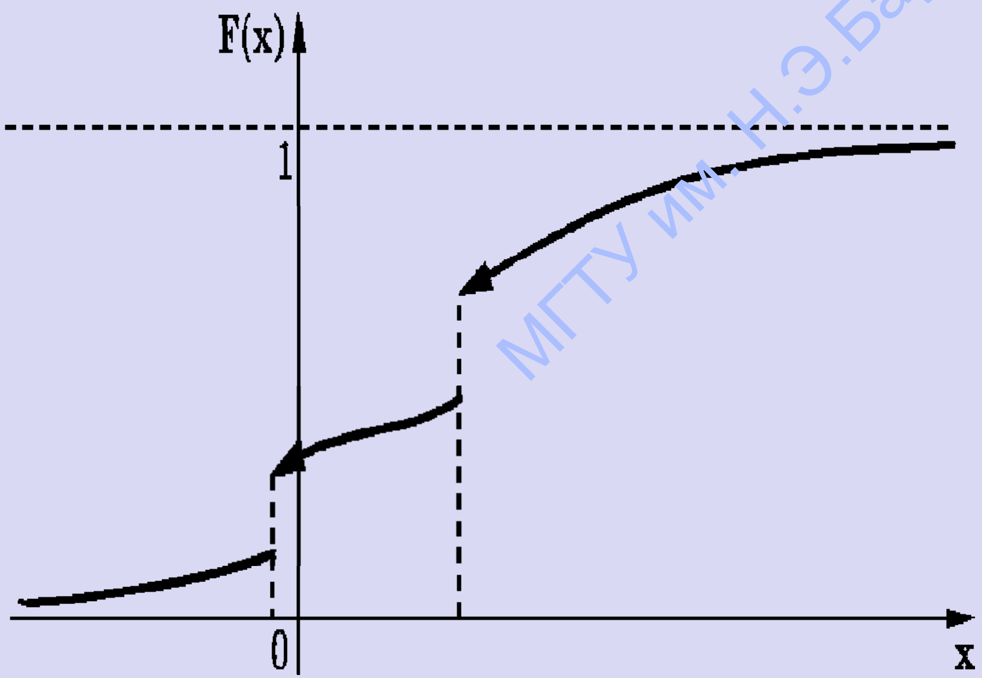
Семинар 1.

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайной величиной (СВ) *X* называется функция заданная на множестве элементарных исходов (в пространстве элементарных событий) Ω $X=f(\omega)$, $\omega\in\Omega$ элементарный исход (элементарных событие).

ФРВ СВ *X* называют функцию *F(x)*, значение которой в точке *x* равно вероятности события $\{X<x\}$,т.е. события, состоящего из тех и только тех элемен. исходов ω, для которых $X(\omega)<x$:

$$F(x)=\mathbf{P}\{X<x\}$$



Пример ФРВ

Свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 \le x_2$ (F(x)- неубывающая функция).

3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 0;\ F(+\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1;$

4. $P\{x_1 \le X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

5. $F(x)=F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F(y)$

(F(x) - непрерывная слева функция).

Дискретные случайные величины

Случайную величину X называют дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Непрерывные случайные величины.

Непрерывной называют случайную величину X, ФРВ которой F(x) можно представить в виде $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(y)dy.$

Функцию p(x) называют плотностью распределения вероятностей (ПРВ) случайной величины X.

В точках непрерывности p(x)=F′(x)

Свойства плотности распределения.

1. $p(x) \geq 0.$

2. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)dx$

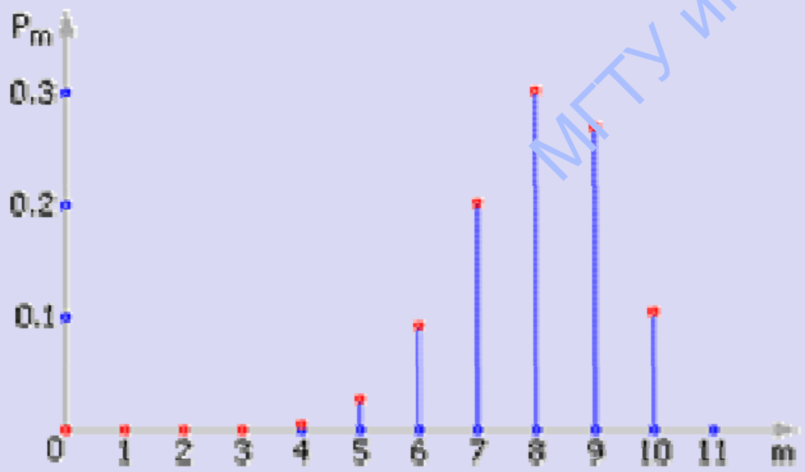
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

