Задача

Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y)

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$$

Найти: а) плотности распределения составляющих;
б) условные плотности распределения составляющих.

Решение.

а) Плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}dy$$

Вынесем за знак интеграла множитель $e^{-\frac{x^2}{2}}$ (не зависит от y), дополним оставшийся показатель степени до полного квадрата:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{10}}\sqrt{\frac{2}{5}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{2}{5}}y+\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{2}{5}}y+\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)$$

Интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{u^2}du = \sqrt{\pi}$

Плотность распределения составляющей X: $f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-(0{,}4\cdot x)^2}$

Плотность распределения составляющей Y: $f_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-(2{,}0\cdot x)^2}$

б) Условные плотности распределения составляющих

$$\varphi_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2}$$

$$\varphi_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{10}(x+5y)^2}$$