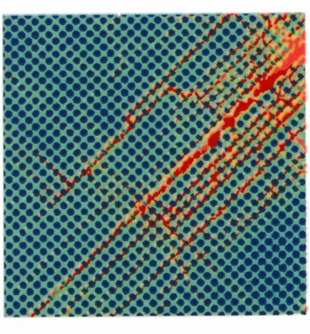
МИР

физики и техники

Г. ШАТЕНЬЕ, М. БОЭ, Д. БУИ,
Ж. ВАЙАН, Д. ВЕРКИНДЕР

Учебник по общей электротехнике



ТЕХНОСФЕРА

МИР физики и техники

Г. ШАТЕНЬЕ, М. БОЭ, Д. БУИ,
Ж. ВАЙАН, Д. ВЕРКИНДЕР

Учебник по общей электротехнике

Перевод с французского
к.т.н. В.Н. Грасевича

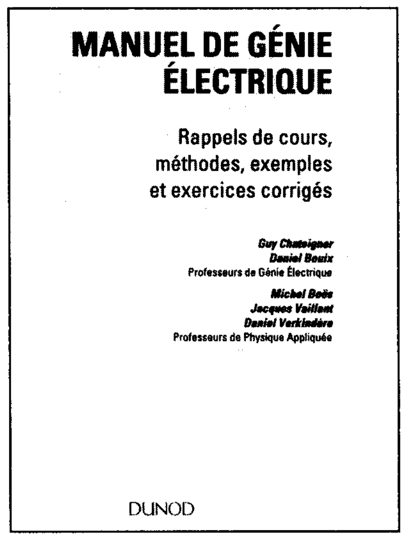
ТЕХНОСФЕРА
Москва
2009

Опубликовано при финансовой поддержке министерства культуры Франции (Национального центра книги)

Шатенье Г., Боэ М., Буи Д., Вайан Ж., Веркиндер Д.
Учебник по общей электротехнике
Москва:
Техносфера, 2009. – 624с. ISBN 978-5-94836-210-6

В учебнике приводятся основные понятия и методы общей электротехники, преподаваемые на первом курсе обучения в высшей школе Франции. Курс состоит из 5 больших частей: «Электричество и сигналы», «Электронные составляющие», «Электроника сигналов», «Силовая электроника», «Электрические машины». Использование множества прикладных примеров облегчает восприятие и позволяет самостоятельно проверить качество усвоения материала.

Учебник адресован студентам и преподавателям технических университетов, подготовительных курсов, бакалаврам, а также станет полезным справочником для инженеров-исследователей, специалистов в области электротехники, электроники, промышленной информатики.


MANUEL DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

Rappels de cours, méthodes, exemples et exercices corrigés

Guy Chateigner
Daniel Bouix
Professeurs de Génie Électrique

Michel Boës
Jacques Vaillant
Daniel Verkindère
Professeurs de Physique Appliquée

DUNOD

Published with the financial help of the Ministure de la Culture - Centre national du livre

ISBN 978-5-94836-210-6
ISBN 2-10-048499-0 (франц.)

Содержание

Часть III. Электронные устройства

Глава 30
Цифро-аналоговое и аналого-цифровое преобразования 426

Часть IV. Силовая электроника

Глава 31
Неуправляемое выпрямление ... 440

Глава 32
Управляемые выпрямители ... 455

Глава 41
Трехфазные асинхронные двигатели ... 592

Глава 42
Шаговые двигатели ... 599

Глава 43
Машины постоянного тока ... 607

Предисловие к изданию на русском языке

Практическая деятельность общества и человека происходит в рамках своеобразного треугольника: материя – информация – энергия. Среди многообразия форм существования материи доминирующие позиции сегодня, в силу неисчерпаемых возможностей, принадлежат электрической энергии. Нельзя не отметить возрастающую сложность современных устройств различной мощности – от микроватт до многих мегаватт. Обслуживание такой техники, а тем более ее создание, требует высокого уровня знаний электротехники, наличия, можно сказать, определенного уровня электротехнической культуры.

Система подготовки инженерно-технических кадров в высшей школе России предусматривает для студентов электротехнических специальностей трехсеместровое изучение курса «Теоретические основы электротехники» с последующим изучением соответствующих профилирующих дисциплин: «Электрические машины», «Электроснабжение промышленных предприятий», «Промышленная электроника» и т. д. в зависимости от специализации. Для студентов технических специальностей, тесно не связанных с электротехникой, дается курс «Общей электротехники», в котором, кроме основ предмета, изучаются также *прикладные вопросы*, выбор которых зависит от специализации, т. е. с акцентом на электронику, на электромеханику, на электроснабжение и т. п. Этим обусловлено издание многих учебников и учебных пособий по общей электротехнике с основами тех или иных прикладных дисциплин. Изучение этой дисциплины начинается обычно со второго курса.

В настоящее время в российской системе подготовки специалистов идет процесс формирования трехуровневой системы образования: бакалавр – инженер – магистр. Во многих западных странах, в том числе и во Франции, эта система существует уже десятилетия, накоплен большой опыт. В соответствии с ней разрабатываются методические материалы, учебные программы и планы, издаются учебники и пособия по практическому усвоению теоретического материала. Одной из таких разработок и является предлагаемый учебник по общей электротехнике коллектива французских авторов.

Следует отметить, что кроме общетеоретических материалов от азов электростатики до сложных вопросов анализа динамики электрических цепей в прикладной части учебника ярко представлена тема электроники во всем ее многообразии. Особенностью учебника является стремление авторов совместить формальную строгость изложения с прозрачностью толкования сложных вопросов. В учебнике много расчетов, сделанных на основе излагаемого теоретического материала. В свою очередь, теоретическая часть позволяет, после знакомства с основами фундаментальных выводов и правил, продолжить совершенствование знаний. Так, например, раздел, посвященный периодическим процессам, излагается в объеме, достаточном для практического использования. Интересные выводы завершаются формулой Бесселя – Парсеваля, которая может быть эффективно использована при изучении энергетических процессов в электротехнических устройствах. Далее авторы излагают физический смысл рассмотренных математических преобразований.

Разумеется, учебник не универсален. Его нельзя «в чистом виде» применять в учебном процессе «типового» учебного заведения. Но его содержание может факультативно использоваться в учебном процессе как студентами, так и преподавателями. Масштаб использования учебника, конечно, будет определяться учебной программой или преподавателем. Книга представляет практический интерес и как методический материал системы многоступенчатой подготовки специалистов, а также будет полезна для самостоятельной работы над материалом.

к. т. н. В. Н. Грасевич

Предисловие

Этот труд представляет собой единство справочных материалов и методов электротехники, излагаемых в 43-х главах, тематически разделенных на 5 частей:

– электричество и его переменные (физические явления, законы электричества, синусоидальные и периодические процессы, частотные и временные отклики и т. д.);
– электронные компоненты (от сопротивлений до операционных усилителей, индуктивно связанные катушки, тиристоры и фотоэлементы, их модели и предельные свойства, тепловое рассеяние);
– электронные устройства (фильтры, усилители, аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи и т. д.);
– силовая электроника (выпрямители, преобразователи постоянного тока, импульсные источники питания, плавные регуляторы, инверторы);
– электрические машины (трансформаторы, двигатели: синхронные, асинхронные, шаговые, постоянного тока).

Многочисленные примеры приводятся в форме вопросов-ответов.

Учебник предназначен для студентов, в том числе после получения степени бакалавра. Он обеспечивает связь знаний среднего и высшего образований. Возможными являются многие уровни изучения. Многие формулировки воспринимаются к окончанию среднего и к началу первого цикла специального образования; прочие — в последующем.

Этот труд адресован:

– студентам институтов технических университетов, бакалаврам, учащимся подготовительных курсов, школ инженеров, а также специализирующимся по электротехнике, электронике, промышленной информатике;
– вольным слушателям, для которых самостоятельное образование является необходимостью;
– действующим профессионалам-исследователям моделей и методов.

Авторы

Величины. Единицы. Наименования в СИ

Величина		Единица	
Обозначение	**Название**	**Обозначение**	**Наименование**
a	Ускорение	$м/с^2$	Метр на секунду в квадрате
B	Магнитная индукция	Тл	Тесла
C	Электрическая емкость	Ф	Фарада
C_{Th}, C_θ	Термическая емкость	Дж/К	Джоуль на кельвин
E	Напряженность электрического поля	В/м	Вольт на метр
f	Частота	Гц	Герц
F	Сила	Н	Ньютон
$F_м$	Магнитодвижущая сила	А	Ампер
ε	Диэлектрическая проницаемость	Ф/м	Фарада на метр
G	Электрическая проводимость	См	Сименс
H	Напряженность магнитного поля	А/м	Ампер на метр
i, I	Электрический ток	А	Ампер
ℓ, L	Длина	м	Метр
L	Собственная индуктивность	Гн	Генри
m	Масса	кг	Килограмм
μ	Магнитная проницаемость	Гн/м	Генри на метр
M	Момент силы	Нм	Ньютонметр
M	Взаимная индуктивность	Гн	Генри
p, P	Мощность, тепловой поток	Вт	Ватт
q, Q	Количество электричества, электрический заряд	Кл	Кулон
Q	Реактивная мощность	вар	Вольт-ампер реактивный
r, R	Сопротивление электрическое	Ом	Ом
R_{Th}, R_θ	Сопротивление термическое	К/Вт	Кельвин на ватт
S	Кажущаяся мощность	ВА	Вольт-ампер
t	Время	с	Секунда

T, θ	Температура	K, °C	Кельвин, градус Цельсия
u, U	Разность потенциалов, напряжение	В	Вольт
v, V	Электрический потенциал	В	Вольт
v	Скорость	м/с	Метр в секунду
w, W	Энергия, работа, количество теплоты	Дж	Джоуль
α	Угловое ускорение	рад/с	Радиан в секунду
φ, Φ	Поток магнитной индукции	Вб	Вебер
λ	Длина волны	м	Метр
ω	Угловая скорость	рад/с	Радиан в секунду

Приставки к наименованиям единиц в системе СИ

Приставка		**Множитель**	**Приставка**		**Множитель**
Символ	**Название**		**Символ**	**Название**	
Э	экса	10^{18}	д	деци	10^{-1}
П	пента	10^{15}	с	санти	10^{-2}
Т	тера	10^{12}	м	мили	10^{-3}
Г	гига	10^{9}	мк	микро	10^{-6}
М	мега	10^{6}	н	нано	10^{-9}
к	кило	10^{3}	п	пико	10^{-12}
г	гекто	10^{2}	ф	фемто	10^{-15}
да	дека	10	а	атто	10^{-18}

Децибелы. Отношение двух величин можно выразить либо простым частным, либо логарифмом этого частного. Чаще всего используют десятичный логарифм, обозначаемый как $\log_{10}$ или проще log.