4. $P\{X=x\}=0.$

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

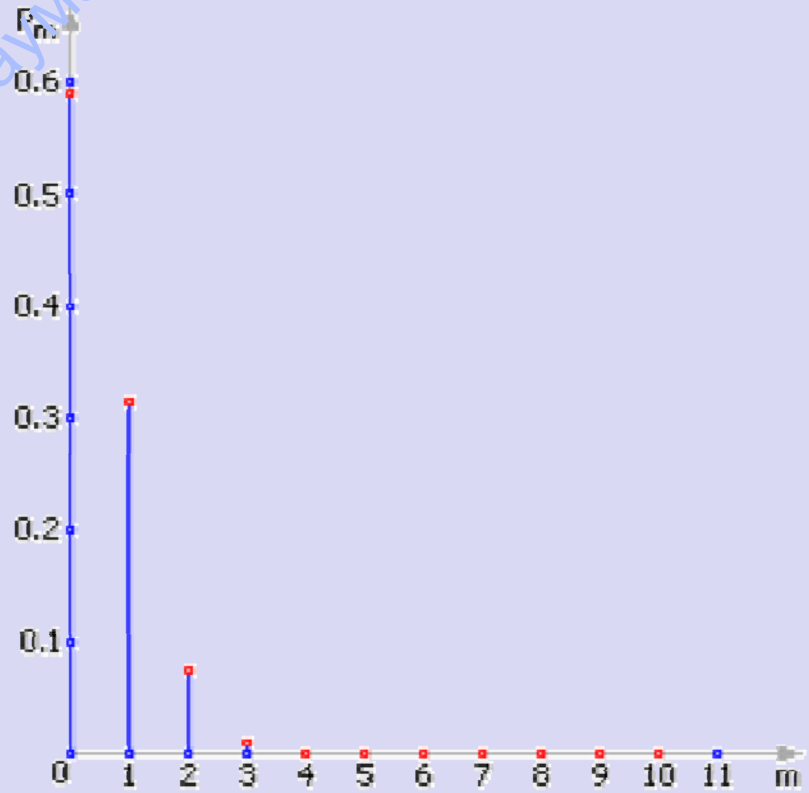
1. Закон распределения **Бернулли**

$$P(x=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$



2. Закон распределения **Пуассона**

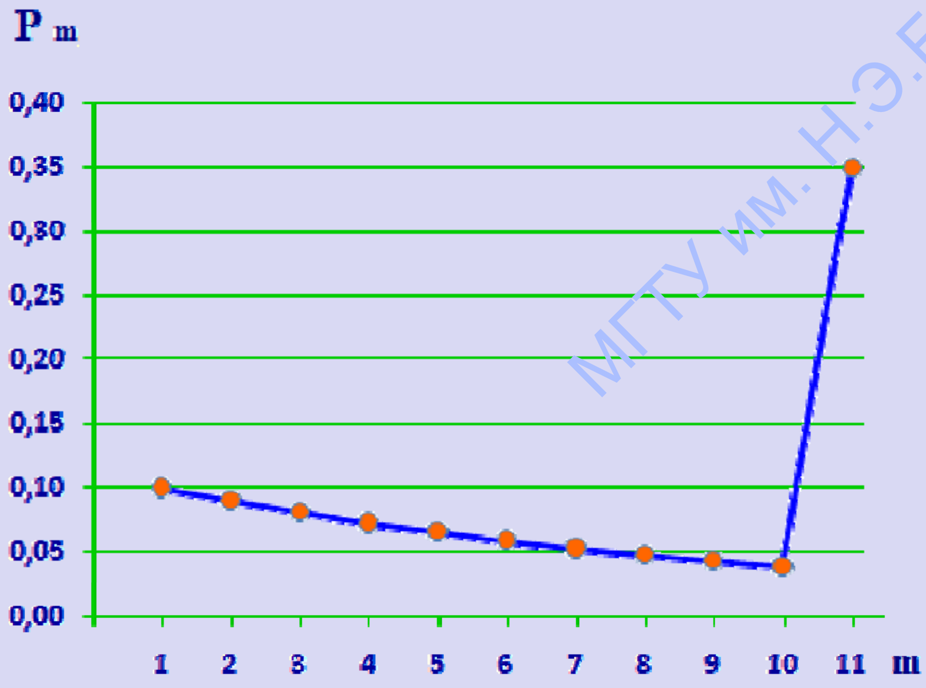
$$P(x=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$



3. Геометрическое распределения

$$P(x=k)=pq^{k-1}$$

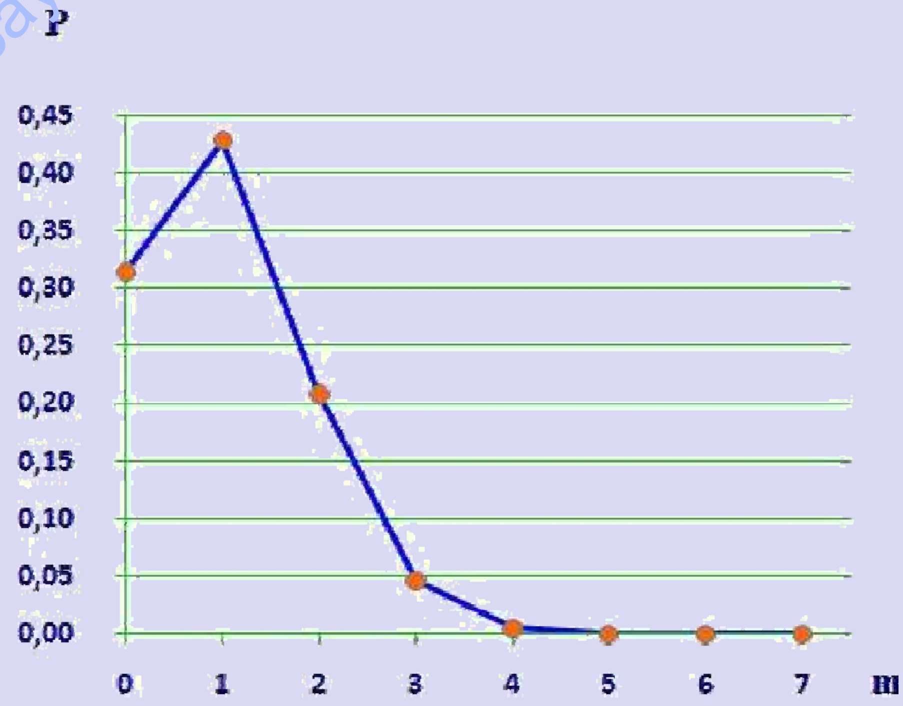
P(x=k) – вероятность наступления А в испытание под номером.: m.
p - вероятность наступления А в одном испытание
q=1-p



