# ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

**ФН-12. Магистры - 3 семестр**

# Семинар 13. ФИЛЬТР КАЛМАНА

Пусть имеется стохастическая модель состояния (СМС)

$$\begin{cases} X(t_{i+1},\omega) = \Phi X(t_i,\omega) + \varepsilon_i(\omega), \quad i=\overline{1,\ N}, \\ Y(t_i,\omega) = QX(t_i,\omega) + \eta_i(\omega), \quad i=\overline{1,\ N}, \end{cases} \tag{13.1}$$

где $X(t,\omega)$, $t \in T_{(N)} = \{t_i\}_{i=1}^{N}$ – $n$-мерный вектор состояния объекта, случайный нормальный процесс;
$Y(t,\omega)$, $t \in T_{(N)}$ – $p$-мерный вектор набл. переменных состояния;
$\Phi \in M_n(\mathbb{R})$ и $Q \in M_{pn}(\mathbb{R})$ – известные матрицы;
$\varepsilon_i(t,\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$ – $n$-мерные независимые случайные векторы, $\varepsilon_i(t,\omega) \to N(0,\Sigma_\varepsilon)$, шум системы;
$\eta_i(t,\omega)$, $i = \overline{1,\ N}$ – $n$-мерные независимые СВ, $\eta_i(t,\omega) \to N(0,\Sigma_\eta)$, шум (погрешности) измерений (белый шум);
$\Sigma_\varepsilon$, $\Sigma_\eta$ – положительно определенные ковариационные матрицы.
Фильтр Калмана – последовательный рекурсивный алгоритм, использующий модель динамической системы (ДС) (13.1) для получения оценки. В результате анализа каждой новой выборки измерений текущая оценка может быть скорректирована.

Основной принцип фильтра Калмана:
при фильтрации используется информация о физике самого явления.

Алгоритм фильтра Калмана позволяет в реальном времени построить оптимальную оценку состояния системы, основываясь на измерениях $Y(t,\omega)$, содержащих погрешности $\eta_i(t,\omega)$.

$Y(t,\omega)$ – вектор измерений, многомерный зашумлённый выходной сигнал системы, вектор состояния $X(t,\omega)$ – неизвестный многомерный сигнал, подлежащий определению. Условие оптимальности построенной оценки – минимум средне- квадратичного отклонения оценки от истинного значения.

Фильтр Калмана позволяет восстановить недостающую информацию о фазовом состоянии ДС в каждый момент времени посредством имеющихся измерений выходного сигнала. называется апостериори оценка.

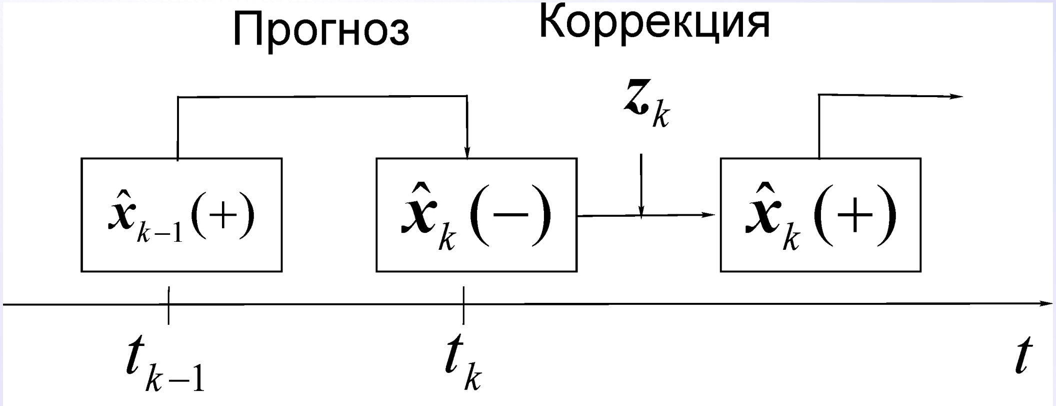


**Рис. 1.** Принцип работы фильтра Калмана

Фильтр Калмана работает по системе прогноз-коррекция.

Самолет летит прямолинейно на постоянной высоте со скоростью $V$ .