Отношение мощностей, выраженное в белах[1] (Б), определяется как:

$$\log \frac{p_2}{p_1}.$$

Отношение мощностей, выраженное в децибелах (дБ), определяется как:

$$10 \log \frac{p_2}{p_1},$$

где 1 Б = 10 дБ.

[1]Graham Bell (1847–1922).

Полагая, что p_2 и p_1 являются мощностями рассеяния в двух сопротивлениях, равных R_0, получим:

$$p_1 = \frac{u_1^2}{R_0} = R_0 i_1^2 \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{u_2^2}{R_0} = R_0 i_2^2,$$

откуда следует:

$$10 \log \frac{p_2}{p_1} = 20 \log \frac{u_2}{u_1} = 20 \log \frac{i_2}{i_1}.$$

Следовательно, обобщая, получим отношение напряжений u_2 к u_1 и отношение токов i_2 к i_1, выраженные в децибелах, в виде:

$$20 \log \frac{u_2}{u_1} \quad \text{и} \quad 20 \log \frac{i_2}{i_1}.$$

Предшествующие определения дают относительные уровни p_2 по отношению к p_1, u_2 по отношению к u_1, i_2 по отношению к i_1. Для получения абсолютных уровней следует условно зафиксировать эталонное значение.

Для эталонной мощности 1 Вт мощность $p = p(t)$, выраженная в децибелах по отношению к 1 Вт (дБ Вт), определится как

$$p_{(\text{дБ Вт})} = 10 \log \frac{p_{(\text{Вт})}}{1_{(\text{Вт})}} = 10 \log p_{(\text{Вт})}.$$

Для эталонной мощности 1 Вт мощность $p = p(t)$, выраженная в децибелах по отношению к 1 Вт (дБ Вт), определится как

$$p_{(\text{дБмВт})} = 10 \log \frac{p_{(\text{Вт})}}{10^{-3}_{(\text{Вт})}} = 10 \log \frac{p_{(\text{мВт})}}{1_{(\text{мВт})}} = 10 \log p_{(\text{мВт})}.$$

Для эталонного напряжения 1 В напряжение $u = u(t)$, выраженное в децибелах по отношению к 1 В (дБ В), определится выражением:

$$u_{(\text{дБ В})} = 200 \log \frac{u_{(\text{В})}}{1_{(\text{В})}} = 20 \log u_{(\text{В})}.$$

Соотношение между (дБ мВт) и (дБ В). Пусть u — напряжение на зажимах сопротивления R_0, рассеиваемая мощность составит $p = u^2/R_0$, откуда

$$p_{(\text{дБ мВт})} = u_{(\text{дБ В})} - 10 \log \frac{R_0}{1000} \quad \Rightarrow \quad P_{\text{ср (дБ мВт)}} = U_{\text{д (дБ В)}} - 10 \log \frac{R_0}{1000},$$

где $P_{\text{ср (дБ мВт)}}$ — средняя мощность в децибелах по отношению к 1 мВт; $U_{\text{д (дБ В)}}$ — действующее значение напряжения в децибелах по отношению к 1 В.

$$\begin{array}{lll} \text{Для } R_0 = 600 \text{ Ом} & \Rightarrow & p_{(\text{дБ мВт})} \approx u_{(\text{дБ В})} + 2{,}22; \\ \phantom{\text{Для }} R_0 = 50 \text{ Ом} & \Rightarrow & p_{(\text{дБ мВт})} \approx u_{(\text{дБ В})} + 13{,}01. \end{array}$$

Для напряжения, отличного от $\sqrt{0{,}6}$ В $\approx 0{,}775$ В, напряжение $\mathrm{u} = \mathrm{u(t)}$, выраженное по отношению к нему в децибелах, составит:

$$\mathrm{u}_{(\text{дБ u})} = 20 \log \frac{\mathrm{u}_{(\mathrm{B})}}{\sqrt{0{,}6}_{(\mathrm{B})}} \approx 20 \log \frac{\mathrm{u}_{(\mathrm{B})}}{0{,}775_{(\mathrm{B})}}.$$

Примечание. В телефонии полное эталонное сопротивление исторически было определено в Европе как чистое сопротивление в 600 Ом (в США 900 Ом), которое грубо соответствует среднему полному сопротивлению абонентской линии в частотной полосе пропускания от 300 до 3400 Гц. Тогда для эталонной мощности 1 мВт получим значение действующего эталонного напряжения $\sqrt{0{,}6} \approx 0{,}775_{\mathrm{B}}$, откуда следует определение децибел напряжения.

Соотношение между (дБ мВт) и (дБ u). Пусть u — напряжение на зажимах сопротивления R, мощность рассеяния составляет $\mathrm{p} = \mathrm{u}^2/\mathrm{R}$, откуда

$$\mathrm{p}_{(\text{дБ мВт})} = \mathrm{u}_{(\text{дБ u})} - 10 \log \frac{\mathrm{R}}{600} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}_{\text{ср (дБ мВт)}} = \mathrm{U}_{\text{д}} - 10 \log \frac{\mathrm{R}}{600}.$$

$$\begin{array}{llll} \text{Для} & \mathrm{R}_0 = 600\ \text{Ом} & \Rightarrow & \mathrm{p}_{(\text{дБ мВт})} = \mathrm{u}_{(\text{дБ u})}; \\ & \mathrm{R}_0 = 150\ \text{Ом} & \Rightarrow & \mathrm{p}_{(\text{дБ мВт})} \approx \mathrm{u}_{(\text{дБ u})} + 6{,}02. \end{array}$$

Соотношение между (дБ u) и (дБ В):

$$\mathrm{u}_{(\text{дБ u})} \approx \mathrm{u}_{(\text{дБ В})} + 2{,}22.$$

ЧАСТЬ I

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ЕГО ПЕРЕМЕННЫЕ

ГЛАВА I

ЧТО ТАКОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВО?

1.1. Частицы. Электрические заряды и носители зарядов

(Развитие темы см. гл. 3. Электростатика)

1.1.1. Частицы и электрические заряды

После открытия электрона стало очевидным существование многих частиц: протонов и нейтронов, составляющих атомное ядро; фотонов, составляющих свечение всего исходящего при расщеплении атомного ядра: нейтрино, мюонов, каонов, глюонов и т. д. (их около сотни).

Таблица 1.1. Частицы и заряды

Частицы	**Массы**	**Электрические заряды, Кл**	**Примечания**
Электрон ⊖	$m_e \approx$ $\approx 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ кг	$q_e = -e \approx$ $\approx -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл	Масса очень мала. Электрический заряд отрицательный.
Протон ⊕	$m_п \approx$ $\approx 1{,}6726 \cdot 10^{-31}$ кг	$q_п = +e \approx$ $\approx +1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл	Масса в 1836,15 раз больше массы электрона. Электрический заряд положительный.
Нейтрон ○	$m_н \approx$ $\approx 1{,}6749 \cdot 10^{-31}$ кг	Электрического заряда нет	Он обеспечивает устойчивость атомных ядер; имеется во всех ядрах, кроме водорода. Масса в 1838,68 раз больше массы электрона.
Фотон	Массы нет	Электрического заряда нет	Частица света. Перемещается в вакууме со скоростью $c \approx 299\,792$ км/час.

1.1.2. Электростатические силы. Закон Кулона

• ***Притяжение и отталкивание двух электрических зарядов*** (рис. 1.1).

1. Два заряда одинакового знака отталкиваются.
2. Два заряда противоположных знаков притягиваются.

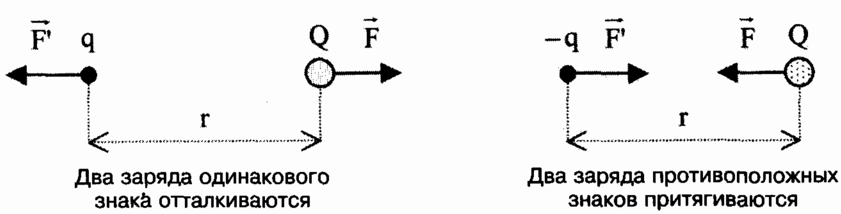


Рис. 1.1. Притяжение и отталкивание двух электрических зарядов

• ***Модуль сил притяжения и отталкивания.*** Выраженный в ньютонах (Н) он определяется *законом Кулона*:

$$F = F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qQ}{r^2} \text{ с единицами измерения } Н = \frac{1}{Ф/м}\frac{Кл^2}{м^2} = \frac{Кл^2}{Ф \cdot м},$$

где ε — абсолютная проницаемость среды. В вакууме (и в почти сухом воздухе)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \approx 8{,}8541878 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

Примечание. Теория распространения электромагнитных волн показывает, что константы ε_0 (*электрическая проницаемость* вакуума), μ_0 (*магнитная проницаемость* вакуума) и c (*скорость света* в вакууме) связаны соотношением $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$. С тех пор как скорость света в вакууме стала эталоном, электрическая проницаемость вакуума стала константой, точно определяемой как

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2},$$

где $c = 299\,792\,458$ м/с и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А^2 (или Гн/м).

1.1.3. Электрическое поле

Сила $\vec{F}$, действующая на заряд Q, является следствием действия заряда q на расстоянии. Такая интерпретация приводит к новой записи *закона Кулона*:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \text{ с единицами измерения } Н = Кл\frac{В}{м},$$

где *напряженность* E вектора электрического поля $\vec{E}$ определяется как

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2} \text{ с единицами измерения } В/м = \frac{1}{Ф/м}\frac{Кл}{м^2} = \frac{Кл}{Ф \cdot м}.$$

Заряд Q позволяет определить наличие электрического поля (рис. 1.2).