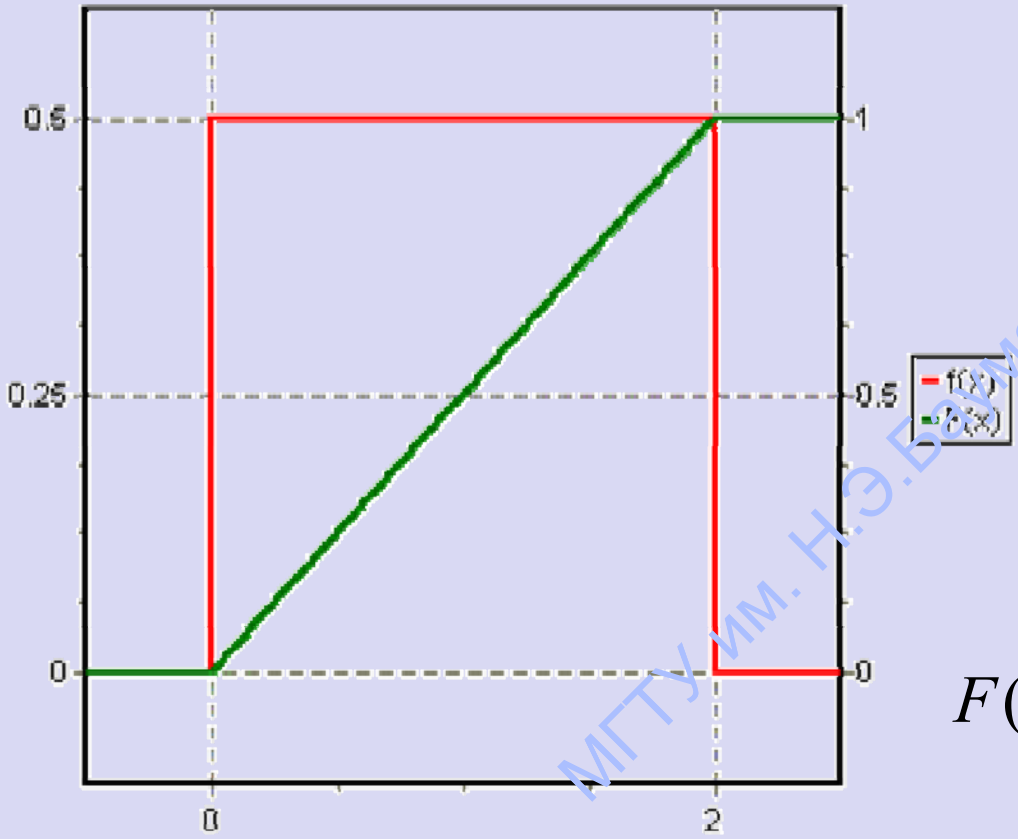
4. Гипергеометрическое распределения

$$P(x=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

m - число извлеченных элементов с заданным свойством;
n - число элементов;
M - число элементов, с заданным свойством в *N*;
N - всего элементов;



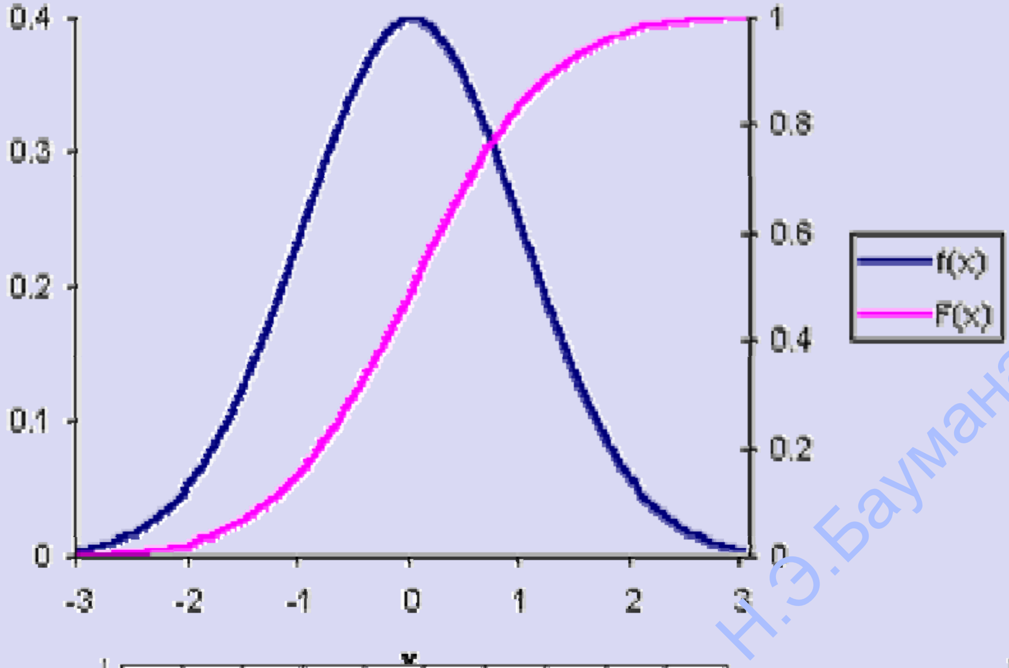
5. **Равномерный** закон распределения



$$p(x)=\begin{cases}0, x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b;\\ 0, x>b.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, x<a;\\ (x-a)(b-x), a\le x\le b;\\ 1, x>b.\end{cases}$$

6. **Нормальный** закон распределения

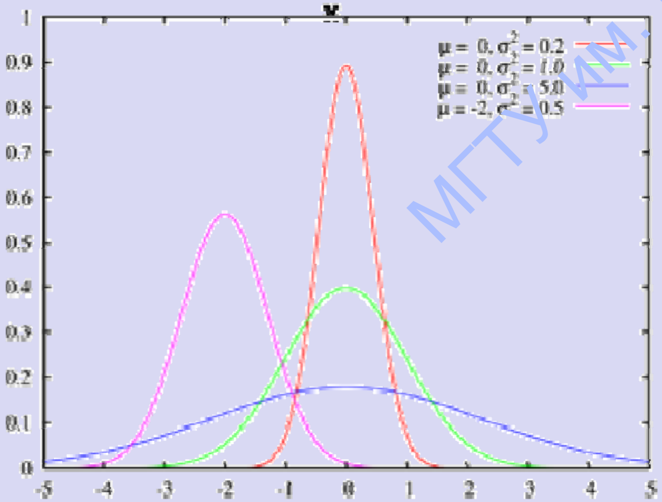


$$F(x)=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

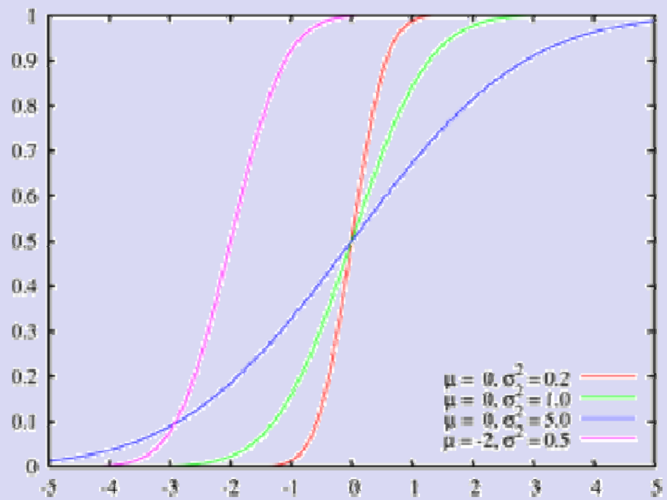
$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mu = M(X)$$