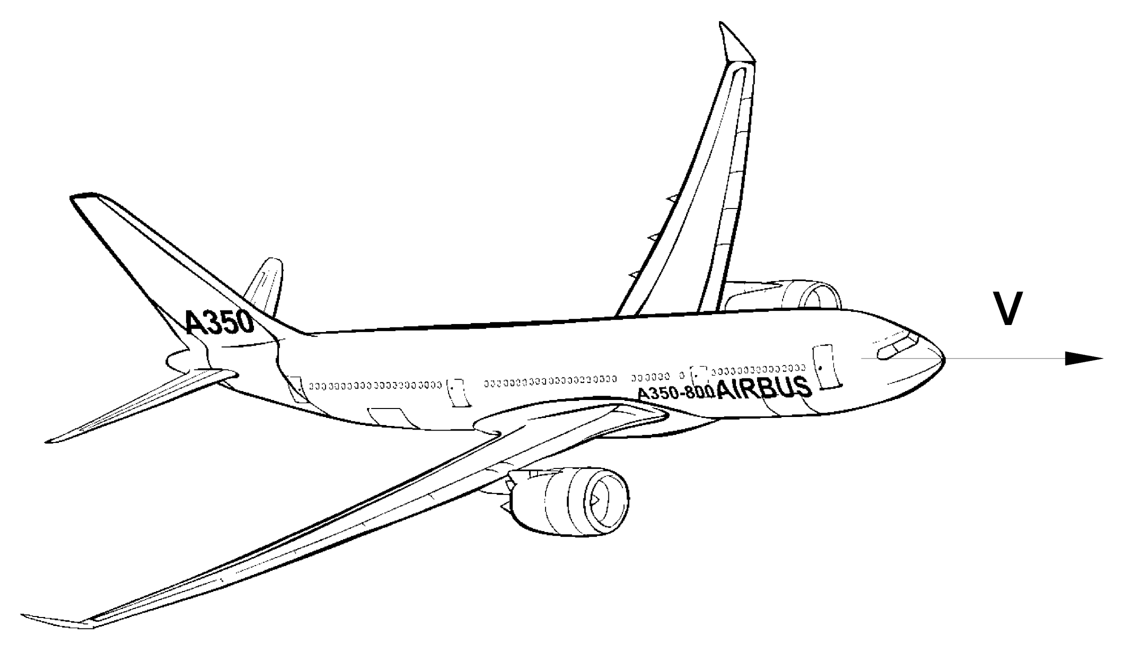


**Рис. 2**

Координата самолета будет изменяться по закону $x_{k+1} = x_k + V_k dt$ . В действительности учесть в расчетах малые возмущения, действующие на самолет (направление и сила ветра, температура, влажность...) достаточно сложно, настоящая скорость самолета будет отличаться от расчетной.

К правой части уравнения добавим случайную величину $\xi_k$ :

$$x_{k+1} = x_k + V_k dt + \xi_k \tag{13.2}$$

На борту установлен GPS-датчик, измеряющий координату $x_k$ самолета, измерения с ошибкой $\eta_k$ , которая является случайной величиной. С датчика мы получаем зашумленные данные:

$$z_k = x_k + \eta_k \tag{13.3}$$

Задача: зная зашумленные показания датчика $z_k$ , найти оптимальное приближение для истинной координаты самолета $x_k$ . Обозначим оптимальное приближение $x_k^{opt}$ .
Уравнения для координаты $x_k$ и показаний сенсора $z_k$ имеют вид

$$x_{k+1} = x_k + u_k + \xi_k z_k = x_k + \eta_k, \tag{13.4}$$

где $u_k = V_k dt$ .
$u_k$ – известная величина.
Задача фильтрации – это не задача сглаживания данных с датчика. Задача – получить наиболее близкое к реальному значение координаты.

$\xi_k, \eta_k$ – ошибки модели и датчика, случайные величины с законами распределения не зависящими от времени (от номера итерации $k$).
Законы распределения ошибок модели и датчика не зависят от $k$ (могут быть не известны).
$E\{\xi_k\} = E\{\eta_k\} = 0$ – средние значения ошибок равны нулю.
Дисперсии $\sigma_{\xi_k}$, $\sigma_{\eta_k}$ ошибок известны и не зависят номера итерации $k$.
Все ошибки независимые СВ.