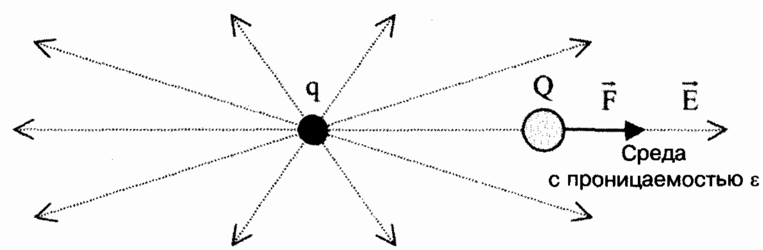


Рис. 1.2. Электрическое поле заряда q

1.2. Явление проводимости. Электрический ток

1.2.1. Электрический ток

• ***Электрический ток.*** Электрические заряды под воздействием электрического поля испытывают действие электростатических сил, они перемещаются. Поток зарядов через поверхность S называется *электрическим током*. Его обозначают как i, единица измерения — ампер (А).

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ с единицами измерения } А = \frac{Кл}{м}.$$

Примечание. Если поток зарядов постоянен, имеем $I = \Delta Q/\Delta t$.

• ***Плотность тока.*** Эта фундаментальная величина определяет значение тока через единицу поверхности:

$$J = \frac{I}{s} \text{ с единицами измерения А/м}^2.$$

Вопрос. Зная, что голый медный проводник выдерживает плотность тока около $J = 5$ А/мм^2, выбрать минимальное сечение проводника $S_{мин}$, необходимое для питания электроплиты, потребляющей номинальный ток $I_{ном} = 30$ А.
Ответ. $S_{мин} = I_{ном}/J = 6$ мм^2.

• ***Скорость зарядов. Закон Ома.*** В вакууме под действием электростатических сил заряды достигают обычно скоростей порядка нескольких тысяч м/с (катодные трубки).

Из-за трудностей проложить себе путь между атомами или молекулами в материи носители зарядов, подверженные тепловым колебаниям, быстро достигают очень маленькой предельной скорости в несколько мм/с (в меди). Закон Ома объясняет наличие такой скорости, используя вектор плотности тока $\vec{j}$.

В микроскопической форме ($\vec{j}$ — вектор плотности тока; σ — проводимость материала):

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \text{ с единицами измерения А/м}^2 = (\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1})(\text{В/м}).$$

В макроскопической форме (I — ток, U — напряжение на зажимах проводника, ℓ — его длина, S — его сечение, ρ — удельное сопротивление материала):

$$I = SJ = S\sigma E = S\sigma\frac{U}{\ell} = \frac{S\sigma}{\ell}U = \frac{U}{R}.$$

Тогда закон Ома запишется в виде:

$$U = RI$$

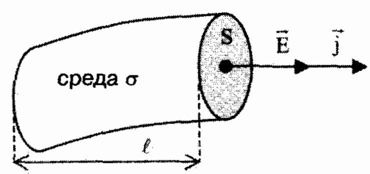


Рис. 1.3. Электрическая проводимость

$$\text{с единицами измерения В} = \text{Ом} \cdot \text{А при } R = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S} = \rho\frac{\ell}{S}.$$

Примечание. Чтобы существовал ток I, среда должна обладать свободными зарядами (проводимость σ), подверженными воздействию со стороны поля $\vec{E}$ (рис. 1.3).

1.2.2. Свободные и связанные заряды

Атомы (рис. 1.4) представляют собой ядро, окруженное электронным облаком.

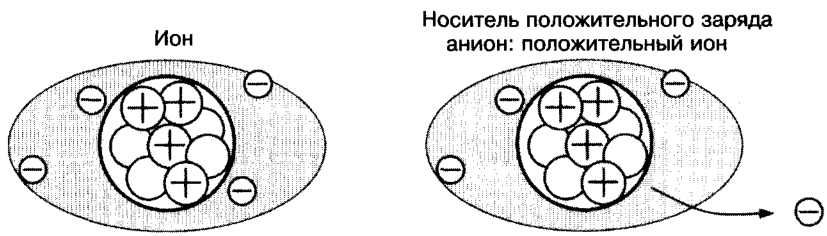


Рис. 1.4. Атом-ион

Чтобы получить электрический заряд, нужно от атома отделить один или несколько электронов. Это может быть реализовано несколькими способами:

1. Посредством внешней энергии.

   – Механически — трением, например, воздуха о кузов автомобиля.
   – Электрически — сильное электрическое поле может извлечь электрон из атома (диод Зенера).
   – Термически — тепловое движение атомов и молекул в газе может вызвать их ионизацию (плазма).

2. Сближением атомов (кристаллы, поликристаллы). Хотя кристаллические решетки обязаны силой своего сцепления объединению их электронов, они не всегда являются проводниками. Различают проводники, полупроводники и изоляторы.

1.2.3. Электрические среды

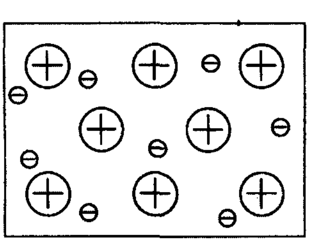


Рис. 1.5. Проводники. Поток свободных электронов в фиксированной ионной решетке

• ***Проводники.*** Большое количество электронов свободно для перемещения внутри металла (рис. 1.5).

Проводимость металла очень велика. Эта проводимость выражается в функции подвижности μ носителей и их концентрации n.

$$\sigma = \mathrm{n}e\mu$$

с единицами измерения

$$\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1} = \frac{1}{\text{м}^3}\text{Кл}\frac{\text{м}^2}{\text{Вс}} = \frac{1}{\text{м}}\frac{\text{Кл}}{\text{Вс}} = \frac{1}{\text{м}}\frac{\text{А}}{\text{В}}.$$

Пример 1.2.1. Проводимость меди составляет $\sigma \approx 59 \cdot 10^6$ Ом$^{-1}$м$^{-1}$.

• ***Полупроводники.*** Это монокристаллы высокой чистоты, в которых только некоторые атомы освобождают один электрон при температуре окружающей среды (T $\approx$ 300 K). Обычно один электрон более чем на 100 миллионов атомов (рис. 1.6). Атомы полупроводниковых кристаллов принадлежат IV колонке периодической таблицы элементов.

Проводимость обеспечивается электронами (отрицательные носители) и положительными ионами одновременно. Ионы при этом как бы перемещаются, поскольку вследствие постоянного теплового движения электроны покидают атом, образуя ион и т. д. Эти положительные ионы называются *дырками* (положительные носители). Проводимость полупроводников представляет собой сумму двух проводимостей:

– Проводимость положительными носителями (слабая) $\sigma_п$: дырки перемещаются труднее, чем электроны.
– Электронная проводимость (более сильная) σ_e.

По большому счету проводимость намного слабее, чем у металлов, так как носителей зарядов меньше (число положительных зарядов такое же, как и отрицательных).

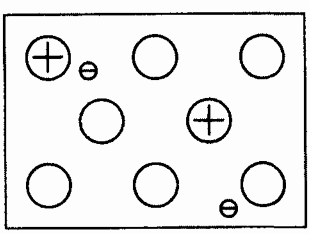


Рис. 1.6. Полупроводник. Свободный электронный и ионный поток в фиксированной атомной решетке

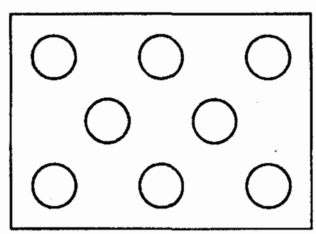


Рис. 1.7. Диэлектрики. Свободный электронов в атомной решетке нет

Вопрос. Для чистого кремния при температуре окружающей среды (T $\approx$ $\approx$ 300 K) имеем: $\mu_e \approx 0{,}12$ м^2/Вс, $\mu_п \approx 0{,}05$ м^2/Вс, $n_п = n_e = n_i \approx 1{,}5$ носителей/м^3. Рассчитать проводимость.
Ответ. $\sigma = \sigma_e + \sigma_п = n_e e \mu_e + n_п e \mu_п \approx 4{,}08 \cdot 10^{-4}$ Ом$^{-1}$м$^{-1}$.

• ***Диэлектрики.*** В них нет свободных электронов (рис. 1.7) при температуре окружающей среды (T $\approx$ 300 K). Проводимость практически нулевая.

1.2.4. Влияние температуры

• ***Проводники.*** Повышение теплового движения с ростом температуры затрудняет движение электрических зарядов. Поэтому с ростом температуры проводимость проводников уменьшается и определяется как

$$\sigma = \sigma_0(1 + \alpha\theta),$$

где σ_0 — проводимость при 0 °C; θ — температура в °C; α — отрицательный температурный коэффициент в $°C^{-1}$.

• ***Полупроводники.*** Напротив, в полупроводниковых материалах при температуре окружающей среды тепловое движение имеет иное последствие. Оно создает новые свободные заряды (пары электрон-дырка). Поэтому при средней температуре проявляется свойство, обратное свойству проводников: проводимость повышается экспоненциально с ростом температуры.

– У германия проводимость удваивается примерно каждые 10 °C.

– У кремния проводимость удваивается примерно каждые 6 °C.

Такое повышение проводимости происходит экспоненциально и преобразует эти полупроводники в проводники приблизительно при 120 °C для германия и 200 °C для кремния. Диоды, транзисторы и интегральные схемы при этих температурах теряют свои специфические свойства.

1.2.5. Частотные свойства. Поверхностный эффект в проводнике

При переменном токе электромагнитные явления вытесняют заряды с центра проводника. Это называется *поверхностным эффектом.* Ток в проводнике становится неоднородным. На периферии он больше, чем в центре (рис. 1.8).

