ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

ФН-12. Магистры - 3 семестр

Лекция 8. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ НА ОГРАНИЧЕННЫХ МАЛЫХ ВЫБОРКАХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

1. Нелинейная детерминированной дискретной ММ состояния

$$X_{k+1} = h^d_{01} X_k + h^d_{02} X_k^2 + h^d_{03} X_k Y_k,$$
$$Y_{k+1} = h^d_{11} X_k + h^d_{12} Y_k + h^d_{13} X_k^2 + h^d_{14} X_k Y_k + h^d_{15} Y_k^2. \qquad (8.1)$$

Особенности задачи идентификации:

1. Возможна только пассивная идентификация.
2. Процесс невозможно повторить в тех же условиях.
3. Имеется ограниченное количество наблюдений, проведенных через равные промежутки времени.
4. Математическая модель состояния должна быть линейной относительно параметров модели.

Наблюдаемые величины: X_k и Y_k, наблюдения проводятся через промежутки времени τ.

Вид модели (8.1) на двухточечном шаблоне:

$$\begin{pmatrix} X_{2k} \\ Y_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{01}^d & 0 & h_{02}^d & h_{03}^d & 0 \\ h_{11}^d & h_{12}^d & h_{13}^d & h_{14}^d & h_{15}^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{2k-1} \\ Y_{2k-1} \\ X_{2k-1}^2 \\ X_k Y_{2k-1} \\ Y_{2k-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{8.2}$$

где матрицы-строки $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$.

Массивы экспериментальных данных

$$\begin{aligned} X_{ч} &\triangleq (X_2, X_4, \ldots, X_{2N}), \\ X_{нч} &\triangleq (X_1, X_3, \ldots, X_{2N-1}) \\ Y_{ч} &\triangleq (Y_2, Y_4, \ldots, Y_{2N}), \\ Y_{нч} &\triangleq (Y_1, Y_3, \ldots, Y_{2N-1}). \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$Z_x \triangleq \begin{pmatrix} X_1, \ldots, X_{2N-1} \\ X_1^2, \ldots, X_{2N-1}^2 \\ X_1Y_1, \ldots, X_{2N-1}Y_{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{нч} \\ X_{нч}^2 \\ X_{нч}Y_{нч} \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

$$Z_y \triangleq \begin{pmatrix} X_1, \ldots, X_{2N-1} \\ Y_1, \ldots, Y_{2N-1} \\ X_1^2, \ldots, X_{2N-1}^2 \\ X_1Y_1, \ldots, X_{2N-1}Y_{2N-1} \\ Y_1^2, \ldots, Y_{2N-1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{нч} \\ Y_{нч} \\ X_{нч}^2 \\ X_{нч}Y_{нч} \\ Y_{нч}^2 \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

$H_0^d = (h_{01}^d, h_{02}^d, h_{03}^d), \quad H_1^d = (h_{11}^d, h_{12}^d, h_{13}^d, h_{14}^d, h_{15}^d),$

$$X_ч = H_0^d Z_x + \varepsilon, \quad Y_ч = H_1^d Z_y + \eta. \tag{8.6}$$

Оценка векторов параметров H_0^d и H_1^d:

$$\widehat{H}_0^d = X_ч Z_x^+, \quad \widehat{H}_1^d = Y_ч Z_y^+. \tag{8.7}$$

2. Рассмотрим нелинейную трехмерную модель развития раковой опухоли

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 \ln \dfrac{x_1}{x_2}, \\ \dot{x}_2 = b x_1 - d x_1^{2/3} x_2 - e x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = -\lambda_3 x_3 + u. \end{cases} \tag{8.8}$$

Здесь x_1 — объем опухоли, мм^3; x_2 — объем эндотелия, мм^3; x_3 — концентрация ингибитора, мг$/$кг; λ_1 — скорость роста опухоли, 1/день; b — скорость формирования новых кровеносных сосудов, 1/день; d — скорость гибели кровеносных сосудов, $1/($мм$^{2/3} \cdot$ день$)$; e — параметр, характеризующий влияние лекарственных средств на гибель кровеносных сосудов кг$/($мг $\cdot$ день$)$; λ_3 — клиренс (объем крови, который очищается от лекарственного средства за единицу времени), 1/день.

