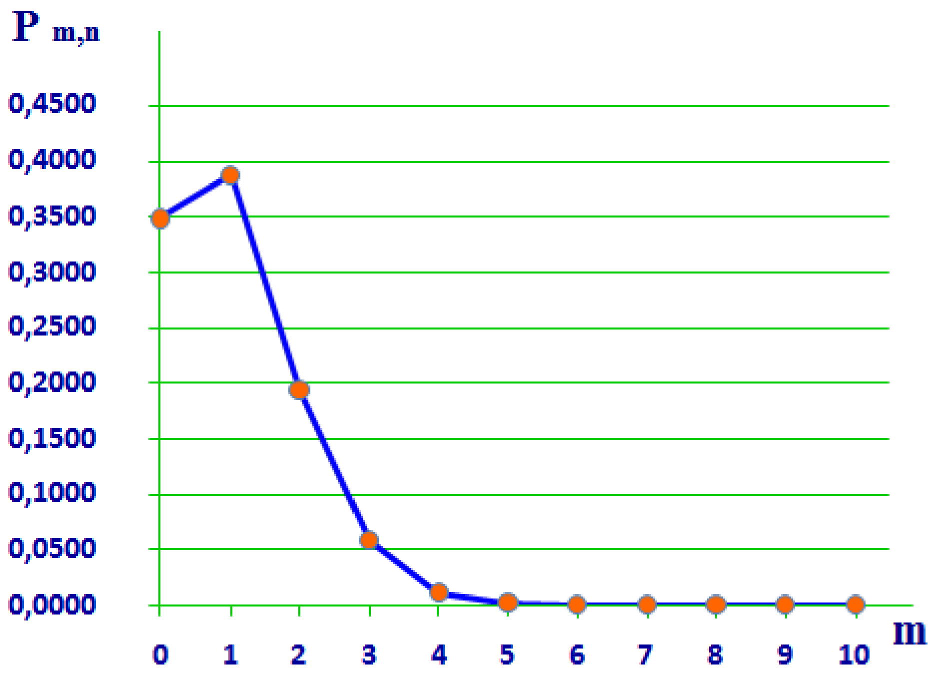

Рис.1

В таблице m - число заказов, полученных компанией на покупку телевизора. C_n^m - число сочетаний m телевизоров по n, p - вероятность наступления события А, т.е. заказа телевизора, q - вероятность не наступления события А, т.е. не заказа телевизора, $P_{m,n}$ - вероятность заказа m телевизоров из n. На рисунке 1 изображен полигон распределения вероятностей.

2.Геометрическое распределение.

Геометрическое распределение случайной величины имеет следующий вид:

$$P_m = pq^{m-1}$$

где

P_m - вероятность наступления события А в испытание под номером m.

p - вероятность наступления события А в одном испытании.

q = 1 - p

Пример. В компанию по ремонту бытовой техники поступила партия из 10 запасных блоков для стиральных машин. Бывают случаи, что в партии оказывается 1 блок бракованный. Проводится проверка до обнаружения бракованного блока. Необходимо составить закон распределения числа проверенных блоков. Вероятность того, что блок может оказаться бракованным равна 0,1. Построить полигон распределения вероятностей.

m	p	q^{m-1}	P(m)
1	0,1	1	0,1000000000
2	0,1	0,9	0,0900000000
3	0,1	0,81	0,0810000000
4	0,1	0,729	0,0729000000
5	0,1	0,6561	0,0656100000
6	0,1	0,59049	0,0590490000
7	0,1	0,531441	0,0531441000
8	0,1	0,4782969	0,0478296900
9	0,1	0,43046721	0,0430467210
10	0,1	0,387420489	0,0387420489
(11)		0,34867844	0,3486784401
$\sum$			1,0000000000