Глубина проникновения тока определяется как

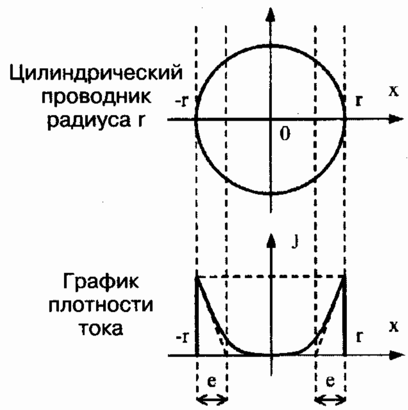
$$e = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0\mu_r f\sigma}},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость вакуума; μ_r — относительная магнитная проницаемость материала (безразмерная); σ, $Ом^{-1} \cdot м^{-1}$ — проводимость материала; f, Гц — частота.

Вопрос. Рассчитать глубину проникновения тока в медном проводнике: ($\sigma \approx 59 \cdot 10^6$ $Ом^{-1}м^{-1}$ и $\mu_r \approx 1$) при 50 Гц.

Ответ. По формуле $e \approx 9{,}2$ мм. Для ограничения этого эффекта используют многопроволочные проводники, для передачи энергии используют многокабельные линии. Кабели высокой надежности также многопроволочные.

Рис. 1.8. Поверхностный эффект в проводнике

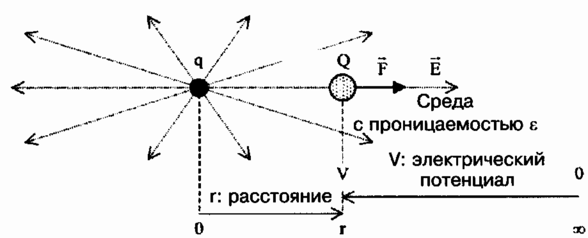


Примечание. С ростом частоты глубина проникновения уменьшается.

1.3. Электрический потенциал заряда

(Развитие темы см. гл. 3)

Рис. 1.9. Электрический потенциал



1.3.1. Цель

Рассматриваемый заряд q (рис. 1.9) создает электрическое поле, вектор напряженности которого $\vec{E}$. Для упрощения он заменяется скалярной величиной, связанной с работой, которую следует выполнить для переноса пробного заряда Q из бесконечности на расстояние r от рассматриваемого заряда q. Эта величина называется *электрическим потенциалом* и обозначается V.

Примечание. Соответственно определению потенциал на бесконечном расстоянии равен нулю: $V(\infty) = 0$.

1.3.2. Работа при переносе заряда Q на расстояние r от заряда q

Элементарная работа dW при переносе заряда Q из расстояния r в (r − dr). При этом предполагается постоянство силы.

$$dW = -F dr = -QE dr \text{ с единицами измерения Дж} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Кл}\frac{\text{В}}{\text{м}}\text{м}.$$

Работа $W_{A \to B}$ при переносе заряда Q из точки A в точку B. Интегрируя в пределах от A до B, получим:

$$W_{A \to B} = -\int_A^B E(r) dr \text{ с единицами измерения Дж} = \text{Кл}\frac{\text{В}}{\text{м}}\text{м}.$$

Полагая $dV = -E(r)dr$, интеграл запишется в виде:

$$W_{A \to B} = Q\int_A^B dV = Q(V_B - V_A) \text{ с единицами измерения Дж} = \text{Кл} \cdot \text{В}.$$

Работа $W_{\infty \to M}$ при переносе заряда Q из бесконечности на расстояние M.

$$W_{\infty \to M} = Q\int_\infty^M dV = Q(V_M - V_\infty) = QV_M$$

с единицами измерения Дж = Кл · В.

1.3.3. Электрический потенциал

Из предыдущих результатов следует:

$$V_M = \frac{W_{\infty \to M}}{Q} \text{ с единицами измерения В} = \text{Дж/Кл}.$$

Функция $V_M(r)$ определяет работу при переносе единицы заряда из бесконечности в точку M (рис. 1.10). Величину V_M называют *электрическим потенциалом* точки M, созданным рассматриваемым зарядом q.

Примечания.

- Как только заряд освободится от приложенного к нему возмущения, он, естественно, вернется в бесконечность, затратив накопленную энергию. Его потенциал снизится до нуля.
- Электрический потенциал $V_M(r)$ является величиной, отражающей значение потенциальной энергии, накопленной зарядом Q, когда он располагается на расстоянии r от заряда q. Она не зависит от заряда Q! Это фундаментальное энергетическое понятие.

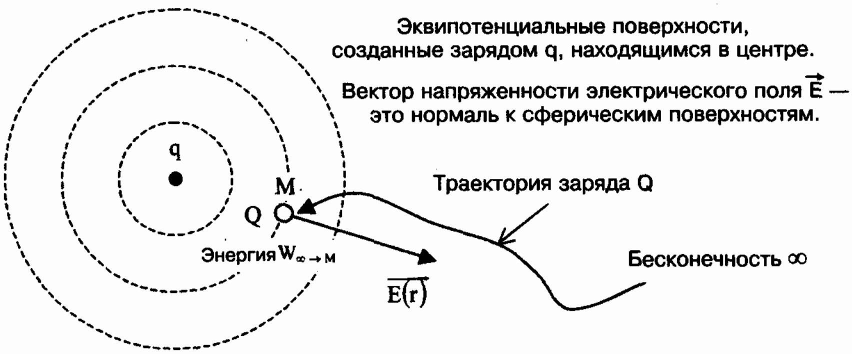


Рис. 1.10. Работа электрической силы

1.3.4. Разность электрических потенциалов. Электрическое напряжение

Протекание тока в цепи может быть только путем энергетического обмена с внешней средой (рис. 1.11). Таким образом, носители зарядов способны передать энергию $Q(V_B - V_A)$ во внешнюю среду. *Напряжение* определяется разностью потенциалов $U_{BA} = V_B - V_A$.

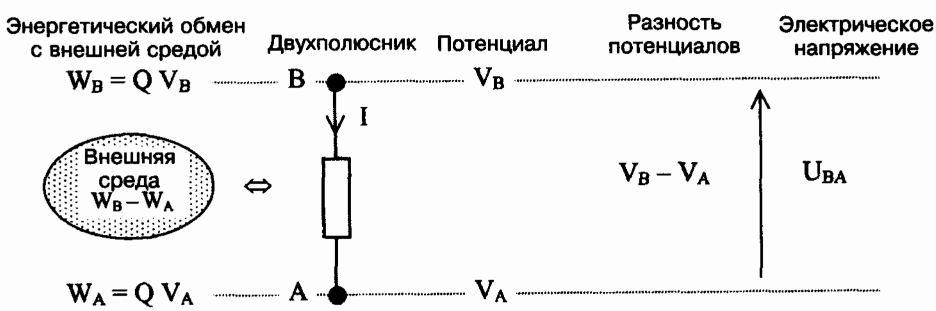


Рис. 1.11. Потенциал — разность потенциалов — напряжение

Примечание. Следует понимать, что при прохождении в электрической цепи носители заряда изменяют свой потенциал (энергию), обычно уменьшая.

ГЛАВА 2

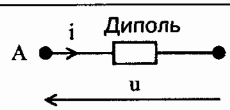
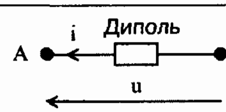
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

2.1. Двухполюсники

2.1.1. Определение. Условности

Двухполюсник — это приемник или источник электрической энергии, способный преобразовать электрическую энергию в энергию различной природы (химическую, механическую, термическую ...) в режиме потребителя и обратно — в режиме источника. С внешней средой он связан зажимами A и B (табл. 2.1). Ток, входя через один из них, выходит через другой. Напряжение u и ток i — величины алгебраические.

Таблица 2.1. Условные приемник и генератор

Условный приемник	Условный генератор
	
Мощность (потребляемая, преобразуемая) положительна: $ui > 0$	Мощность (генерируемая, выработанная) положительна: $ui > 0$

2.1.2. Линейный двухполюсник. Линейная цепь

• ***Линейный двухполюсник.*** Двухполюсник, в котором $u = f(i)$, где $i = g(u)$, называется линейным, если, и только если, функция f или g линейна, т. е. такова, что

$$f(\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2) = \alpha_1 f(i_1) + \alpha_2 f(i_2) \quad \text{или} \quad g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2).$$

• ***Линейная цепь.*** Если все двухполюсники, составляющие электрическую цепь, линейны, то уравнение, позволяющее рассчитать выходную величину $s = s(t)$ в функции входной $e = e(t)$, в общем случае является дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами типа:

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + b_1 \frac{dse}{dt} + b_0 e \quad (m \leqslant n).$$

Тогда цепь считается линейной.

Пример 2.1.1. Мощность $p = Ri^2$ не линейна, так как наличие квадратной функции является нелинейностью, ее производная dp/dt не является независимой от i.

2.1.3. Элементарные двухполюсники

а) Классификация двухполюсников

Активный двухполюсник — это двухполюсник, способный генерировать энергию. И напротив, *пассивный* двухполюсник не способен генерировать энергию.

Двухполюсник *симметричен*, когда

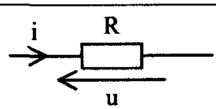
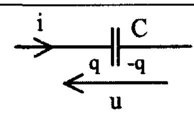
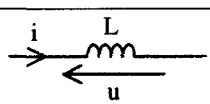
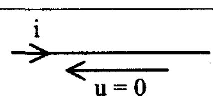
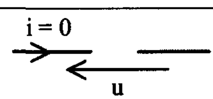
$$f(i) = -f(-i) \quad \text{или} \quad g(u) = -g(-u).$$

Линейный двухполюсник: см. § 2.1.2.

б) Пассивные двухполюсники

Пассивные линейные элементы (табл. 2.2). Обычно принимается соглашение приемника (направления u и i встречные), что исключает ошибки.

Таблица 2.2. Пассивные линейные двухполюсники в режиме потребителя

Элемент	Обозначение на схемах	Символ и размерность	Закон	Единицы измерения
Сопротивление (резистор)		R — сопротивление в омах (Ом)	$u = iR$	В = Ом · А
Конденсатор		C — емкость в фарадах (Ф)	$i = C\frac{du}{dt}$	$А = Ф\frac{В}{с}$
Катушка индуктивности		L — индуктивность в генри (Гн)	$u = L\frac{di}{dt}$	$В = Гн\frac{А}{с}$
Короткое замыкание			$\forall i,\ u = 0$	
Разрыв цепи			$\forall u,\ i = 0$	

Примечания.