Управлением в этой системе является доза u подаваемого лекарства, мг$/($кг$\cdot$ день$)$.

Параметры системы λ_1, b, d, e, λ_3 являются положительными числами.

Дискретный аналог модели (8.8) имеет вид

$$\begin{cases} X_{k+1}^{(1)} = X_k^{(1)} - \lambda_1^d X_k^{(1)} \ln \dfrac{X_k^{(1)}}{X_k^{(2)}}, \\ X_{k+1}^{(2)} = b^d X_k^{(1)} + 1 X_k^{(2)} - d^d \left(X_k^{(1)}\right)^{2/3} X_k^{(2)} - e^d X_k^{(2)} X_k^{(3)}, \\ X_{k+1}^{(3)} = \lambda_3^d X_k^{(3)} + U^d. \end{cases} \tag{8.9}$$

Здесь $X_{k+1}^{(1)}$ — объем опухоли в момент времени $k+1$, мм^3; $X_k^{(1)}$ — объем опухоли в момент времени k, мм^3; $X_{k+1}^{(2)}$ — объем эндотелия на момент $k+1$ измерения, мм^3; $X_k^{(2)}$ — объем эндотелия на момент k измерения, мм^3; $X_{k+1}^{(3)}$ — концентрация ингибитора на момент $k+1$ измерения, мг/кг; $X_k^{(3)}$ — концентрация ингибитора на момент k измерения, мг/кг; $\lambda_1^d = -\lambda_1 \Delta t$; $b^d = b \cdot \Delta t$; $d^d = -d \Delta t$; $e^d = -e \cdot \Delta t$; $\lambda_3^d = 1 - \lambda_3 \cdot \Delta t$; $U^d = u \cdot \Delta t$, где параметры λ_1, b, d, e, λ_3 — определены в модели (8.8).

Запишем модель (8.9) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_{k+1}^{(1)} \\ \tilde{X}_{k+1}^{(2)} \\ \tilde{X}_{k+1}^{(3)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{X}_k^{(1)} \\ \tilde{X}_k^{(2)} \\ \tilde{X}_k^{(1)} \ln\left(\frac{X_k^{(1)}}{X_k^{(2)}}\right) \\ (X_k^{\widetilde{(1)}})^{2/3} X_k^{(2)} \\ \tilde{X}_k^{(3)} \\ \tilde{X}_k^{(2)} X_k^{(3)} \\ \tilde{U}_k \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda_1^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b^d & 1 & 0 & b^d & 0 & e^d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3^d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица параметров математической модели (8.10), $\tilde{X}_k^i,\ 1 \in \{1,2,3\}$, $k = \overline{1,2N}$ — значения векторов состояния системы в момент времени t_k, $X_k^i,\ 1 \in \{1,2,3\}$, $k = \overline{1,2N}$ — наблюдаемые значения величин $\tilde{X}_k^i,\ 1 \in \{1,2,3\}$, $i = \overline{1,2N}$.

Сформируем из множества наблюдений X_k^i, $1 \in \{1,2,3\}$, $k = \overline{1,2N}\}$ множество четных и множество нечетных узлов.
Для нахождения точечных оценок элементов матрицы A, запишем эту модель в виде:

$$\begin{pmatrix} X_{k+1}^{(1)} \\ X_{k+1}^{(2)} \\ X_{k+1}^{(3)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_k^{(1)} \\ X_k^{(2)} \\ X_k^{(1)} \ln\left(\frac{X_k^{(1)}}{X_k^{(2)}}\right) \\ \left(X_k^{(1)}\right)^{2/3} X_k^{(2)} \\ X_k^{(3)} \\ X_k^{(2)} X_k^{(3)} \\ U_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix}, \tag{8.11}$$

где матрица A определена в (8.10), матрицы-строки

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in M_{1\times N}(R), \\ \eta &= (\eta_1, \ldots, \eta_N) \in M_{1\times N}(R), \\ \xi &= (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in M_{1\times N}(R), \end{aligned} \tag{8.12}$$

– реализации случайных ошибок наблюдения (случайные возмущения ММ, погрешности в экспериментальных данных).