**Алгоритм Калмана.**

Пусть на $k$ -м шаге нашли отфильтрованное значение с датчика $x_k^{opt}$, которое хорошо приближает истинную координату системы $x_k$. Уравнение, описывающее изменение координаты $x_{k+1}$ известно, и следовательно еще не получив значение с датчика, можно предположить, что на шаге $k+1$ система изменится согласно закону $x_{k+1} = x_k + u_k + \xi_k$ и датчик покажет значение близкое к $x_k^{opt} + u_k$. На шаге $k+1$ будет известно показание датчика $z_{k+1}$ (неточное).
Идея Калмана состоит в том, что чтобы получить наилучшее приближение к истинной координате, можем взять взвешенную сумму показаний датчика $z_{k+1}$ и априорного значения координаты в виде $x_k^{opt} + u_k$. Показанию датчика присваиваем вес $K$, а априорной оценке – вес $K-1$:

$$x_{k+1}^{opt} = K z_k + (1-K)(x_k^{opt} + u_k)$$

$K$ – коэффициент Калмана.

Необходимо выбрать коэффициент Калмана таким, чтобы получившееся оптимальное значение координаты было бы наиболее близко к истинной координате.

Невязка оценивания: $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - x^{opt}_{k+1} = (1-K)(\varepsilon^2_k + \sigma^2_{\xi_k}) + K\sigma_{\eta_k}$ .

Для того, чтобы найти точное значение коэффициента Калмана, нужно минимизировать математическое ожидание квадрата невязки:

$E\{\varepsilon^2_{k+1}\} \to \min$

$E\{\varepsilon^2_{k+1}\} = (1-K)^2(E\{\varepsilon^2_k\} + \sigma^2_{\xi_k}) + K^2\sigma^2_{\eta_k}$ Получим:

$$K_{k+1} = \frac{E\{\varepsilon^2_k\} + \sigma^2_{\xi_k}}{E\{\varepsilon^2_k\} + \sigma^2_{\xi_k} + \sigma^2_{\eta_k}}$$

Подставим в выражение для среднеквадратичной ошибки, минимизирующее значение коэффициента Калмана $K_{k+1}$ . Получим:

$$E\{\varepsilon^2_{k+1}\} = \frac{\sigma^2_{\eta_k}\left(E\{\varepsilon^2_k\} + \sigma^2_{\xi_k}\right)}{E\{\varepsilon^2_k\} + \sigma^2_{\xi_k} + \sigma^2_{\eta_k}}$$

**Код на матлабе**

$clearall\,;$

$N = 100\,;$ % number of samples

$a = 0.1$ % acceleration

$sigmaPsi = 1\,;\; sigmaEta = 50\,;$

$k = 1:N\,;\; x = k\,;\; x(1) = 0\,;\; z(1) = x(1) + normrnd(0, sigmaEta)\,;$

$for\ t = 1:(N-1)$

$\quad x(t+1) = x(t) + a*t + normrnd(0, sigmaPsi)\,;$

$\quad z(t+1) = x(t+1) + normrnd(0, sigmaEta)\,;$

$end\,;$

$xOpt(1) = z(1)\,;\; eOpt(1) = sigmaEta$ ;%kalman filter

% eOpt(t) is a square root of the error dispersion (variance).

$for\ t = 1:(N-1)$

$\quad eOpt(t+1) = sqrt((sigmaEta\hat{}2)*(eOpt(t)\hat{}2 + sigmaPsi\hat{}2)/\ ...$