– Согласно закону прохождение тока i в конденсаторе в течение времени dt вызывает изменение электрического напряжения, направленного встречно. Этот закон записывается в интегральной форме как

$$u = \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} i d\tau = \frac{1}{C}\int\limits_{0}^{t} i d\tau + U_0, \quad \text{где} \quad U_0 = u \qquad (t = 0).$$

– Согласно закону изменение тока i в линейной катушке индуктивности не происходит скачком. Изменение тока сопровождается появлением встречно направленного ему напряжения, препятствующего изменению тока. Это закон Ленца, который записывается в интегральной форме как

$$i = \frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{t} u d\tau = \frac{1}{L}\int\limits_{0}^{t} u d\tau + I_0, \quad \text{где} \quad I_0 = i \qquad (t = 0).$$

– Энергетический аспект (см. гл. 12 и гл. 13).

• ***Пассивные нелинейные элементы.***

Пример 2.1.2. Зависящее от напряжения сопротивление не является линейным двухполюсником. Описывающее его уравнение $i = ku^n$ не является линейной функцией напряжения u, а его производная di/du зависит от напряжения u.

Диод (см. гл. 16) не является линейным двухполюсником. Описывающее его уравнение

$$i_D = I_S \left(e^{\frac{u_D}{NU_T}} - 1\right)$$

не является линейной функцией напряжения u_D.

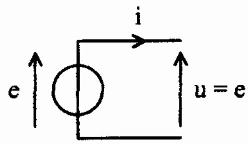
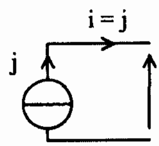
в) Активные двухполюсники

• ***Источники*** (табл. 2.3). Договоренность о режиме генератора или потребителя принимается в зависимости от рассматриваемой задачи.

Примечание. Условные обозначения (табл. 2.3), используемые в эквивалентных схемах, всегда соответствуют «идеальным», а не «реальным» источникам. Часто реальный источник может быть смоделирован идеальным источником напряжения с последовательно включенным резистором. Это модель Тевенена. Его можно также смоделировать идеальным источником тока с параллельно включенным резистором. Это модель Нортона (см. § 2.2.4).

Пример 2.1.3. Автомобильная батарея является типичным примером «почти идеального» источника напряжения. Ее накапливаемый заряд измеряется обычно в ампер-часах (А · час). Таким образом, батарея на 12 В, способная накопить заряд в 60 А·час, может выдавать ток 10 А в течение 6 часов при напряжении 12 В.

Таблица 2.3. Источники

	Обозначение	**Символ и размерность**	**Закон**
Источник напряжения		e — электродвижущая сила (ЭДС) u — напряжение в вольтах (В)	$\forall i,\ u = e$
Источник тока		j — ток в амперах (A)	$\forall u,\ i = j$

Вопрос. Рассчитать энергию, поставляемую батареей в предыдущем примере.

Ответ. $W = UIt = 12 \cdot 60 \cdot 3600 = 2592$ кДж.

Примечание. Практически «идеальных» источников тока не существует. Действительно, это предполагало бы, что можно накапливать энергию в форме тока постоянного значения j. Однако источник неизменного тока можно реализовать соединением источников энергии и двухполюсников. Это транзистор, соединенный с источником напряжения, или фотодиод, освещенный источником световой энергии.

• ***Управляемый и неуправляемый источник.*** *Управляемый*, или *зависимый, источник* — это источник, выходная величина которого зависит от другой величины схемы. В противном случае источник называется *неуправляемым* или *независимым.*

Пример 2.1.4. Выходной ток транзистора зависит от входной величины: тока базы биполярного транзистора и от напряжения решетка-источник полевого транзистора (рис. 2.1).

• ***Линейный и нелинейный управляемый источник.*** *В линейном управляемом источнике* выходная величина линейно зависит от управляющей величины. Если нет, источник *не линеен.*

2.1.4. Принципиальные ограничения использования двухполюсника

Принципиальными электрическими и тепловыми ограничениями использования двухполюсников являются максимальное напряжение, максимальный ток и максимальная мощность. Эти ограничения зависят от режима, который может быть: продолжительным, переменным, импульсным повторяющимся, импульсным неповторяющимся и т. д.

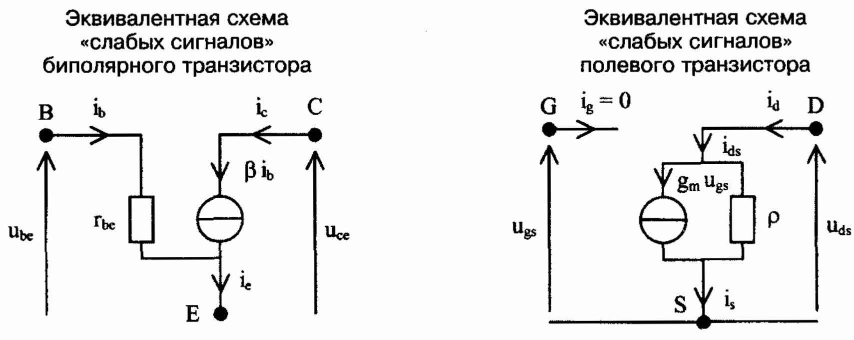


Рис. 2.1. Примеры управляемых источников

2.1.5. Характеристика двухполюсника

В зависимости от обстоятельств характеристика двухполюсника может быть снята в установившемся режиме (статическая характеристика), в переходном, импульсном режиме (динамическая характеристика) и т. д.

Пример 2.1.5. Здесь двухполюсник является только потребителем, так как потребляемая мощность может быть только положительной (рис. 2.2).

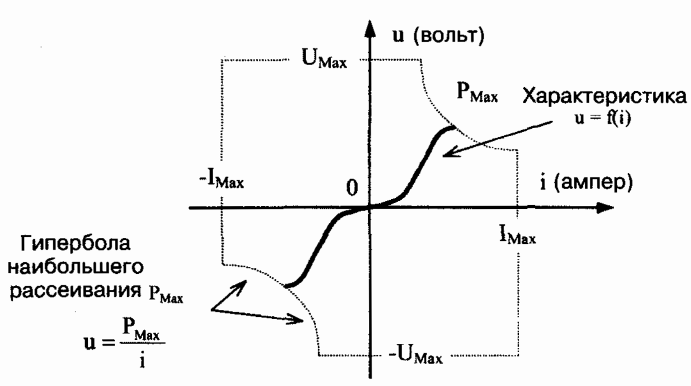
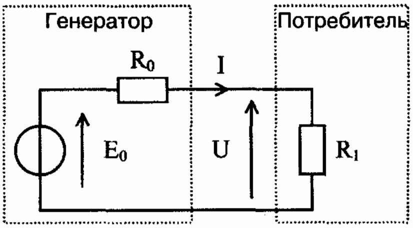


Рис. 2.2. Пример характеристики двухполюсника

2.1.6. Рабочая точка двухполюсника

Пример 2.1.6. Питание двухполюсника потребителя двухполюсником генератором фиксирует рабочую точку (рис. 2.3)

Рис. 2.3. Питание потребителя генератором



Метод

Рабочая точка определяется пересечением характеристик двухполюсников генератора и потребителя. Ее координатами являются напряжение на зажимах двухполюсников и ток I, протекающий в них.

1) Согласно общему подходу (линейные или нелинейные двухполюсники) нужно начертить характеристики в общей системе координат (рис. 2.4) или прибегнуть к методам информатики (например, моделированию).

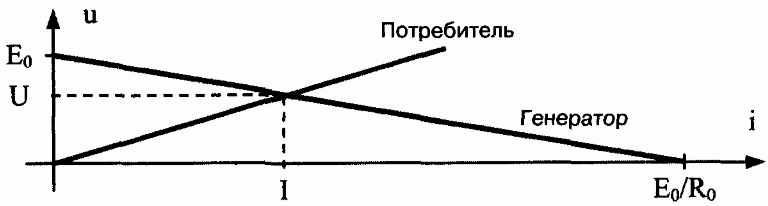


Рис. 2.4. Характеристики (пример на рис. 2.3)

2) Если двухполюсники потребителя и генератора линейны (как это имеет место на рис. 2.3 и 2.4), то решением проблемы будут:

- Уравнение генератора, называемое *уравнением прямой нагрузки*: $u = E_0 - R_0 i$.
- Уравнение потребителя: $u = R_1 i$.
- Система: $\begin{cases} U = E_0 - R_0 i, \\ U = R_1 I, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{R_1 E_0}{R_0 + R_1}, \\ I = \frac{E_0}{R_0 + R_1}. \end{cases}$

2.1.7. Соединение двухполюсников

а) Последовательное соединение двухполюсников (рис. 2.5)

Пример 2.1.7. См. гл. 5, 11, 12, 13.

Метод

При последовательном соединении двухполюсников по ним протекает один и тот же ток. Закон контурных токов позволяет записать

$$u_{Tot} = u_1 + u_2.$$

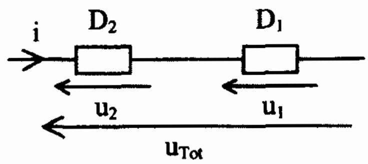


Рис. 2.5. Последовательное соединение

1) Обобщенным подходом (при линейных или нелинейных двухполюсниках) поэтапно получим характеристику эквивалентного двухполюсника

$$\begin{cases} u_1 = f_1(i), \\ u_2 = f_2(i), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_{Tot} = u_1 + u_2 = f_1(i) + f_2(i).$$

2) При линейных двухполюсниках эквивалентный двухполюсник также линейный. Тогда можно составить уравнение характеристики эквивалентного двухполюсника.