Рассматриваемая модель является линейной относительно оцениваемых параметров. Задачу идентификации матрицы параметров системы можно разбить на три независимые подзадачи. 1. Нахождение оценки параметра $\lambda_1^d t$.
2. Нахождение оценок параметров b^d , d^d и e^d .
3. Нахождение оценки параметра $\lambda_3^d t$
Считая, что X_{k+1} зависит только от X_k , разделим массив экспериментальных данных на два.
Сформируем массивы экспериментальных данных для нахождения оценок параметров модели.

Массивы экспериментальных данных для первого уравнения математической модели имеют вид:

$$
\begin{aligned}
X_{ev}^{(1)} &\triangleq (X_2^{(1)}, X_4^{(1)}, \ldots, X_{2N}^{(1)}) \in M_{1\times N}(R),\\
X_{odd}^{(1)} &\triangleq (X_1^{(1)}, X_3^{(1)}, \ldots, X_{2N-1}^{(1)}) \in M_{1\times N}(R),\\
X_{ev}^{(2)} &\triangleq (X_2^{(2)}, X_4^{(2)}, \ldots, X_{2N}^{(2)}) \in M_{1\times N}(R),\\
X_{odd}^{(2)} &\triangleq (X_1^{(2)}, X_3^{(2)}, \ldots, X_{2N-1}^{(2)}) \in M_{1\times N}(R).
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

Согласно (8.11) и (8.13)

$$X_{ev} = H_1^d W_1 + \varepsilon \,, \tag{8.14}$$

где матрица-строка ε определена в (8.12).
Здесь матрица-строка

$$H_1^d = (1, \lambda_1^d), \tag{8.15}$$

Матрица

$$W_1 \triangleq \begin{pmatrix} X_1^{(1)}, X_3^{(1)}, \ldots, X_{2N-1}^{(1)} \\ X_1^{(1)} \ln\left(\frac{X_1^{(1)}}{X_1^{(2)}}\right), X_3^{(1)} \ln\left(\frac{X_3^{(1)}}{X_3^{(2)}}\right), \ldots, X_{2N-1}^{(1)} \ln\left(\frac{X_{2N-1}^{(1)}}{X_{2N-1}^{(2)}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{odd}^{(1)} \\ X_{odd}^{(1)} \ln\left(\frac{X_{odd}^{(1)}}{X_{odd}^{(2)}}\right) \end{pmatrix}. \tag{8.16}$$

Массивы экспериментальных данных для второго уравнения математической модели имеют вид:

$$\begin{aligned}
X_{ev}^{(1)} &\triangleq (X_2^{(1)}, X_4^{(1)}, \ldots, X_{2N}^{(1)}) \in M_{1\times N}(R),\\
X_{odd}^{(1)} &\triangleq (X_1^{(1)}, X_3^{(1)}, \ldots, X_{2N-1}^{(1)}) \in M_{1\times N}(R),\\
X_{ev}^{(2)} &\triangleq (X_2^{(2)}, X_4^{(2)}, \ldots, X_{2N}^{(1)}) \in M_{1\times N}(R),\\
X_{odd}^{(2)} &\triangleq (X_1^{(2)}, X_3^{(2)}, \ldots, X_{2N-1}^{(2)}) \in M_{1\times N}(R),\\
X_{ev}^{(3)} &\triangleq (X_2^{(3)}, X_4^{(3)}, \ldots, X_{2N}^{(3)}) \in M_{1\times N}(R),\\
X_{odd}^{(3)} &\triangleq (X_1^{(3)}, X_3^{(3)}, \ldots, X_{2N-1}^{(3)}) \in M_{1\times N}(R).
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Согласно (8.11) и (8.17)