$\quad (sigmaEta\hat{}2 + eOpt(t)\hat{}2 + sigmaPsi\hat{}2))\,;$

$\quad K(t+1) = (eOpt(t+1))\hat{}2/sigmaEta\hat{}2\,;$

$\quad xOpt(t+1) = (xOpt(t) + a*t)*(1 - K(t+1)) + K(t+1)*z(t+1)\,;$

$end\,;$

$plot(k, x, 'Color', 'g');$

$plot(k, xOpt, 'Color', 'r');\;\; hold\ on$

$plot(k, z, 'Color', 'b');\;\; hold\ on$

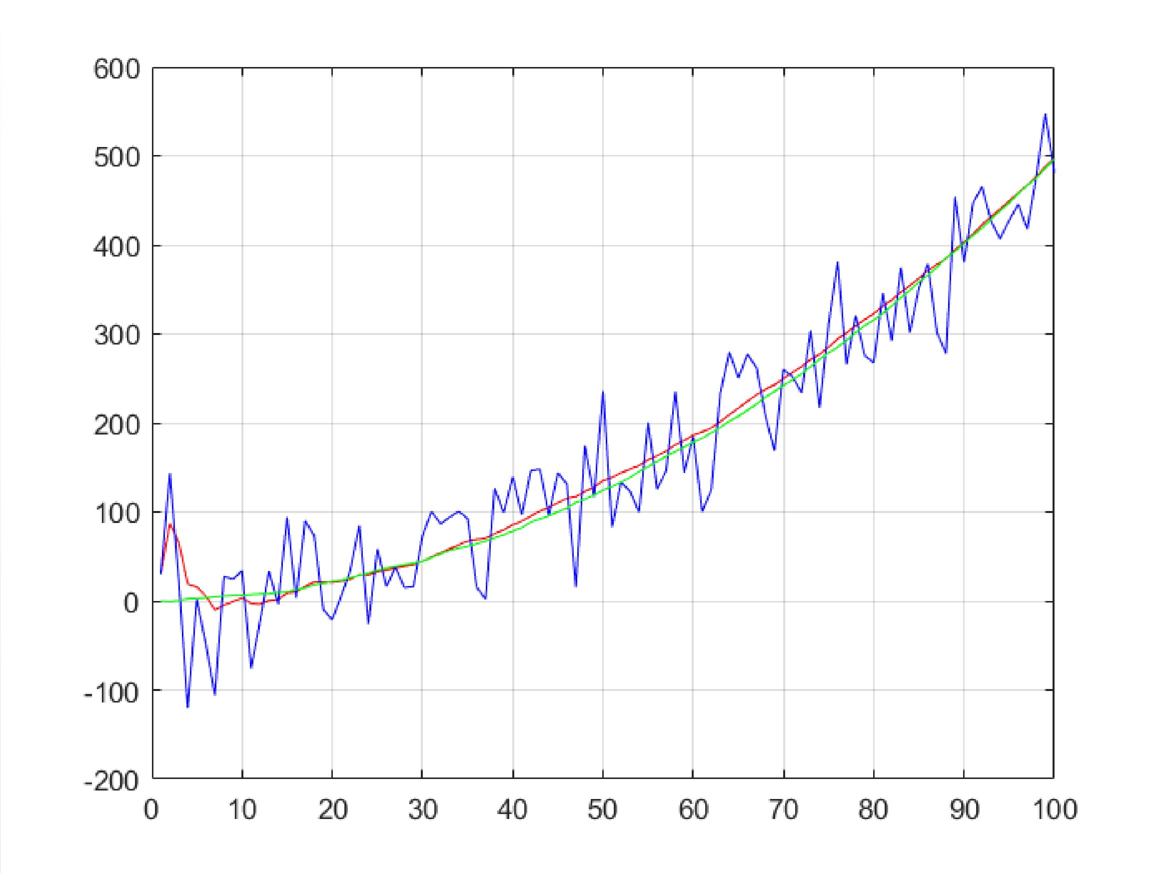


**Рис. 3**

Зеленым цветом изображена расчетная кривая, красным – результат фильтрации, синим – показания датчика.

**Задача 1**
**Постоянное вращение тела на струне**

Подвешенное на длинной струне тело вращается с постоянной угловой скоростью. Предполагается, что струна не обладает упругостью и не препятствует вращению.

При сделанных предположениях: $\phi$ –угол поворота, где $\dot{\phi} = const$ . Вектор состояния $x(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$

Модель движения (уравнение вращения)

$\dot{x}(t) = F(t)x(t) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$

Измеряемая величина – угловая скорость $\dot{\phi}$

Модель измерений

$$z_k = \dot{\phi}_k + \nu_k = H_k x_k + \nu_k = (0\ 1) \begin{pmatrix} \phi_k \\ \dot{\phi}_k \end{pmatrix} + \nu_k$$

$\nu_k$ — ошибка измерений

Решение уравнение вращения имеет вид:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_0 \\ \phi_0 - \dot{\phi}_0 t_0 \end{pmatrix}$$

Ковариационная матрица ошибки (КМО) оценки вектора состояния $P(t) = E\{[x(t) - \hat{x}(t)][x(t) - \hat{x}(t)]^T\}$

Для получения прогнозируемой оценки ковариационной матрицы:

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q \tag{13.5}$$

(13.5) — матричное ДУ Риккати.

Для получения прогнозируемой оценки КМО $P_k^-$ интегрируем с с НУ $P(0) = P_{k-1}^+$.

Запишем КМО $P(t)$ в виде: $P(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$.