б) Параллельное соединение двух двухполюсников (рис. 2.6)

Метод

При параллельном соединении двухполюсников они питаются одним и тем же напряжением. По закону узлов

$$i_{Tot} = i_1 + i_2.$$

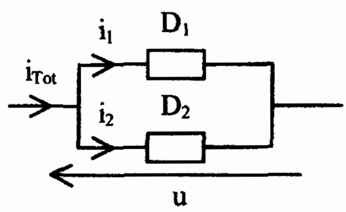


Рис. 2.6. Параллельное соединение

1) Обобщенным подходом (при линейных или нелинейных двухполюсниках) поэтапно получим характеристику эквивалентного двухполюсника

$$\begin{cases} i_1 = g_1(u), \\ i_2 = g_2(u), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i_{Tot} = i_1 + i_2 = g_1(u) + g_2(u).$$

2) При линейных двухполюсниках эквивалентный двухполюсник также линейный. Тогда можно составить уравнение характеристики эквивалентного двухполюсника.

Примечание. Часто записью $D_1//D_2$ обозначают параллельное соединение двух двухполюсников D_1 и D_2.

Пример 2.1.8. См. гл. 5, 11, 12, 13.

2.2. Теоремы об электрических цепях

Следующие далее законы и теоремы приводятся для мгновенных значений переменных. Они могут быть обобщены в области использования комплексных чисел (см. гл. 5).

- Эти обобщения позволяют рассматривать все двухполюсники как линейные согласно определению (см. § 2.1.3), включая конденсаторы, катушки и т. д.
- Практически эти обобщения осуществляются в законах и теоремах заменой сопротивлений полными комплексными (комплексные числа) или операторными (преобразование Лапласа) сопротивлениями, а проводимостей — полными комплексными или операторными проводимостями. Соответственно теоремам будут приняты и замечания.

2.2.1. Законы Кирхгофа

Внимание! Токи и напряжения являются алгебраическими величинами. Положительные направления напряжения и тока, будучи неопределенным *априори*, задаются произвольно. Отрицательный результат просто указывает, что реальные направления тока или напряжения противоположны указанным стрелками на расчетной схеме.

• ***Закон узлов***[1]**.** Его можно привести в двух эквивалентных формулировках.

1) Сумма токов, приходящих к узлу, равна сумме токов, отходящих от узла.

$$\sum \mathrm{i}_{(\text{приходящих к узлу})} = \sum \mathrm{i}_{(\text{отходящих от узла})}.$$

2) Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю.

Правило (произвольное) принятия знака: Знак «+» присваивается приходящим к узлу токам, а знак «−» отходящим от узла.

$$\sum \mathrm{i}_{\mathrm{n}\ (\text{в узле})} = 0.$$

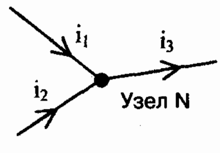


Рис. 2.7. Узел N

Вопрос. Записать закон узлов для узла N (рис. 2.7).
Ответ. $\mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 = \mathrm{i}_3$ или $\mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 + \mathrm{i}_3 = 0$.

• ***Закон контуров.*** Его можно привести в двух эквивалентных формулировках.

[1]Во многих источниках закон узлов называют первым законом Кирхгофа, а закон контуров — вторым законом Кирхгофа. — *Прим. перев.*

1) Сумма напряжений в направлении обхода контура равна сумме напряжений в противоположном направлении.

$$\sum u_{(\text{направление обхода})} = \sum u_{(\text{встречное направление})}.$$

2) Алгебраическая сумма напряжений в контуре равна нулю.

$$\sum u_{n\ (\text{в контуре})} = 0.$$

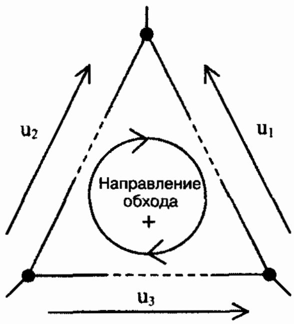


Рис. 2.8. Контур M

Правило (произвольное) принятия знака: знак «+» присваивается напряжениям, направление которых соответствует направлению обхода контура, а знак «−» соответствует встречному направлению.

Вопрос. Записать закон контуров для контура M (рис. 2.8).

Ответ. $u_2 = u_1 + u_3$ или $u_2 + (-u_1) + (-u_3) = 0$.

Метод
Обычно начинают с выбора направления обхода контура.

Внимание! Законы узлов и законы контуров идентичны по своей форме, как *сумма мгновенных значений переменных*. Соответственно, и в случае периодических переменных эти законы справедливы также для средних значений переменных, НО НЕ для действующих значений и НЕ для максимальных и минимальных значений.

Пример 2.2.9. Для узла N (рис. 2.7) можно записать: $I_{1\ \text{ср}} + I_{2\ \text{ср}} = I_{3\ \text{ср}}$.

2.2.2. Пассивирование (компенсация) источника

Метод
В общем случае «реальный» источник энергии может быть заменен его внутренним пассивным сопротивлением. В случае «идеальных» источников (см. § 2.1.3) пассивирование состоит в замене источника напряжения коротким замыканием, а источника тока — разрывом цепи.

2.2.3. Теорема суперпозиции

Эта теорема вытекает непосредственно из свойства линейности активных и пассивных двухполюсников. Рассмотрим ее сначала для токов, затем для напряжений.

1. В линейной системе ток в ветви — это алгебраическая сумма токов, каждый из которых вызван каждым независимым, отдельно взятым источником при условии, что при рассмотрении одного источника остальные считаются пассивными.
2. В линейной системе напряжение между двумя зажимами — это алгебраическая сумма напряжений между этими зажимами, каждое из которых вызвано каждым из отдельно взятых имеющихся в системе независимых источников при условии, что при рассмотрении одного источника остальные считаются пассивными.

Внимание! Управляемые источники не должны считаться пассивными.

Вопрос. Имеем схему с двумя источниками (рис. 2.9). Определить напряжение u и ток i.

Ответ. 1) Пассивирован источник 2 (рис. 2.9)

$$u_1 = \frac{R_2R_Le_1}{R_2R_L + R_1(R_2 + R_L)}$$

и $$i_1 = \frac{R_2e_1}{R_2R_L + R_1(R_2 + R_L)}.$$

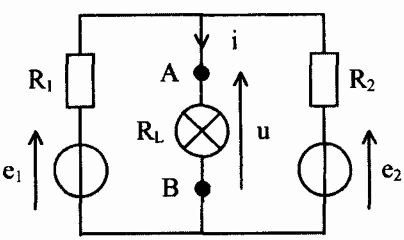


Рис. 2.9. Схема с двумя источниками

2) Пассивирован источник 1 (рис. 2.10)

$$u_2 = \frac{R_1R_Le_2}{R_1R_L + R_2(R_1 + R_L)}$$

и $$i_2 = \frac{R_1e_2}{R_1R_L + R_2(R_1 + R_L)}.$$

3) Следует (рис. 2.10):

$$u = u_1 + u_2 = \frac{R_L(R_2e_1 + R_1e_2)}{R_1R_2 + R_L(R_2 + R_1)} \quad \text{и} \quad i = i_1 + i_2 = \frac{R_2e_1 + R_1e_2}{R_1R_2 + R_L(R_2 + R_1)}.$$

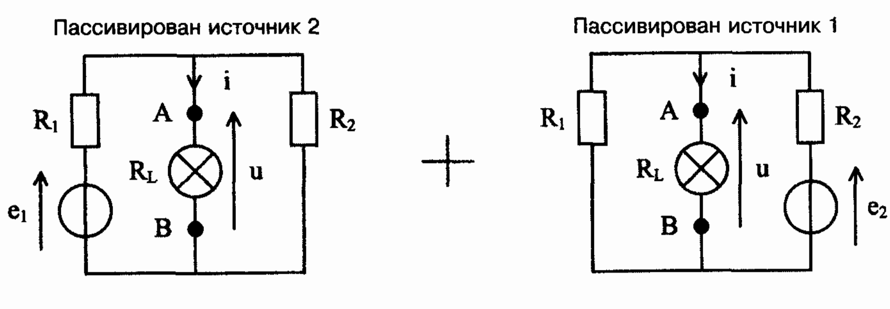


Рис. 2.10. Суперпозиция двух состояний в схеме с двумя источниками

2.2.4. Теоремы Тевенена и Нортона

Весь активный линейный двухполюсник AB, состоящий из сопротивлений, независимых и/или управляемых источников (см. § 2.2.3), может быть представлен (рис. 2.11):

1) Последовательной эквивалентной схемой (модель Тевенена), содержащей источник напряжения e_0 и сопротивление R_0.

2) Параллельной эквивалентной схемой (модель Нортона), содержащей источник тока i_0 и сопротивление R_0.

Здесь: e_0 — напряжение холостого хода двухполюсника AB, т. е. напряжение при отсутствии нагрузки между зажимами AB, $e_0 = u$ при $i = 0$; i_0 — ток короткого замыкания двухполюсника AB, т. е. ток между замкнутыми накоротко зажимами A и B, $i_0 = i$ при $u = 0$; R_0 — сопротивление со стороны зажимов AB, равное эквивалентному, когда неуправляемые источники принимаются пассивными.

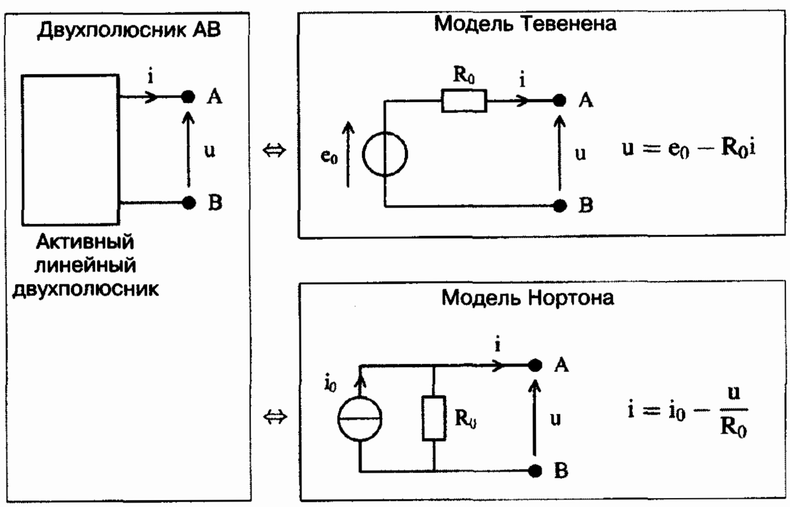


Рис. 2.11. Модели двухполюсника Тевенена и Нортона

> ***Метод***
> Модели Тевенена и Нортона эквивалентны: то же напряжение u и тот же ток i для заданной нагрузки. Переход от одного к другому осуществляется соотношением:
> $$e_0 = R_0 i_0.$$

Внимание! Для определения R_0 принимаются пассивными только неуправляемые источники (независимые). Управляемые источники (зависимые) не должны приниматься пассивными.