$$\sigma^2 = D(X)$$

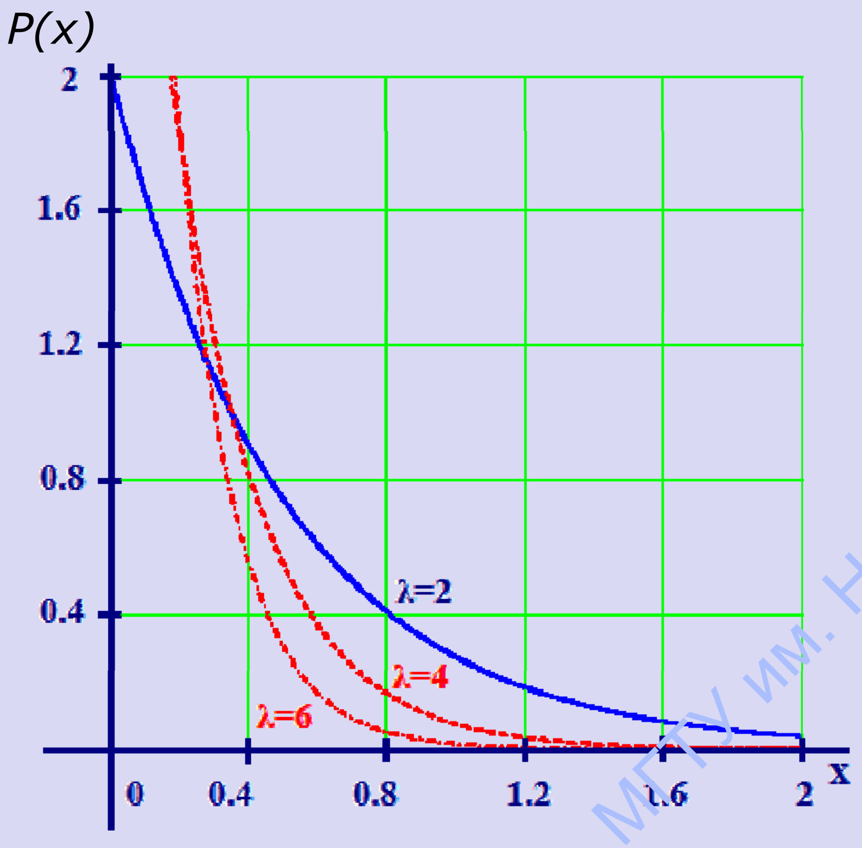


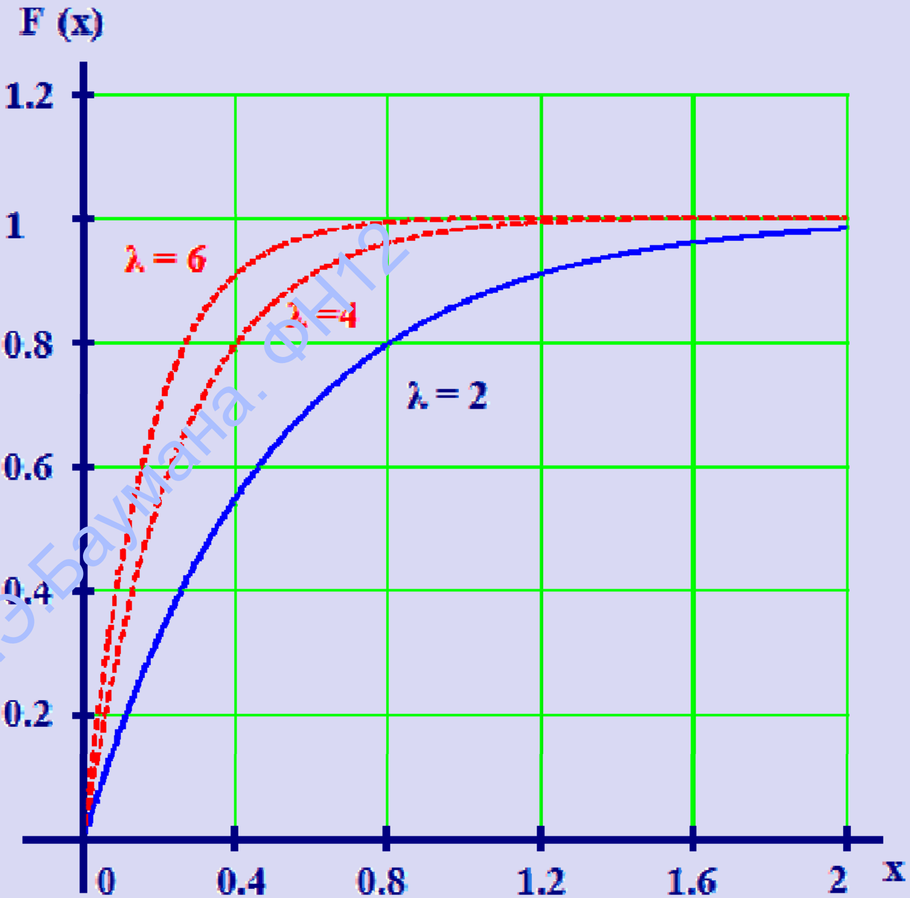
Функция плотности вероятности p(x)



Функция распределения F(x)