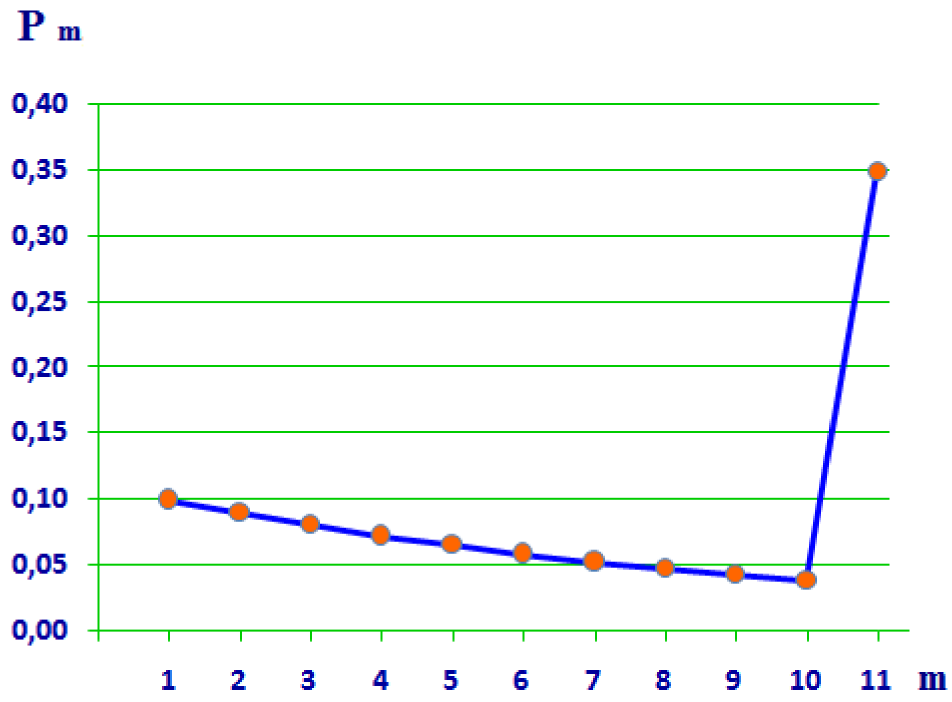

Рис.2

Из таблицы видно, что с увеличением числа m, вероятность того, что будет обнаружен бракованный блок, снижается. Последняя строчка (m=11) означает, что все проверяемые блоки оказались исправными. Так как вероятность того, что блок окажется неисправным относительно низкая (p=0,1), то вероятность последнего события P_m (все блоки исправны) относительно высокая. Рис.2

3.Гипергеометрическое распределение.

Гипергеометрическое распределение случайной величины имеет следующий вид:

$$P = \frac{C_M^m \quad C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

где

m - число элементов, которые имеют заданное свойство, из отобранных
n - число элементов извлеченных из N элементов
M - число элементов, обладающих заданным свойством
N - всего элементов

Например, составить закон распределения 7-ми угаданных чисел из 49. В данном примере всего чисел N=49, изъяли n=7 чисел, M - всего чисел, которые обладают заданным свойством, т.е. правильно угаданных чисел, m - число правильно угаданных чисел среди изъятых.

M	n	N	N-M
7	7	49	42

n-m	m	C_M^m	C_{N-M}^{n-m}	C_N^n	P
7	0	1	26978328	85900584	0,3140645470
6	1	7	5245786	85900584	0,4274767445
5	2	21	850668	85900584	0,2079616595
4	3	35	111930	85900584	0,0456056271
3	4	35	11480	85900584	0,0046775002
2	5	21	861	85900584	0,0002104875
1	6	7	42	85900584	0,0000034226
0	7	1	1	85900584	0,0000000116
∑					1,0000000000

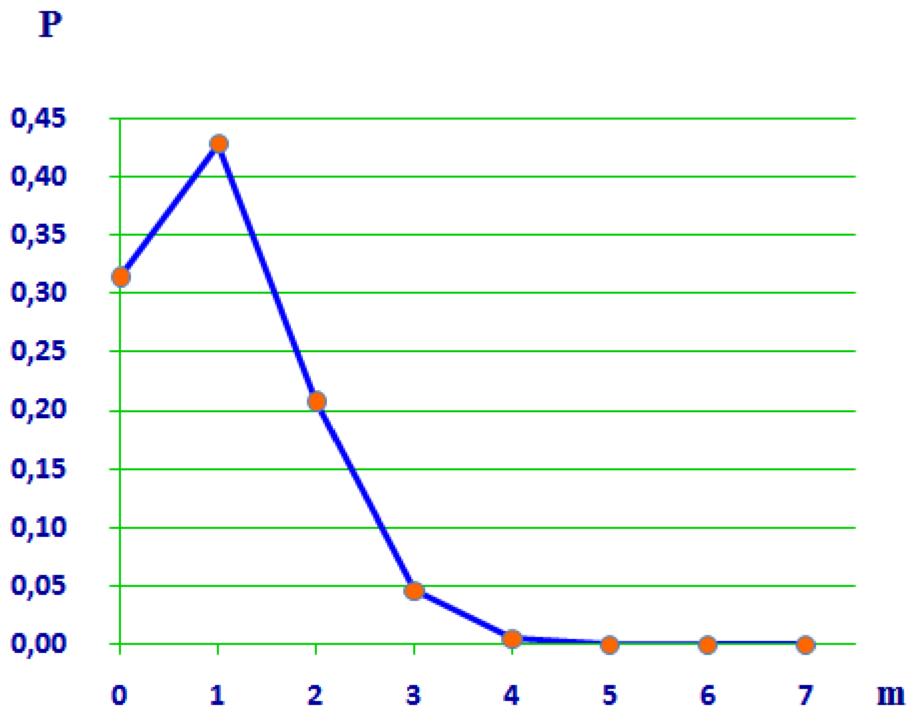

Рис.3

Из таблицы видно, что вероятность угадывания одного числа m=1 выше, чем при m=0. Однако затем вероятность начинает быстро снижаться. Таким образом, вероятность угадывания 4-х чисел уже составляет менее 0,005, а 5-ти ничтожно мала.

4.Закон распределения Пуассона.

Случайная величина X имеет распределение Пуассона, если закон ее распределения имеет вид:

$$P = \frac{\lambda^{m} e^{-\lambda}}{m!}$$

где

n - число испытаний, стремящиеся к бесконечности

p - вероятность наступления события, стремящаяся к нулю

$\lambda = np = const$

Например, в среднем за день в компанию по продаже телевизоров поступает около 100 звонков. Вероятность заказа телевизора марки A равна 0,08; B - 0,06 и C - 0,04. Составить закон распределения заказов на покупку телевизоров марок A,B и C. Построить полигон распределения вероятностей.