Примечание. Модели Тевенена и Нортона эквивалентны только для внешних устройств. Они не учитывают рассеиваемую реальными цепями, замещенными моделями, мощность. Чтобы это показать, достаточно отметить, что на холостом ходу модель Тевенена мощность не рассеивает.

Метод
Первым действием должно быть выделение двухполюсника, эквивалентная модель которого ищется, и «отсоединить» нагрузку.

Вопрос. Построить модели Тевенена и Нортона ранее рассмотренных электрических схем (см. рис. 2.9).

Ответ. 1) Выражение e_0 (рис. 2.12). Это напряжение холостого хода

$$e_0 = u \quad \text{при} \quad i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e_0 = \frac{R_2 e_1 + R_1 e_2}{R_1 + R_2}.$$

2) Выражение i_0 (рис. 2.13). Это ток короткого замыкания

$$i_0 = i \quad \text{при} \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}.$$

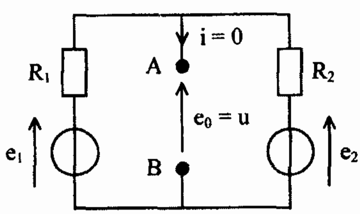


Рис. 2.12. Схема с двумя источниками. Выражение e_0

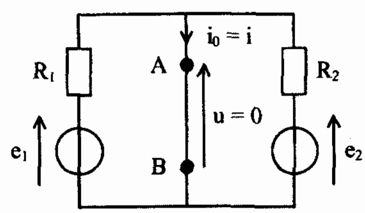


Рис. 2.13. Схема с двумя источниками. Выражение i_0

3) Выражение R_0 (рис. 2.14). Сопротивление между зажимами AB. Источники неуправляемые, приняты пассивными.

$$R_0 = \frac{u}{-i} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

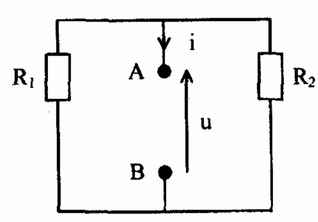


Рис. 2.14. Схема с двумя источниками. Выражение R_0

4) Выражение u и i: Принимаем эквивалентную схему Тевенена или Нортона (рис. 2.15) и добавляем нагрузку. Затем из одной и из другой схем получаем:

$$u = \frac{R_L e_0}{R_0 + R_L} \quad \text{и} \quad i = \frac{R_0 i_0}{R_0 + R_L}$$

$$\text{при} \quad e_0 = R_0 i_0 \frac{1}{2}.$$

Окончательно:

$$u = \frac{R_L(R_2e_1 + R_1e_2)}{R_1R_2 + R_L(R_2 + R_1)} \quad \text{и} \quad i = \frac{u}{R_L} = \frac{R_2e_1 + R_1e_2}{R_1R_2 + R_L(R_2 + R_1)}.$$

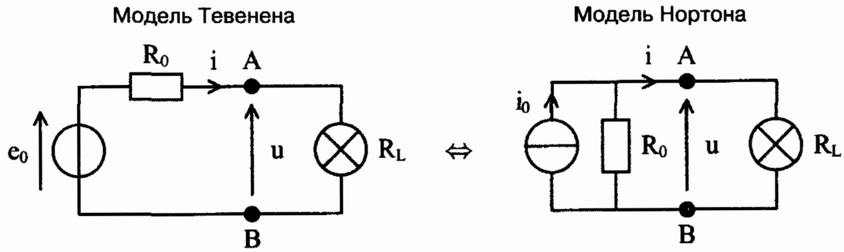


Рис. 2.15. Схема с двумя источниками. Эквивалентная схема с нагрузкой

Вопрос. Имеем схему псевдоинтегратора RC (рис. 2.16) в представлении Лапласа (см. гл. 10).

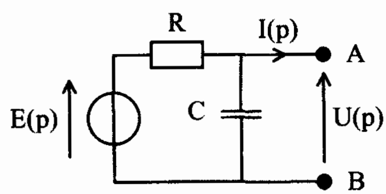


Рис. 2.16. Схема псевдоинтегратора RC

Ответ. Применив теоремы, получим:

$$E_0(p) = \frac{1}{1 + RC_p}E(p) \quad \text{и} \quad I_0 = \frac{E(p)}{R},$$

$$Z_0(p) = R // \frac{1}{C_p} = \frac{r}{1 + RC_p} \quad \text{и} \quad E_0(p) = Z_0(p)I_0(p).$$

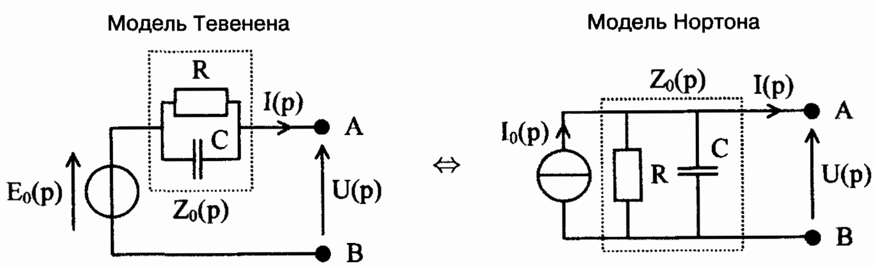


Рис. 2.17. Эквивалентные схемы псевдоинтегратора RC

2.2.5. Теорема Миллмана

При независимых источниках $e_1, \ldots, e_N$ двухполюсники (рис. 2.18) эквивалентны.

$$e_0 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} e_k G_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} G_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} e_k G_k}{G_0} \quad \text{и} \quad G_0 = \sum_{k=1}^{N} G_k,$$

где $G_k = \frac{1}{R_k}$ — проводимость.

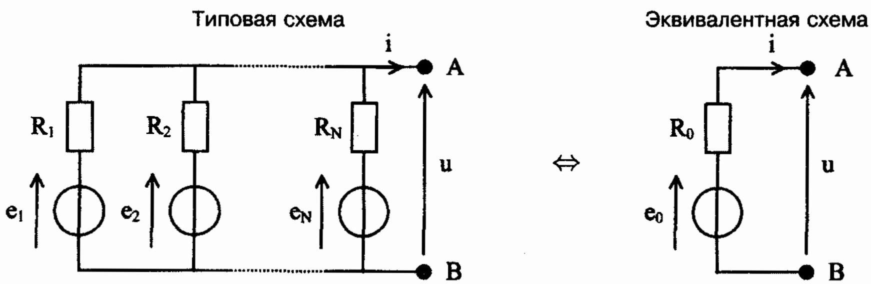


Рис. 2.18. Иллюстрация теоремы Миллмана

При $N = 3$ получим:

$$e_0 = \frac{e_1G_1 + e_2G_2 + e_3G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \quad \text{и} \quad G_0 = G_1 + G_2 + G_3.$$

Вопрос. Выразить напряжение u и ток i в ранее рассмотренной схеме (см. рис. 2.9).

Ответ. Возможны два подхода.

Полагаем, что нагрузка не входит в состав двухполюсника. Тогда выбираем эквивалентную схему по модели Тевенена (рис. 2.15). Получаем:

$$e_0 = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2e_1 + R_1e_2}{R_1 + R_2} \quad \text{и} \quad G_0 = \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Затем находятся выражения напряжения u и тока i.

Полагаем, что нагрузка входит в состав двухполюсника. Тогда эта теорема позволяет прямо рассчитать напряжение u и затем ток i.

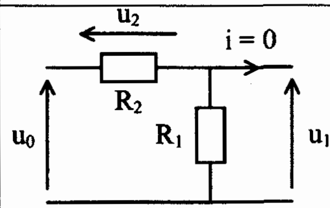
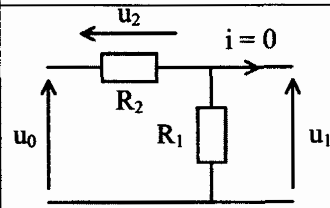
$$e_0 = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{0}{R_L}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L}} = \frac{R_L(R_2e_1 + R_1e_2)}{R_1R_2 + R_L(R_2 + R_1)} \quad \text{и} \quad i = \frac{u}{R_L}.$$

Внимание! В знаменателе ветвь без источника забывать не следует.

2.2.6. Делитель напряжения. Делитель тока

Эти две схемы очень важны (табл. 2.4)

Таблица 2.4. Делитель напряжения. Делитель тока

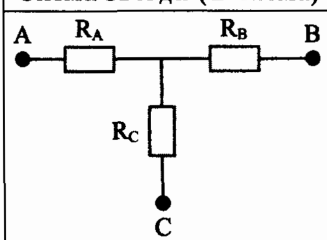
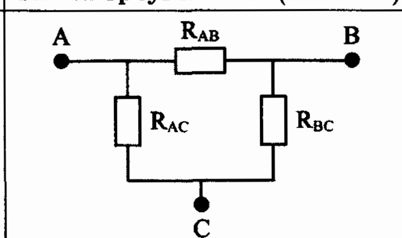
	Схема	Соотношения
Делитель напряжения		$u_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} u_0$ $u_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} u_0$
Делитель тока		$i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} i_0$ $i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} i_0$

Внимание! Приведенные формулы (табл. 2.4) справедливы только в случае, когда никакая внешняя нагрузка схему не изменяет.

2.2.7. Теорема Кеннели. Преобразования треугольник-звезда и звезда-треугольник (эквивалентность схем звезда и треугольник)

Теорема Кеннели позволяет перейти от схемы треугольник (П-образная схема) к схеме звезда (Т-образная схема) и обратно (табл. 2.5).