7. **Показательный** закон распределения

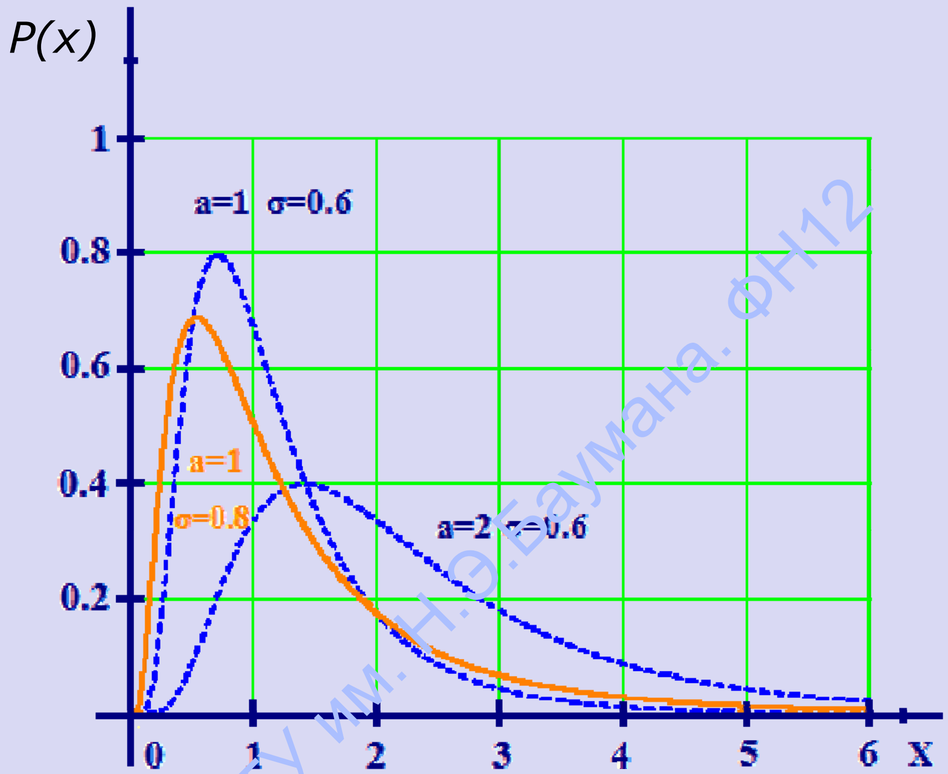




$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

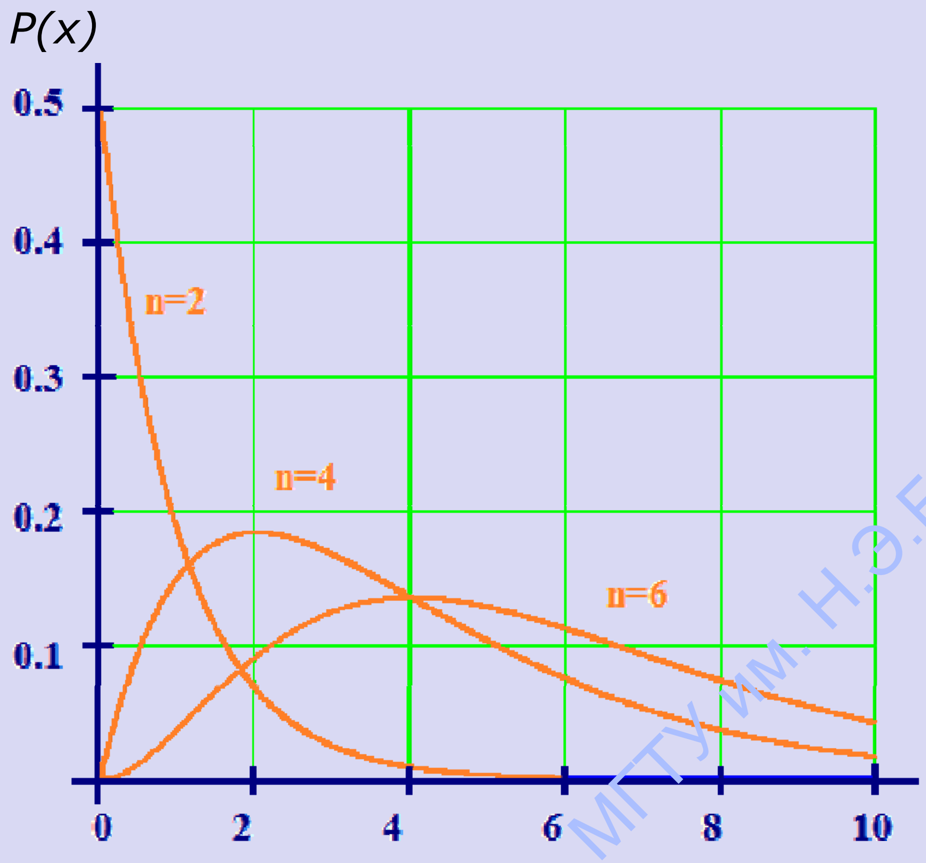
$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

8. Логарифмически-нормальное распределение



$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \int\limits_{-\infty}^{\ln x} e^{\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}} d(\ln x) \qquad p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}}$$

9. Распределение χ^2



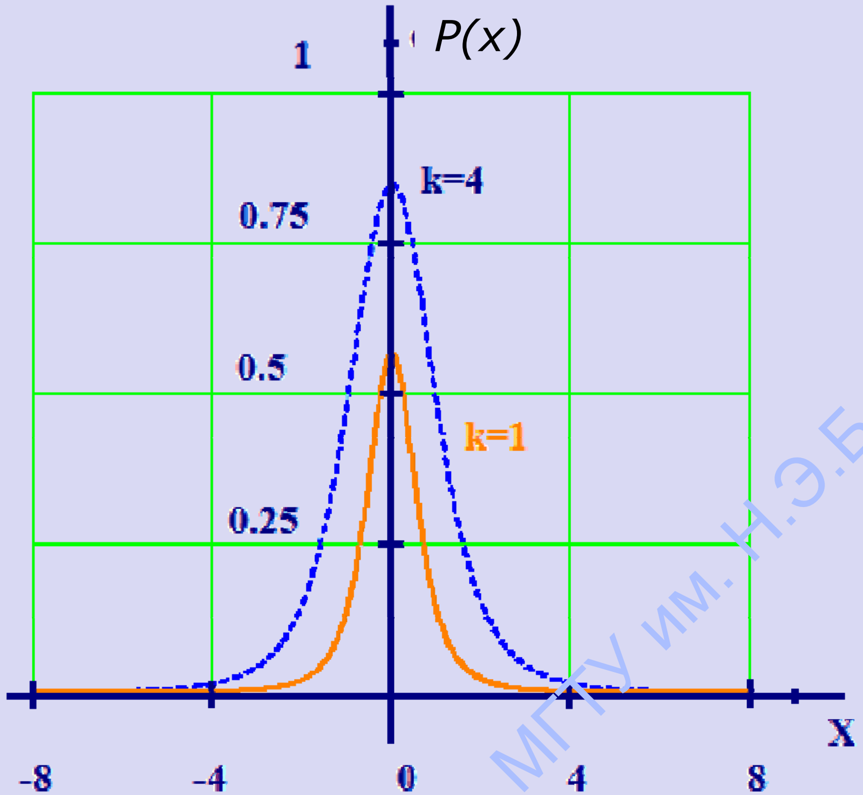
Распределение СВ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2, \quad Z_i \to N(0,1)$$

$$p(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}$$

Гамма-функция Эйлера, если у целое положительное число, то $\Gamma(y) = (y-1)!$

10. Распределение **Стьюдента** (*t- распределение*).