Начальные условия для матричного уравнения Риккати (13.5) $(a(t_0)\ b(t_0)\ c(t_0))^T = (a_0\ b_0\ c_0)^T$

Решение уравнения Риккати:

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 t^2 + 2C_2 t + C_3 \\ C_1 t + C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ b_0 - c_0 t_0 \\ a_0 - 2b_0 t_0 - c_0 t_0^2 \end{pmatrix}$$

Коэффициент Калмана имеет вид: $K_k = \begin{pmatrix} \dfrac{b^-}{c^- + R} \\ \dfrac{c^-}{c^- + R} \end{pmatrix}$

где $R$ - дисперсия ошибки измерения, возможно $R = R(t)$ (см. адаптивный ФК).

Апостериорная оценка вектора состояния $\hat{x}_k^+$ и матрицы ковариации $P_k^+$ :

$$\hat{x}_k^+ = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^- + \dfrac{b^-(z_k - \hat{\dot{\phi}}^-)}{c^- + R} \\ \hat{\dot{\phi}}^- + \dfrac{c^-(z_k - \hat{\dot{\phi}}^-)}{c^- + R} \end{pmatrix} \qquad P_k^+ = \begin{pmatrix} a^- - \dfrac{(b^-)^2}{c^- + R} & \dfrac{b^-}{c^- + R} \\ \dfrac{b^-}{c^- + R} & \dfrac{c^-}{c^- + R} \end{pmatrix}$$

Формулы для программирования (измеряемая величина $z_k$ — скорость вращения).

$$\hat{\dot{\phi}}^+ = \hat{\dot{\phi}}^- + (1 - (0\ 1) \cdot K_k) + (0\ 1) \cdot K_k z_k \,.$$

$$\hat{\phi}^+ = (\hat{\dot{\phi}}^+ t + \varphi_0) + (1 - (1\ 0) \cdot K_k) + (1\ 0) \cdot K_k(z_k t + \varphi_0) \,.$$

$$P_k^+ = \begin{pmatrix} a^- - (b^-)K_k & (0\ 1)K_k \\ (0\ 1)K_k & (1\ 0)K_k \end{pmatrix}$$

**Задача 2. Крутильные колебания.**

Подвешенное на длинной струне тело совершает малые одномерные крутильные колебания. $l$ — длина струны , $R$ — радиус струны, $G$ — модуль сдвига, $f$ — модуль кручения, $I$ — момент инерции тела относительно оси вращения. $\phi$ — угол поворота.

При малом погонном угле закрутки механический момент $\alpha$ , действующий со стороны струны, пропорционален углу отклонения от положения равновесия: $M = \frac{\pi R^4 G}{2l}$ , $\alpha = \frac{2\pi k}{l}$ , $k$ - число оборотов струны.

Уравнение движения системы: $I\ddot{\varphi} = -f\varphi$ .

$\Omega = \sqrt{\frac{f}{l}}$.

Модель измерений $z_k = \dot{\phi}_k + \nu_k = H_k x_k + \nu_k = (0\ 1)\begin{pmatrix} \phi_k \\ \dot{\phi}_k \end{pmatrix} + \nu_k$

Вектор состояния: $x(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$

Динамическое уравнение:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}(t) \\ -\Omega^2\phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}.$$

Интегрируя последнее уравнение получим

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) = \begin{pmatrix} C_1 \cos(\Omega\ t) + C_2 \sin(\Omega\ t) \\ -C_1\Omega \sin(\Omega\ t) + C_2\Omega \cos(\Omega\ t) \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\phi}_0}{\Omega}\phi_0 \sin(\Omega\ t_0) + \phi_0 \cos(\Omega\ t_0) \\ frac\dot{\phi}_0\Omega \cos(\Omega\ t_0) + \phi_0 \sin(\Omega\ t_0) \end{pmatrix}$

Начальные условия для матричного уравнения Риккати (13.5) $(a(t_0)\ b(t_0)\ c(t_0))^T = (a_0\ b_0\ c_0)^T$

Решение уравнения Риккати (13.5):

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C_1}{\Omega} \sin(2\Omega t) - 2\frac{C_2}{\Omega} \cos(2\Omega t) + \frac{C_3}{2\Omega^2} \\ C_1 \cos(2\Omega t) + C_2 \sin(2\Omega t) \\ -C_1\Omega \sin(2\Omega t) + 2C_2\Omega \cos(2\Omega t) + \frac{C_3}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_0\Omega}{2} \sin(2\Omega t_0) + b_0 \cos(2\Omega t) - \frac{c_0}{2\Omega} \sin(2\Omega t_0) \\ -\frac{a_0\Omega}{2} \sin(2\Omega t_0) + b_0 \cos(2\Omega t) - \frac{c_0}{2\Omega} \sin(2\Omega t_0) \\ c_0 + \Omega^2 a_0 \end{pmatrix}$$

Коэффициент Калмана имеет вид: $K_k = \begin{pmatrix} \dfrac{b^-}{c^- + R} \\ \dfrac{c^-}{c^- + R} \end{pmatrix}$

где $R$ - дисперсия ошибки измерения, возможно $R = R(t)$ (см. адаптивный ФК).