Из условия имеем: m=100, $\lambda_1=8$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=4$ (≤ 10)

m	p=0,08	p=0,06	p=0,04
0	0,00034	0,00248	0,01832
1	0,00268	0,01487	0,07326
2	0,01073	0,04462	0,14653
3	0,02863	0,08924	0,19537
4	0,05725	0,13385	0,19537
5	0,09160	0,16062	0,15629
6	0,12214	0,16062	0,10420
7	0,13959	0,13768	0,05954
8	0,13959	0,10326	0,02977
9	0,12408	0,06884	0,01323
10	0,09926	0,04130	0,00529

(таблица дана не полностью)

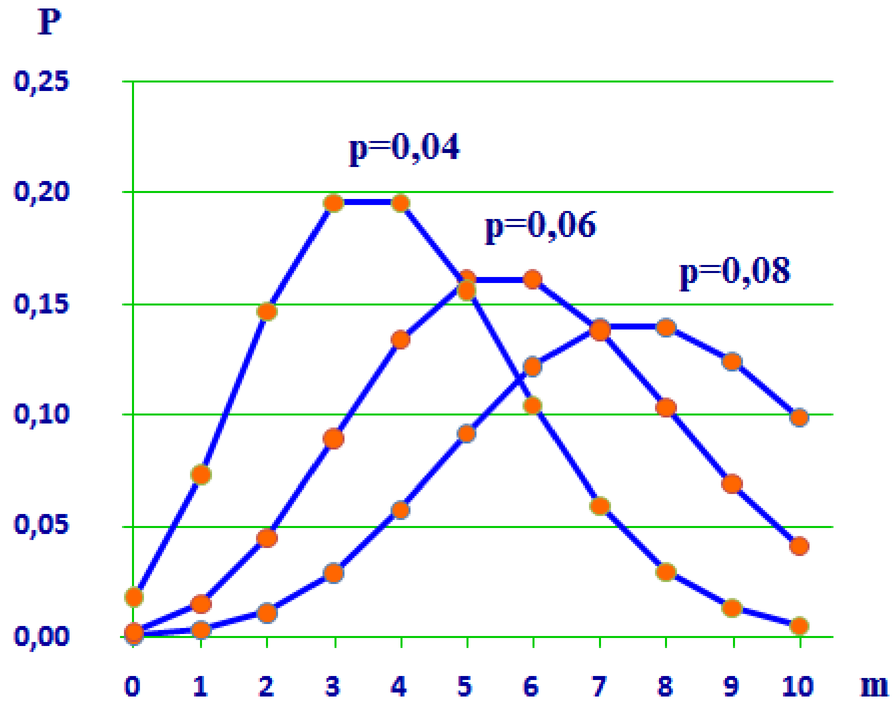

Рис.4

Если n достаточно большое и стремится к бесконечности, а значение p стремится к нулю, так что произведение np стремится к постоянному числу, то данный закон является приближением к биномиальному закону распределения. Из графика видно, что чем больше вероятность p, тем ближе кривая расположена к оси m, т.е. более пологая. (Рис.4)

Необходимо отметить, что биномиальный, геометрический, гипергеометрический и закон распределения Пуассона выражают распределение вероятностей дискретной случайной величины.

5.Равномерный закон распределения.

Если плотность вероятности $\phi(x)$ есть величина постоянная на определенном промежутке [a,b], то закон распределения называется равномерным. На рис.5 изображены графики функции распределения вероятностей и плотность вероятности равномерного закона распределения.

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b \\ 0 & \text{при } x < a \quad x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le a \\ \dfrac{(x-a)}{(b-a)} & \text{при } a < x \le b \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}$$

Функция распределения непрерывной случайной величины, выраженная через плотность вероятности имеет вид:

$$F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} \qquad (a < x \le b)$$

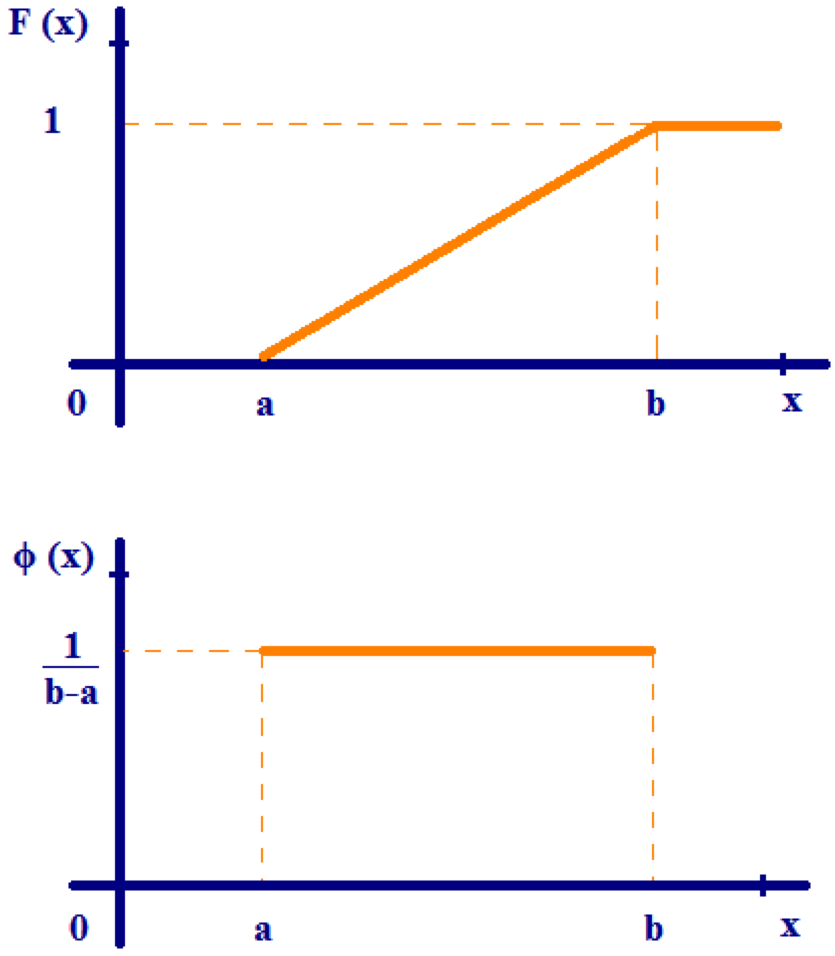

Рис.5

6.Нормальный закон распределения (закон Гаусса).

Среди законов распределения непрерывных случайных величин наиболее распрастраненным является нормальный закон распределения. Случайная величина распределена по нормальному закону распределения, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

где

a - математическое ожидание случайной величины

σ - среднее квадратическое отклонение

График плотности вероятности случайной величины, имеющей нормальный закон распределения, симметричен относительно прямой x=a, т.е x равному математическому ожиданию. Таким образом, если x=a, то кривая имеет максимум равный:

$$\phi(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0{,}3989}{\sigma}$$

При изменении величины математического ожидания кривая будет смещаться вдоль оси Ох. На графике (Рис.6) видно, что при x=3 кривая имеет максимум, т.к. математическое ожидание равно 3. Если математическое ожидание примет другое значение, например a=6, то кривая будет иметь максимум при x=6. Говоря о среднем квадратическом отклонении, как можно увидеть из графика, чем больше среднее квадратическое отклонение, тем меньше максимальное значение плотности вероятности случайной величины.

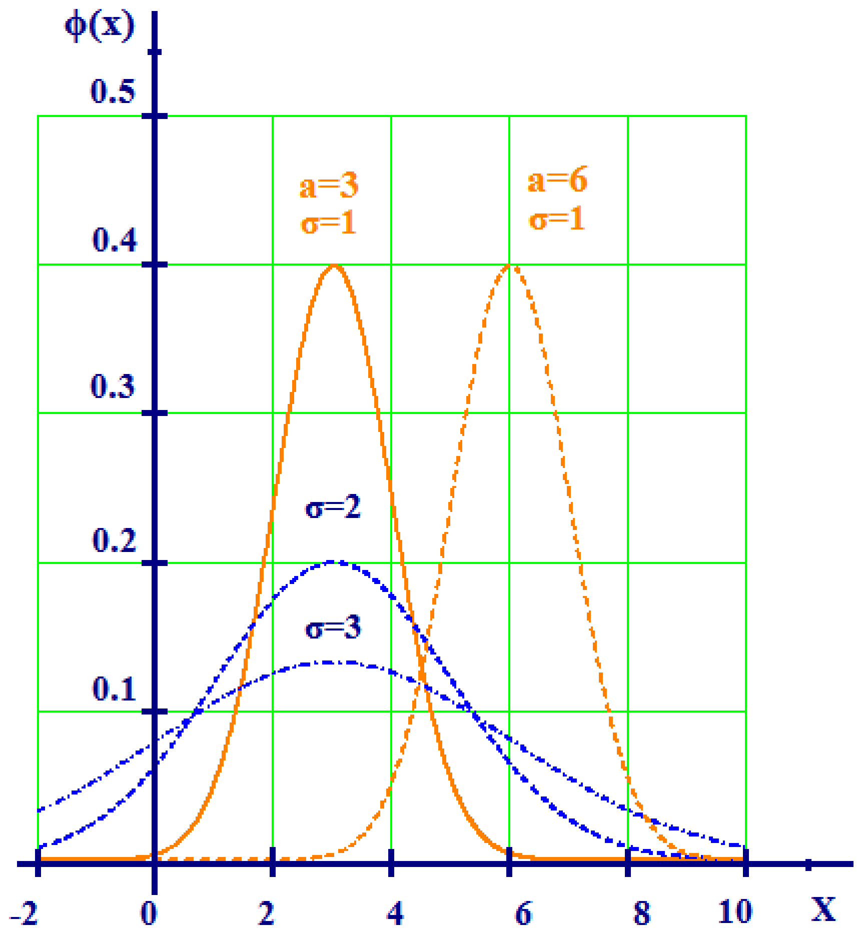

Рис.6

Функция, которая выражает распределение случайной величины на интервале (-∞,x), и имеющая нормальный закон распределения, выражается через функцию Лапласа по следующей формуле:

$$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

где

$$\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

или если $t = \frac{x-a}{\sigma}$

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

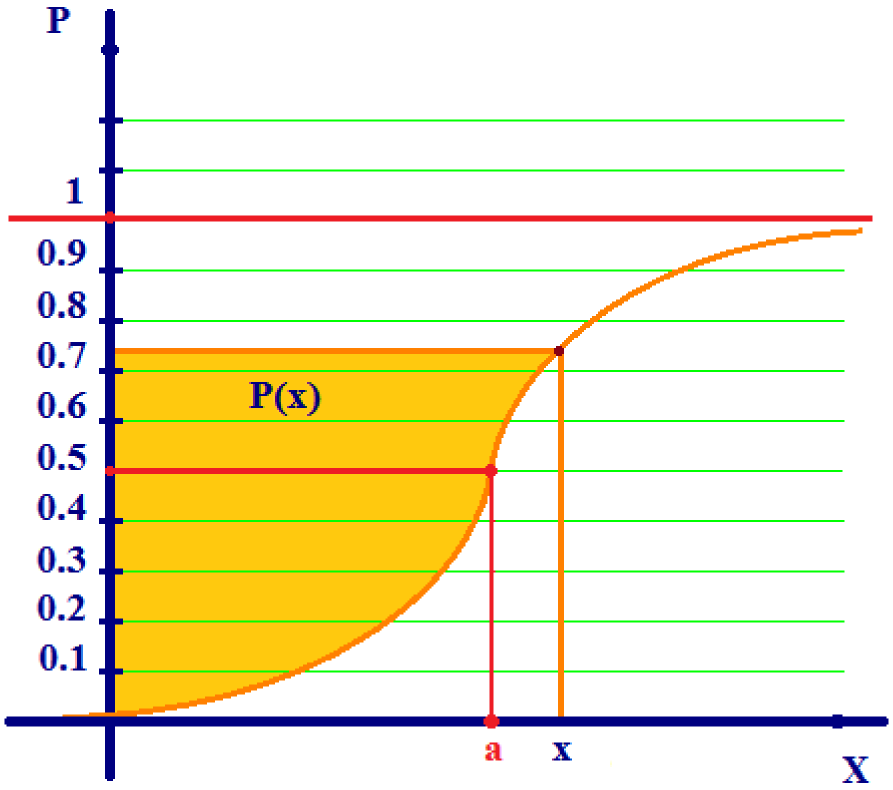

Рис.7

Т.е. вероятность случайной величины X состоит из двух частей: вероятности где x принимает значения от минус бесконечности до a, равная 0,5 и вторая часть - от a до x. (Рис.7)

7.Показательный закон распределения.

Закон распределения случайной величины X называется показательным (или экспоненциальным), если плотность вероятности имеет вид:

$$\phi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

где λ - параметр обратно-пропорциональный математическому ожиданию.

График плотности вероятности с параметрами

$\lambda = 2$, $\lambda = 4$, $\lambda = 6$ изображен на рис.8

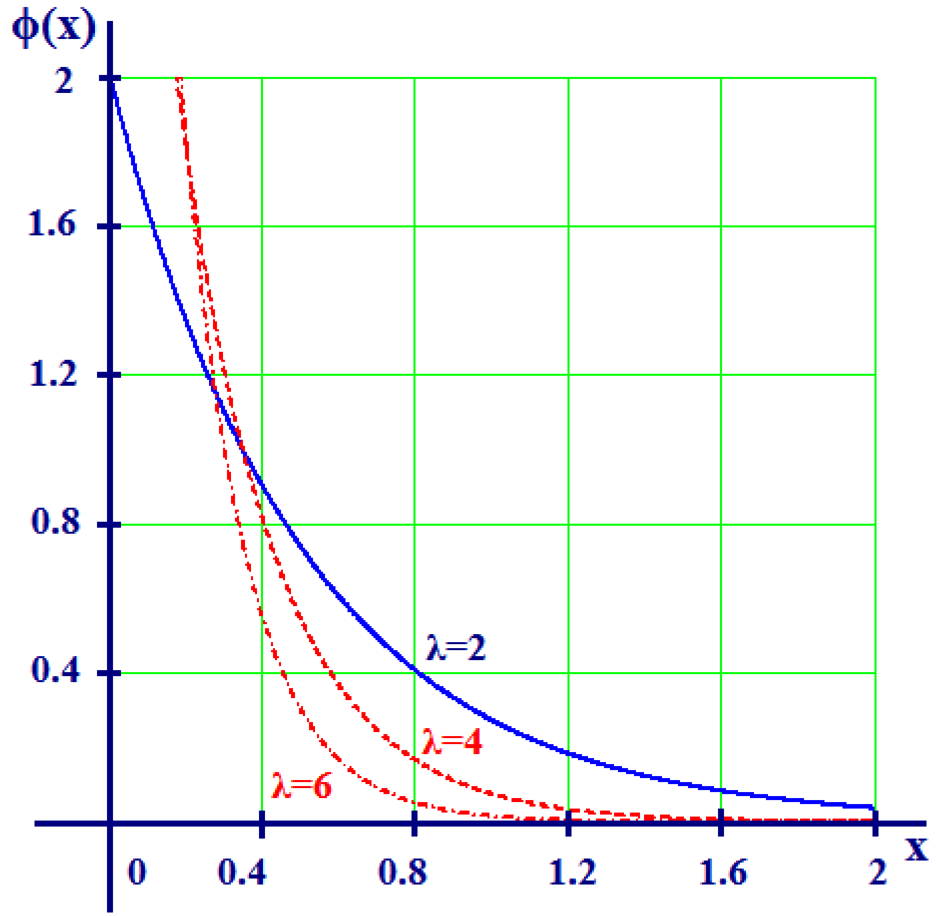

Рис.8

Функция распределения случайной величины X, которая имеет показательное распределение, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