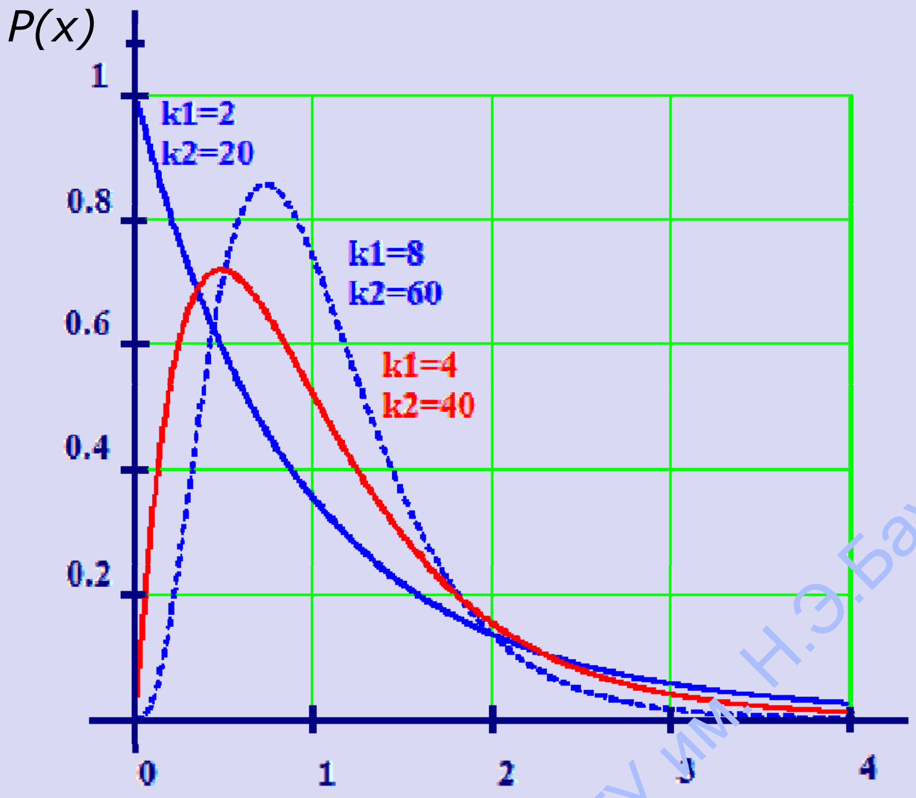
Распределение СВ *t*

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k_2}\chi^2(k)}}, Z \to N(0,1)$$

$$p(x) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{\pi k}}(1+\frac{x^2}{k})^{-\frac{k+1}{2}}$$

$\Gamma(y)$ - Гамма-функция Эйлера,
k- число степеней свободы

11. Распределение **Фишера-Снедекора.**



Распределение СВ F

$$F=\frac{\frac{1}{k_1}\chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\chi^2(k_2)}$$

$$p(x)=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}x^{\frac{k_1}{2}-1}(k_1x+k_2)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}$$

Задача 1.

Игральную кость бросают один раз. Если выпадает четное число очков, игрок выигрывает 8 рублей, если нечетное, но больше одного - проигрывает 1 рубль, если выпадает одно очко - проигрывает 10 рублей.

Найти распределение случайной величины X - величины выигрыша в данной игре.

Решение.

Пространство элементарных исходов - { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } (кол-во очков).

Случайная величина может принять три значения $x_1 = 8, x_2 = -1, x_3 = -10.$

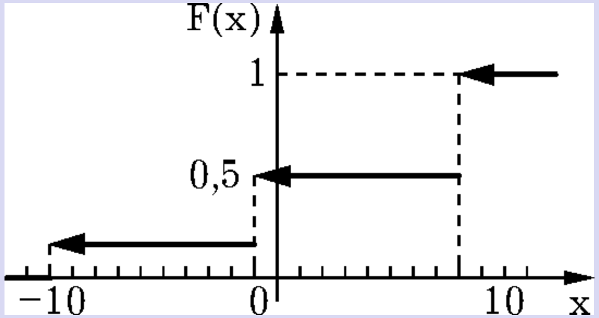
{X=8}={2, 4, 6}, {X=-1}={3, 5}, {X=-10}={1}

Вероятности: $p_1 = 3(1/6) = 1/2,\ p_2 = 1/6 + 1/6 = 1/3, p_3 = 1/6$

Ряд распределения СВ

X	-10	-1	8
P	1/6	1/3	1/2

ФРВ



Задача 2.

Число вызовов, поступающих на АТС каждую минуту, распределено по закону Пуассона с параметром λ=1,5. Найдите вероятность того, что за минуту поступит:

а) ровно три вызова;

б) хотя бы один вызов;

в) менее пяти вызовов.

Закон Пуассона $$P\{X=i\}=P(i,\lambda)=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, i=0,1,\ldots$$

Ответ: а) 0,12551; б) 0,77687; в) 0,98143.

Задача 3. По цели производят серию независимых выстрелов до первого попадания. Даны вероятность *p* попадания при одном выстреле и запас патронов *n*. Найдите ряд распределения и функцию распределения числа X израсходованных патронов.

Ответ: $$P\{X=i\}=\begin{cases} pq^{i-1}, & i=0,\ldots,n-1, (q=1-p); \\ q^{n-1}, & i=n. \end{cases}$$

Задача 4.

Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения p(x) случайной величины X;

б) вероятность попадания случайной величины X в интервал от 0,25 до 0,5;

в) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее 0,3;

г) вероятность того, что случайная величина X примет значение, большее 0,7;

д) графики F(x) и p(x).