$$X_{ev} = H_2^d W_2 + \eta\ , \tag{8.18}$$

где матрица-строка η определена в (8.12).
Здесь матрица-строка

$$H_2^d = (b^d, 1, b^d, e^d). \tag{8.19}$$

Матрица

$$W_2 \triangleq \begin{pmatrix} X_1^{(1)}, X_3^{(1)}, \ldots, X_{2N-1}^{(1)} \\ X_1^{(2)}, X_3^{(2)}, \ldots, X_{2N-1}^{(2)} \\ \left(X_1^{(1)}\right)^{2/3} X_1^{(2)}, X\left(_3^{(1)}\right)^{2/3} X_3^{(2)}, \left(X_{2N-1}^{(1)}\right)^{2/3} X_{2N-1}^{(2)} \\ X_1^{(2)} X_1^{(3)}, X_3^{(2)} X_3^{(3)}, X_{2N-1}^{(2)} X_{2N-1}^{(3)}. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{odd}^{(1)} \\ X_{odd}^{(2)} \\ \left(X_{odd}^{(1)}\right)^{2/3} X_{odd}^{(2)} \\ X_{odd}^{(2)} X_{odd}^{(3)}. \end{pmatrix}. \tag{8.20}$$

Массивы экспериментальных данных для третьего уравнения математической модели имеют вид:

$$X_{ev}^{(3)} \triangleq (X_2^{(3)}, X_4^{(3)}, \dots, X_{2N}^{(1)}) \in M_{1\times N}(R),$$
$$X_{odd}^{(3)} \triangleq (X_1^{(3)}, X_3^{(3)}, \dots, X_{2N-1}^{(3)}) \in M_{1\times N}(R). \tag{8.21}$$

Согласно (8.11) и (8.17)

$$X_{ev} = H_3^d W_3 + \xi\ , \tag{8.22}$$

где матрица-строка ξ определена в (8.12).
Здесь матрица-строка

$$H_3^d = (\lambda_3^d, 1). \tag{8.23}$$

Матрица

$$W_3 \triangleq \begin{pmatrix} X_1^{(3)}, X_3^{(3)}, \dots, X_{2N-1}^{(3)} \\ U_1, U_3, \dots, U_{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{odd}^{(3)} \\ U_{odd} \end{pmatrix}. \tag{8.24}$$

Реализация оценки вектора параметров H_1^d МНК может имеет вид:

$$\widehat{H}_1^d = X_{ev} W_1^+ \,,\, \widehat{H}_2^d = X_{ev} W_2^+ \,,\, \widehat{H}_3^d = X_{ev} W_3^+ \,, \tag{8.25}$$

где W_1^+ – матрица, псевдообратная по отношению к матрице XW_1, определенной в (8.13), W_2^+ – матрица, псевдообратная по отношению к матрице XW_2, определенной в (8.17), W_3^+ – матрица, псевдообратная по отношению к матрице XW_4, определенной в (8.21).

Численное моделирование проводилось по следующей схеме. Для получения оценки параметров было выбрано 12 отсчетов, начиная с момента времени, когда отклонение оценки переменной x_1 от входного значения становилось меньше заранее заданной достаточно малой величины. Для моделирования использовались следующие значения параметров:

$$\lambda_1 = 0.0834; \quad b = 5.85; \quad d = 0.00873; \quad e = 0.66; \quad \lambda_3 = 1.700,$$

В результате работа алгоритма были получены оценки параметров:

$$\hat{\lambda}_1 = 0.0830; \quad \hat{b} = 5.8208; \quad \hat{d} = 0.00870; \quad \hat{e} = 0.6567; \quad \hat{\lambda}_3 = 1.7293.$$

Полученные оценки параметров близки к исходным значениям.