График функции изображен на рис.9

Если функцию распределения случайной величины выразить через плотность вероятности при $x \geq a$, то она примет вид:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

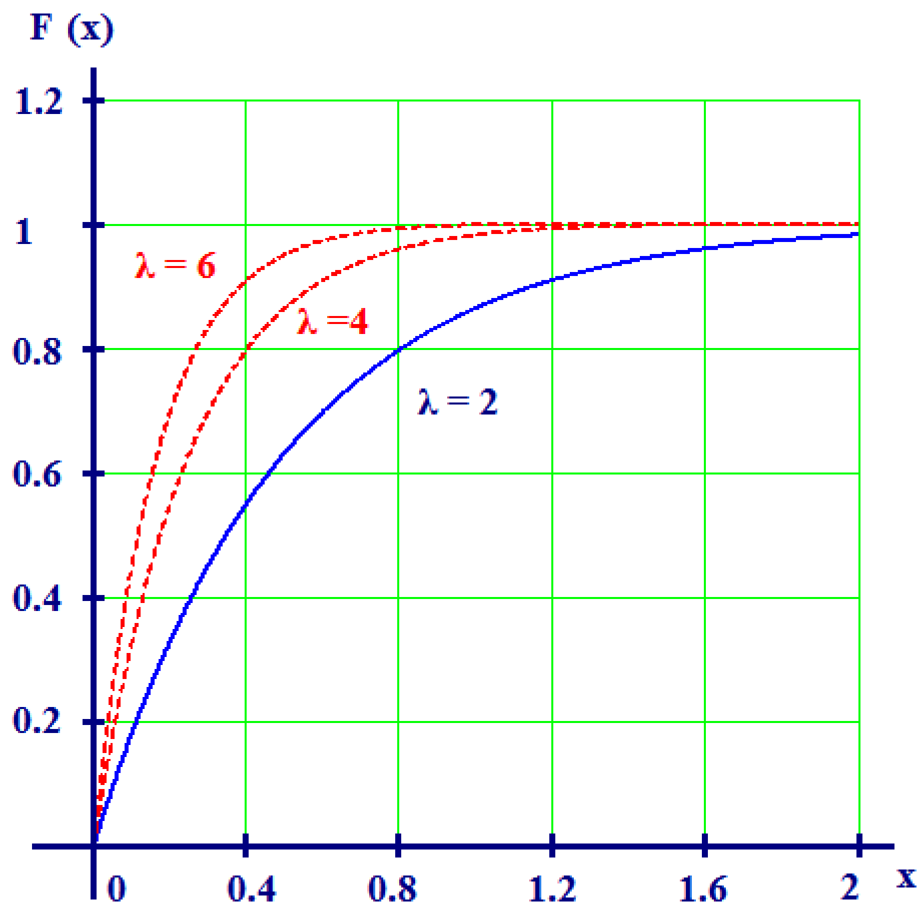

Рис.9

8.Логарифмически-нормальное распределение.

Если логарифм непрерывной случайной величины изменяется по нормальному закону, то случайная величина имеет логарифмически-нормальное распределение. Функция логаривмически-нормального распределения имеет вид.

$$P(\ln x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}} \, d(\ln x)$$

Плотность вероятности логнормального распределения имеет вид:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\; x} e^{-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}}$$