Решение:

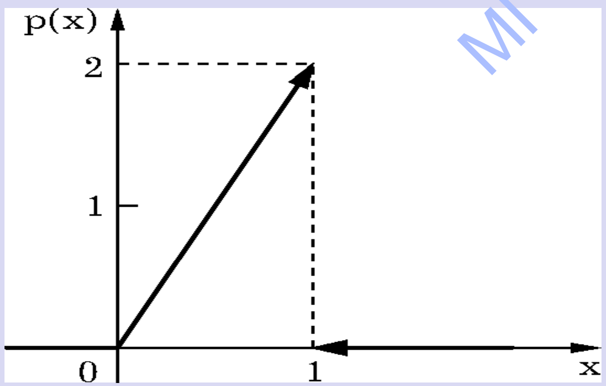
$$a)\,p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 1,\\ 0 & x>1\end{cases}$$

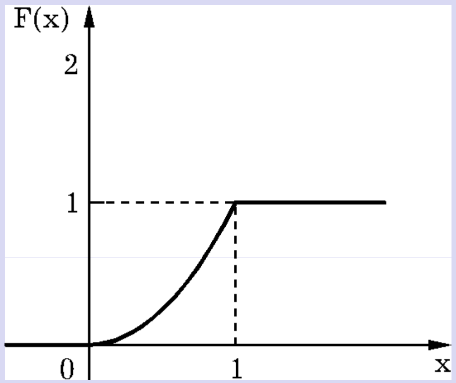
б) P(0.25 < x < 0,5)=F(0,5) - F(0.25)= 0.250 - 0.0625=0.1875

в) P(x < 0,3)=F(0,3) = 0.09

г) P(x > 0,7)=1 - P(x ≤ 0,7)= 1 - F(0,7) = 1- 0.49=0.51

д) Графики F(x),p(x)





Двумерное нормальное распределение

Если X_1 и X_2 - независимые случайные величины, то

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

В общем случае

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}Q(x_1,x_2)\right),$$

где

$$Q(x_1,x_2)=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

— положительно определенная квадратичная форма.

$m=(m_1,m_2)$ - вектор математических ожиданий вектора $X=(X_1,X_2)$;

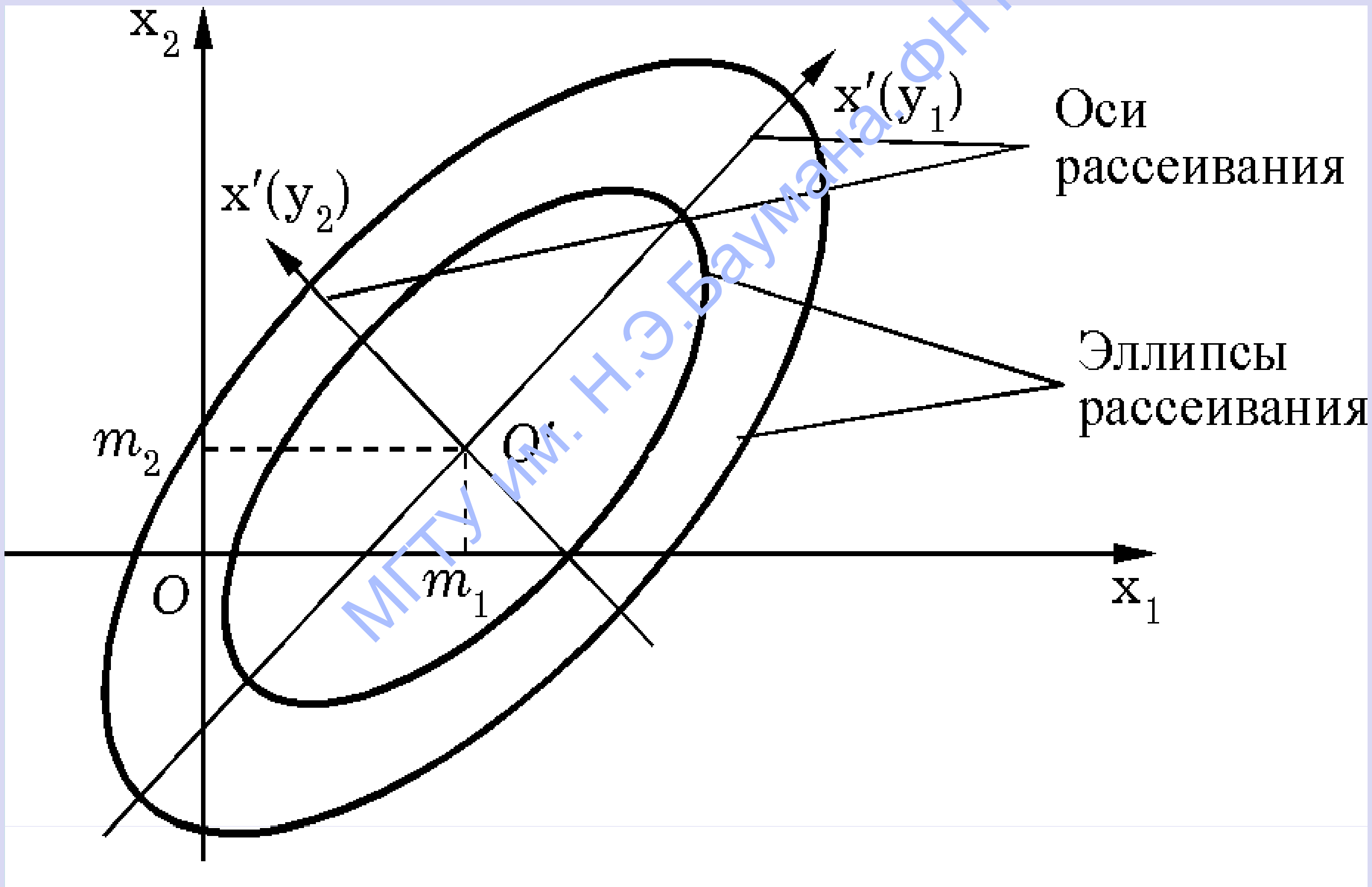
$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ - вектор средних квадратичных отклонений вектора $X=(X_1,X_2)$;

число ρ, |ρ|<1, коэффициент корреляции случайных величин X_1,X_2.

Матрица ковариаций (ковариационная матрица) вектора

$$X = (X_1, X_2);$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \sigma_{ii} = \sigma_i^2, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$$



Задача.

Двумерная случайная величина (X_1, X_2); распределена по нормальному закону с вектором $m_x = (1;2)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Найти

1) оси рассеивания двумерной случайной величины.
2) вероятность попадания случайной величины X_1 в интервал (1/3, 1).

Решение.