Апостериорная оценка вектора состояния $\hat{x}_k^+$ матрицы ковариации $P_k^+$ имеют вид:

$$\hat{x}_k^+ = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^- + \dfrac{b^-(z_k - \hat{\dot{\phi}}^-)}{c^- + R} \\ \hat{\dot{\phi}}^- + \dfrac{c^-(z_k - \hat{\dot{\phi}}^-)}{c^- + R} \end{pmatrix} \qquad P_k^+ = \begin{pmatrix} a^- - (b^-)K_k & (0\ 1)K_k \\ (0\ 1)K_k & (1\ 0)K_k \end{pmatrix}$$

## Задача 1. ОТВЕТ

Постоянное вращение тела на струне

clc; clear all;

% время моделирования, шаг по времени, количество узлов

$T = 10\,;\ tau = 0.1\,;\ N = T/tau\,;$

% начальные условия $x1 == \varphi\,;\ x2 == dot(\varphi)$.

$x10 = pi/6\,;\ x2(1) = 0.2; t0 = 0\,;$

% параметры шумов

$sigma\_psi = 0.001\,;\ sigma\_eta = 0.05 * x2(1)\,;$

% модель измерений $z_k = dot(\varphi) + \nu_k => z2$

$z1 = zeros(100, 1)\,;\ z2 = zeros(100, 1)\,;$

$z2(1) = x2(1) + normrnd(0, sigma\_eta)\,;$

$z1(1) = z2(1) * t0 + x10\,;\ x1(1) = x10\,;$

$P1 = zeros(2, 2)\,;\ P2 = zeros(2, 2)\,;$

$r1 = zeros(2, 1)\,;\ r2 = zeros(2, 1)\,;$

$K1 = zeros(100, 1); K2 = zeros(100, 1)$ ; %коэффициент Калмана

$a = zeros(100, 1)\,;\ b = zeros(100, 1)\,;\ c = zeros(100, 1)\,;$

%решение уравнения вращения $\varphi = (d\varphi/dt) + \varphi_0$

$for\ t = 1 : (N-1)$

$x2(t+1) = x2(t) + normrnd(0, sigma\_psi)$ ;%Const rate

$x1(t+1) = x2(t) * t + x10 + normrnd(0, sigma\_psi)$ ;

$z2(t+1) = x2(t+1) + normrnd(0, sigma\_eta)$ ;

%определение угла поворота по наблюдаемой скорости

$z1(t+1) = z2(t+1) * t + x10$ ;