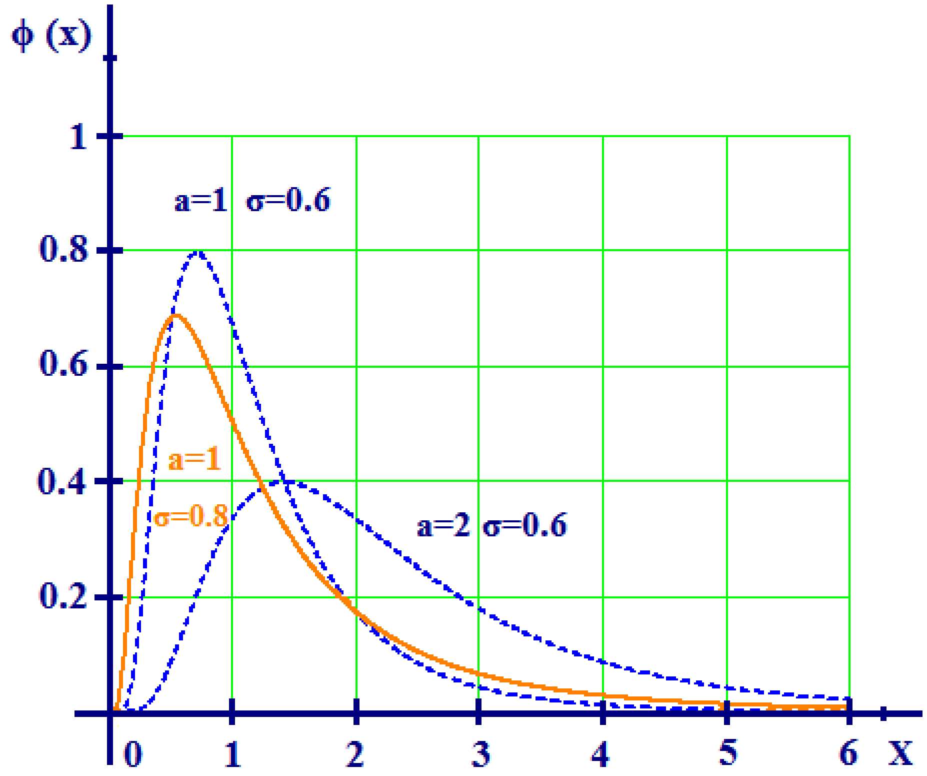

Рис.10

Из графика видно, что чем меньше σ и больше математическое ожидание a, тем кривая становится более пологая и больше стремится к симметрии. Данный закон, чаще всего, используется для описания распределения поступления денежных средств (доходов), банковских вкладов, износа основных средств и т.д. (Рис.10)

9. χ^2 распределение

Сумма квадратов k независимых случайных величин, которые распределены по нормальному закону, называется $\boldsymbol{\chi}^2$ распределением.

χ^2 распределение имеет вид:

$$\chi^2 = \sum A_i^2$$

где

A_i - i-ая случайная величина, распределенная по нормальному закону ($i = 1,2,3,...k$).

Плотность вероятности случайной величины, распределенной по распределению χ^2 имеет вид:

$$\phi(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{при } x \geq 0$$

где

$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$ гамма-функция Эйлера

если $\frac{k}{2}$ целые положительные числа, то

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \left(\frac{k}{2} - 1\right)!$$

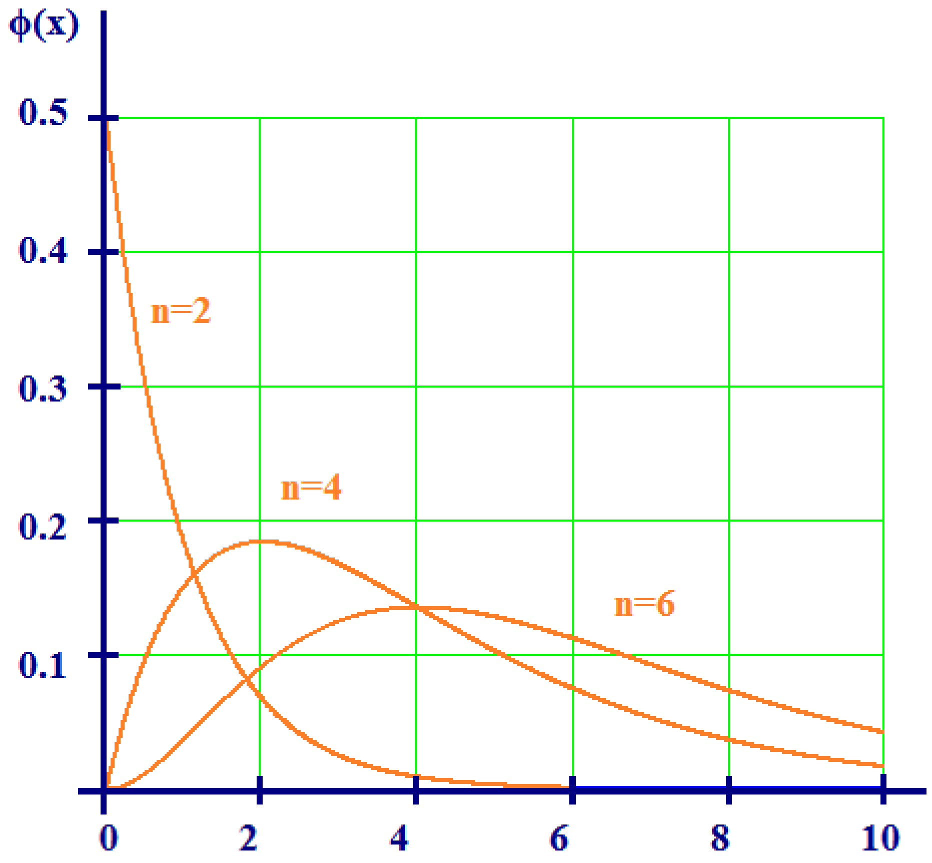

Рис.11

Из графика видно, что чем больше n=k, тем кривая стремиться к нормальному распределению. Рис.11.

10.Распределение Стьюдента (t - распределение)

Распределение непрерывной случайной величины называется распределением Стьюдента, если оно имеет вид:

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2}}$$

где

Z - случайная величина, распределенная по нормальному закону.

χ^2 - случайная величина, имеющая χ^2 - распределение с k степенями свободы.