1) Направление главных осей рассеивания совпадает с направлением

собственных векторов матрицы $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

,где Σ^{-1} ***обратная матрица*** $\Sigma^{-1} = \dfrac{1}{\det\Sigma} \cdot \Sigma^{*}$

Характеристическое уравнение имеет вид: $\det(\Sigma^{-1} - \lambda \cdot E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0. \qquad \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 9.$$

Собственные вектора:

$$\lambda_1 = 4: \ e_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad \lambda_2 = 9: \ e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Точка O’ имеет координаты (1; 2)

2) Для вычисления вероятности попадания случайной величины X_1 в интервал (1/3, 1) установим параметры распределения величины

Мат. ожидание $m_{x_1} = 1.$

(первая компонента вектора математических ожиданий $m_x=(1;2)$.)

Среднее квадратичное отклонение найдем из матрицы ковариаций вектора (X_1,X_2) $\Sigma = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\frac{8}{36}} = \frac{2}{6} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$P = \left(\Phi_0\left(\frac{1-1}{\sqrt{2}/3}\right) - \Phi_0\left(\frac{1/3-1}{\sqrt{2}/3}\right)\right) = \Phi_0(0) - \Phi_0(-\sqrt{2}) \approx 0{,}42$$

Задача.

Найти вероятность попадания нормально распределенного случайного вектора в эллипс, главные оси которого совпадают с осями рассеивания и центр эллипса совпадает с центром рассеивания.

Решение.

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

эллипс D имеет вид $\frac{(x_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2)^2}{\sigma_2^2}=k^2$

Требуется вычислить $P=\iint\limits_D \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)dx_1dx_2$

Замена переменных $u=\frac{x_1}{\sigma_1}, v=\frac{x_2}{\sigma_2},\ dx_1=\sigma_1\cdot du,\ dx_2=\sigma_2\cdot dv$

окружность D_0. $P=\iint\limits_{D_0}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[u^2+v^2\right]\right)\sigma_1\sigma_2 du dv$

Полярная система координат $x=r\cdot\cos\varphi;\ \ y=r\cdot\sin\varphi.$

Якобиан: $I(r,\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r;$

$$P=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{k} r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\,dr\,d\theta\ =1-\exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)$$

Многомерное нормальное распределение

Плотность (невырожденного) нормального распределения для *случайного вектора* $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ произвольной размерности $n > 2$.

Многомерный нормальный закон определяется вектором средних значений $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ и положительно определенная симметрическая **матрицей ковариаций (ковариационной матрицей)** $\Sigma = (\sigma_{i\,j}),\quad i, j = \overline{1,\, n}$.

Диагональный элемент σ_{ii} — **дисперсия** СВ X_i, $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{ii}}$ — **СКО** X_i.

Элемент σ_{ij}, $i \neq j$ называют **ковариацией** СВ X_i и X_j ($\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, ρ_{ij} — **коэффициент корреляции** X_i и X_j).

Плотность многомерного (n-мерного) нормального распределения (матричная запись)

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})\widetilde{\Sigma}(\vec{x}-\vec{m})^{\mathbb{T}}},$$

где $\widetilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$.

Плотность стандартного многомерного $\Sigma = I$, $\vec{m} = (0, \ldots, 0)$ (**n -мерного) нормального распределения**.

$$p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+\ldots+x_n^2)}.$$

Задача

Трехмерный случайный вектор $\vec{X} = (X_1,\ X_2,\ X_3)$ распределен по нормальному закону с вектором средних значений $\vec{m} = (2{,}5,\ 1,\ 2)$ и матрицей ковариаций

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0{,}5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти:

а) совместную плотность распределения случайного вектора $\vec{X}$;

б) одномерные плотности распределения случайных величин X_1 , X_2 и X_3 .

а.Вычислим определитель матрицы Σ и матрицу $\widetilde{\Sigma} = \Sigma^{-1}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0{,}5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 13{,}25,$$

$$\widetilde{\Sigma} = \Sigma^{-1} = \frac{1}{13{,}25}\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0{,}5 \\ -3 & 7{,}75 & -3{,}5 \\ 0{,}5 & -3{,}5 & 5 \end{pmatrix},$$

Тогда

$$(\vec{x}-\vec{m})\widetilde{\Sigma}(\vec{x}-\vec{m})^{\mathbb{T}} = \begin{pmatrix} x_1 - 2{,}5 & x_2 - 1 & x_3 - 2 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \frac{1}{13{,}25}\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0{,}5 \\ -3 & 7{,}75 & -3{,}5 \\ 0{,}5 & -3{,}5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 2{,}5 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{13{,}25}\Big[8(x_1-2{,}5)^2 - 6(x_1-2{,}5)(x_2-1) + 7{,}75(x_2-1)^2 +$$
$$+(x_1-2{,}5)(x_3-2) - 7(x_2-1)(x_3-2) + 5(x_3-2)^2\Big],$$

Совместная плотность распределения случайного вектора $\vec{X}$, имеет вид

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sqrt{13{,}25}} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{26{,}5}\Big(8(x_1-2{,}5)^2 - 6(x_1-2{,}5)(x_2-1) +\right.$$
$$\left. + 7{,}75(x_2-1)^2 + (x_1-2{,}5)(x_3-2) - 7(x_2-1)(x_3-2) + 5(x_3-2)^2\Big)\right].$$

б.Случайные величины X_1, X_2 и X_3 распределены по нормальному закону с параметрами $m_1 = 2{,}5$ и $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $m_2 = 1$ и $\sigma_2 = \sqrt{3}$, $m_3 = 2$ и $\sigma_3 = \sqrt{2}$. Поэтому

$$P_{X_1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-(x-2{,}5)^2/4}, \quad P_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-(x-1)^2/6},$$
$$P_{X_3}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-2)^2/8}.$$

Задача

Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y)

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$$

Найти: а) плотности распределения составляющих;

б) условные плотности распределения составляющих.

Решение.

а) Плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}dy$$

Вынесем за знак интеграла множитель $e^{-\frac{x^2}{2}}$ (не зависит от y), дополним оставшийся показатель степени до полного квадрата:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{10}}\sqrt{\frac{2}{5}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{2}{5}}y+\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{2}{5}}y+\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)$$

Интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{u^2}du = \sqrt{\pi}$

Плотность распределения составляющей X: $$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-(0,4\cdot x)^2}$$

Плотность распределения составляющей Y: $$f_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-(2,0\cdot x)^2}$$

б) Условные плотности распределения составляющих

$$\varphi_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2}$$

$$\varphi_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{10}(x+5y)^2}$$