$end$

% начальные условия для матричного уравнения Риккати

$a0 = 1.0; b0 = 0; c0 = 1.108;$

$cc1 = c0; cc2 = b0 - c0 * t0; cc3 = a0 - 2 * b0 * t0 + c0 * t0\hat{}2;$

$a(1) = cc1 * t0\hat{}2 + 2 * cc2 * t0 + cc3;$

$b(1) = cc1 * t0 + cc2;$

$c(1) = cc1;$

$P1 = [a(1)b(1); b(1)c(1)]$ ;% ковариационная матрица ошибки

% прогнозируемая разность ошибки измерения

$r2 = [z1(1); z2(1)] - P1 * [x10; x2(1)]$ ; $R1 = sigma\_psi;$

$x2opt(1) = sigma\_eta$ ; $x1opt(1) = x2opt(1) * t0 + x10;$

$R0 = (r1' * r1)/N;$

$$for\ t = 1 : (N-1)$$
$$r1 = r2\,;\ \ R = R0\,;$$
% апостериорная оценка матрицы ковариации
$$P2 = [a(t) - b(t)^2/(c(t)+R),\ b(t)/(c(t)+R)\,;$$
$$b(t)/(c(t)+R),\ c(t)/(c(t)+R)];$$
% элементы ковариационной матрицы
$$R = (t/(t+1)) * R0 + (1/t) * (r1' * r1);$$
$$r2 = [z1(t+1); z2(t+1)] - P2 * [x1opt(t); x2opt(t)];$$
%коэффициент Калмана
$$K1(t+1) = b(t)/(c(t)+R);$$
$$K2(t+1) = c(t)/(c(t)+R);$$
% отфильтрованные данные
$$x2opt(t+1) = x2opt(t) * (1 - K2(t+1)) + K2(t+1) * z2(t)\,;$$
$$x1opt(t+1) = (x2opt(t+1)*t+x10)*(1-K1(t+1))+K1(t+1)*z1(t)\,;$$
% элементы ковариационной матрицы
$$a(t+1) = cc1 * (t+1)\hat{}2 + 2 * cc2 * (t+1) + cc3\,;$$
$$b(t+1) = cc1 * (t+1) + cc2\,;\ \ c(t+1) = cc1\,;$$
$$R0 = R;$$
$$end$$

$t = 0 : tau : ((N-1)*tau)\,;$
$figure(1)\,;\ plot(t, x1opt,'r', t, x1,'b--','LineWidth', 1)$
$xlabel('t, c')\,;\ ylabel('d\backslash phi/dt, рад/с')\,;$
$legend('filtrdata','theor.data')$

$figure(2)\,;$
$plot(t, x2opt,'r','LineWidth', 1)\,;\ hold\ on\,;$
$plot(t, z2,'b', t, x2,'g','LineWidth', 1)\,;\ hold\ on;$
$title('Оценкаскоростиизменения\backslash phi(t)')$
$xlabel('t, c')\,;\ ylabel('d\backslash phi/dt, рад/с')\,;$
$legend('filtrdata','meas.','theor.data')\,;$
$gridon$