Плотность вероятности распределения Стьюдента имеет вид:

$$\phi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

где

$\Gamma(y)$ - гамма-функция

k - число степеней свободы

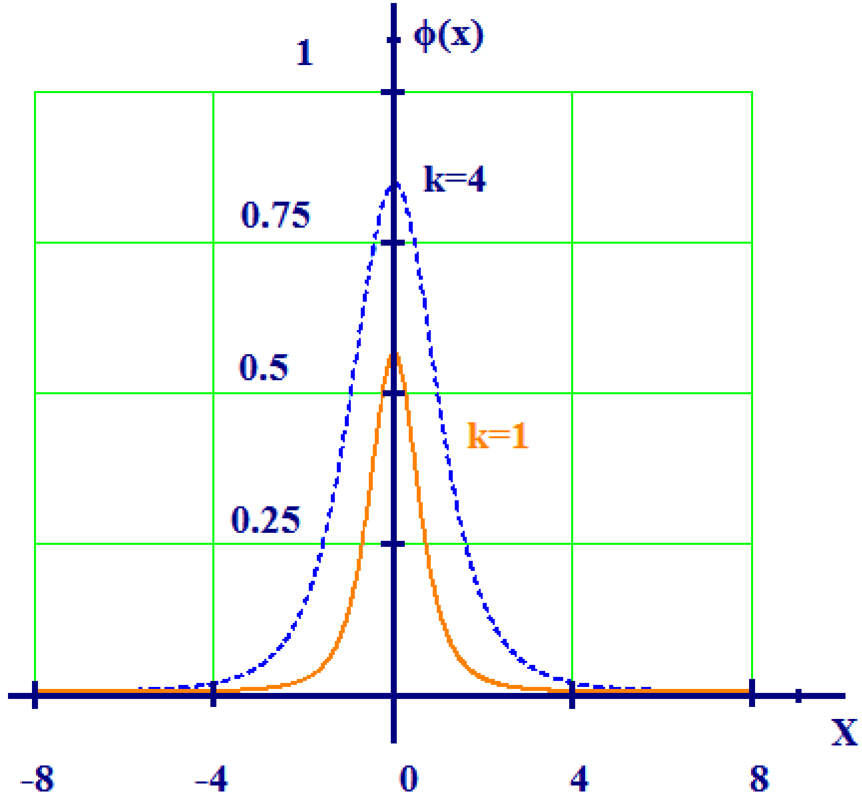

Рис.12

На рис.12 изображена плотность вероятности распределения Стьюдента. Из графика можно увидеть, что чем больше k, тем больше кривая приближается к нормальному распределению.

11. Распределение Фишера-Снедекора.

Распределение случайной величины Фишера-Снедекора имеет вид:

$$F = \frac{\frac{1}{k_1}\ \chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\ \chi^2(k_2)}$$

Плотность вероятности случайной величины имеет вид:

$$\phi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{\frac{k1}{2}} k_2^{\frac{k2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} x^{\frac{k1}{2}-1} \left(k_1 x + k_2\right)^{-\frac{k1+k2}{2}}$$

где

Г(y) - гамма-функция Эйлера

k_1 k_2 - число степеней свободы

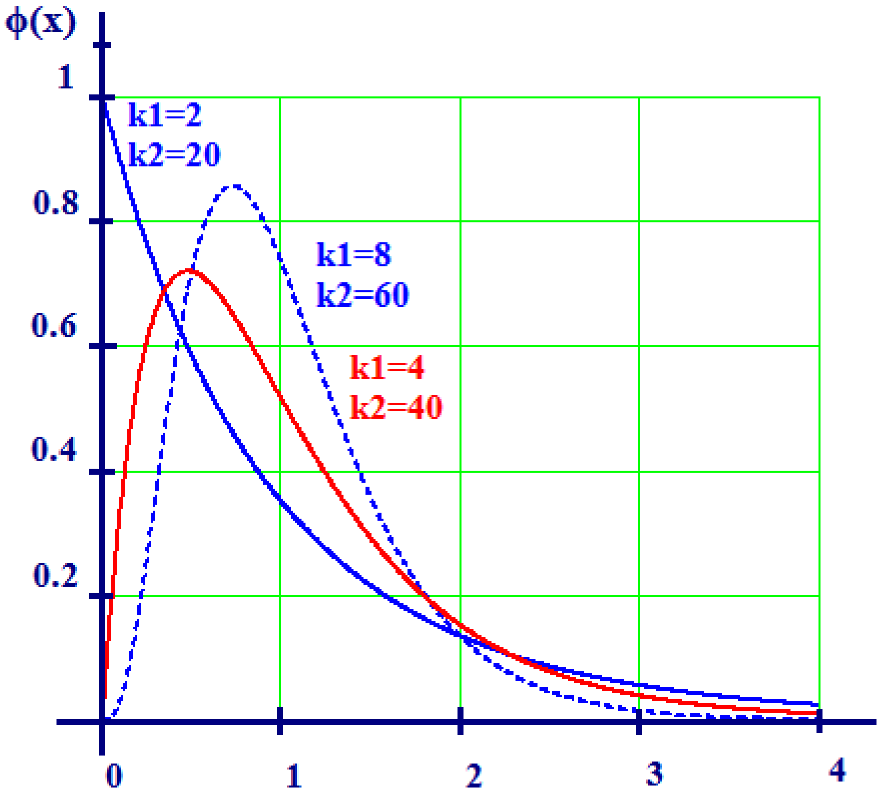

Рис.13

При стремлении n к бесконечности распределение Фишера-Снедекора стремится к нормальному закону распределения.(Рис.13)