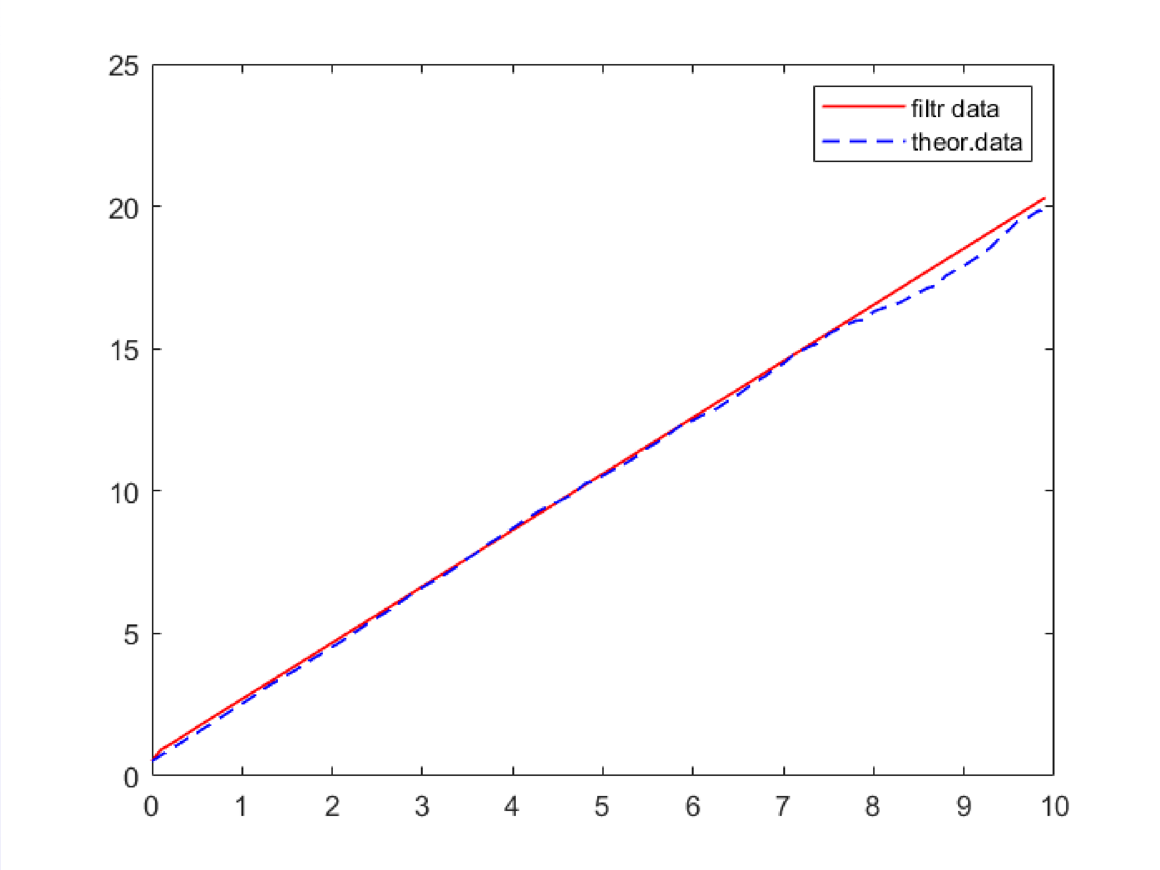


**Рис. 4**

Значения угла поворота (функция от значений угловой скорости). Синий — расчетная кривая, красный – результат фильтрации.

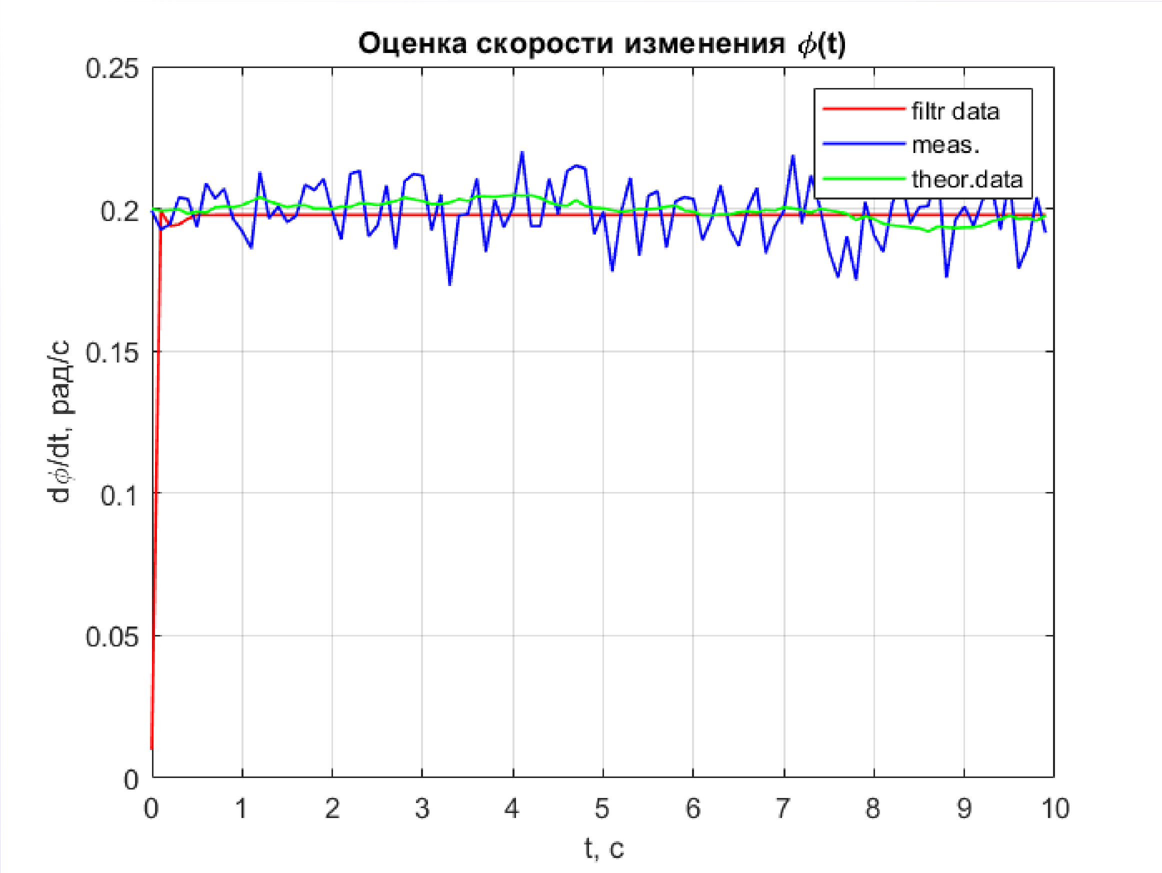


**Рис. 5.** Отфильтрованные значения угловой скорости

Зеленый — расчетная кривая, красный — результат фильтрации, зеленый — показания датчика.