Таблица 2.5. К вопросу эквивалентности схем звезда и треугольник

Схема звезда (Т-схема)	Схема треугольник (П-схема)
	

Имеем соотношения:

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}}; \quad R_B = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}};$$

$$R_C = \frac{R_{AC}R_{DC}}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}}.$$

$$G_{AB} = \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C}; \qquad G_{AC} = \frac{G_A G_C}{G_A + G_B + G_C};$$

$$G_{BC} = \frac{G_C G_B}{G_A + G_B + G_C}.$$

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}; \qquad R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B};$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}.$$

2.2.8. Принцип линейности

В линейной цепи реакция сигнала s(t) представляет собой алгебраическую сумму реакций от каждого отдельно взятого источника (зависимого или нет) при условии пассивности остальных источников. Реализация возможна двумя способами:

1) Суммируем только отклики от каждого независимого источника (но не от управляемых) при пассивности остальных независимых (но не управляемых) источников. Затем используем теорему суперпозиции (см. § 2.2.3).

2) Суммируем все отклики от каждого источника, включая управляемые, все остальные источники, в том числе и управляемые, считаем пассивными. Сигнал отклика сигнала s(t) мы не получаем непосредственно, так как в выражение входят управляемые источники. Они неизвестны, поскольку зависят от других источников. Следует из полученного выражения исключить управляемые (зависимые) источники.

ГЛАВА 3

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

3.1. Электрическое поле и электрическая индукция

3.1.1. Напряженность

• ***Напряженность электрического поля.*** Электрический заряд q изменяет окружающее пространство, создавая электрическое (или электростатическое) поле, *напряженность* которого на расстоянии r определяется по закону (см. гл. 1):

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{r}^2} \text{ с единицами измерения } \mathrm{В/м} = \frac{1}{\mathrm{Ф/м}}\frac{\mathrm{Кл}}{\mathrm{м}^2} = \frac{\mathrm{Кл}}{\mathrm{Ф} \times \mathrm{м}}.$$

В векторной форме этот закон запишется как

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{r}^2}\vec{\mathrm{r}_0}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0, \quad \|\vec{\mathrm{r}_0}\| = 1.$$

Здесь $\vec{\mathrm{r}_0}$ — единичный вектор (его норма равна 1), направленный по прямой с ориентацией от O к M (рис. 3.1); ε — абсолютная проницаемость среды, выраженная в Ф/м; ε_r — относительная по отношению к вакууму проницаемость среды (безразмерная); ε_0 — абсолютная проницаемость вакуума (и практически сухого воздуха).

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \mathrm{c}^2} \approx 8{,}8541878 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{Ф/м}, \quad \text{где} \quad \mathrm{c} = 299\,792\,458\ \mathrm{м/с}.$$

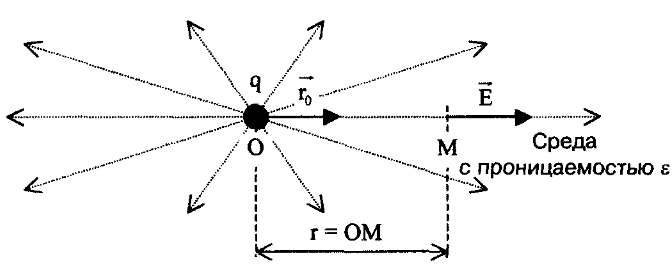


Рис. 3.1. Электрическое поле заряда q

• ***Электрическое поле*** (рис. 3.1). В каждой точке M пространства имеем вектор $\vec{\mathrm{E}}$, иногда обозначаемый как $\vec{\mathrm{E}}$(M). Совокупность векторов $\vec{\mathrm{E}}$

образует поле векторов, называемое *электрическим полем.* Совокупность линий, ориентированных в направлении векторов $\vec{E}$, называются *линиями электрического поля.*

• ***Поле электрической индукции.*** Электрическое поле (вектор $\vec{E}$) может рассматриваться как «наведенное» *полем электрической индукции* (векторы $\vec{D}$), созданным зарядом q и независимым от электрической среды:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \text{ с единицами измерения } \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = \frac{\Phi}{\text{м}}\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Совокупность векторов $\vec{D}$ также образует векторное поле, называемое *полем электрической индукции* или *полем электрического смещения.*

Примечания.

– В некоторых средах векторы электрического поля и поля электрической индукции не пропорциональны: проницаемость ε не является постоянной.
– Для наглядного представления электрического поля используют маленькие диполи диэлектриков, которые ориентируются по электрическому полю. Маленькие клочки кошачьей шерсти или крупицы зерна, плавающие на поверхности касторового масла, позволяют наглядно продемонстрировать спектры электрического поля в среде плоского конденсатора, погруженного в это масло.

3.1.2. Поток через поверхность S

• ***Ориентация поверхности S*** (рис. 3.2). Поверхность представим вектором $\vec{S}$, являющимся нормалью поверхности, а его модуль равен площади поверхности. Его направление (условное) определяется с помощью замкнутой кривой, построенной в начале вектора, представляющего поверхность.

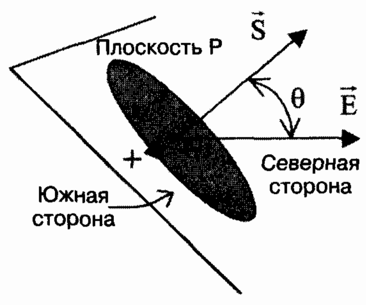


Рис. 3.2. Ориентация поверхности S. Поток через поверхность S

• ***Поток через поверхность S*** (табл. 3.1). *Поток* — это алгебраическая величина, которая оценивает проникновение поля через поверхность S. Его расчет требует определения ориентации поверхности S (см. рис. 3.2).

Таблица 3.1. Определение потоков векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ через поверхность S

Единицы	$\varphi_S(\vec{E})$: **поток вектора электрического поля $\vec{E}$ через поверхность S** $В \cdot м = (В/м) \cdot м^2$	$\varphi_S(\vec{D})$: **поток вектора электрической индукции $\vec{D}$ через поверхность S** $Кл = (Кл/м) \cdot м^2$
Алгебраическая форма	$\varphi_S(E) = ES\cos(\theta)$	$\varphi_S(D) = DS\cos(\theta)$
Векторная форма (скалярное произведение)	$\varphi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S}$	$\varphi_S(\vec{D}) = \vec{D} \cdot \vec{S}$
Интегральная форма	$\varphi_S(\vec{E}) = \iint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$	$\varphi_S(\vec{D}) = \iint\limits_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

Примечание. Поток вектора электрической индукции через поверхность S имеет размерность электрического заряда (Кл). Это предопределяет теорему Гаусса (см. § 3.1.3).

Пример 3.1.1. Электрический заряд в центре сферы радиусом R наводит радиальную индукцию, модуль которой:

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi\varepsilon R^2 \cdot \varepsilon = Q.$$

3.1.3. Теорема Гаусса

• ***Содержание.*** Замкнутая поверхность с расположенным внутри нее электрическим зарядом пересекается потоком электрической индукции $\varphi_S(\vec{D})$, равным алгебраической сумме зарядов $q_{вн}$, содержащихся в ограниченном поверхностью объеме.

$$\varphi_S(\vec{D}) = \Sigma q_{вн}, \text{ с единицами измерения Кл.}$$

Внимание! В этой формулировке заряды $q_{вн}$ должны находиться внутри объема, ограниченного поверхностью S. Если точечные заряды $q_{пов}$ находятся на самой поверхности, их усредняют. Отсюда следует другая формулировка:

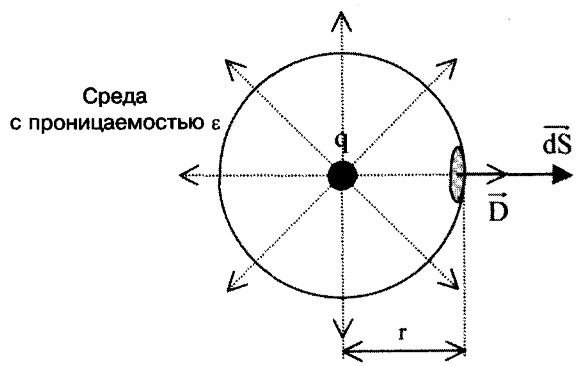
$$\varphi_S(\vec{D}) = \Sigma q_{вн} + \frac{1}{2}\Sigma q_{пов}.$$

Примечание. Сформулированная так теорема Гаусса справедлива для любой среды, даже в случае непропорциональности векторов электрического поля и поля электрической индукции (непостоянство проницаемости ε).

• ***Применение теоремы Гаусса.*** Это эффективный метод расчета полей, обладающих пространственной симметрией.

Вопрос. Рассчитать напряженность E вектора электрического поля $\vec{E}$ на расстоянии r от точечного заряда q (рис. 3.3).

Рис. 3.3. Поля $\vec{E}$ и $\vec{D}$



Ответ. Поле электрической индукции $\vec{D}$ вокруг q обладает радиальной симметрией. Следовательно, значение D одинаково во всех точках сферы радиусом r. Элементарный поток через элементарную поверхность dS будет: $d\varphi = DdS$. Для всей сферы радиуса r поток составит:

$$\varphi = \iint_S DdS = D \iint_S dS = 4\pi r^2 D.$$

Согласно теореме Гаусса имеем: $4\pi r^2 D = q$, откуда $D = \frac{q}{4\pi r^2}$ (среда не учитывается) и $D = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon}$.

3.2. Электрический потенциал

3.2.1. Определение

В гл. 1 говорится, что элементарное перемещение dr электрического заряда Q в электрическом поле E требовало потенциальной электрической энергии, определяемой как

$$dW = -QE(r)dr \text{ с единицами измерения } Дж = Кл\frac{В}{м}м = Кл \cdot В.$$

Мы определили потенциал как работу на единицу заряда:

$$dV = \frac{dW}{Q} = -E(r)dr.$$

Интегрирование этого выражения определяет электрический потенциал:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r) \text{ с единицами измерения } В = \frac{В}{м} м.$$

Примечание. В бесконечности потенциал равен нулю; $r \to \infty \Rightarrow V(\infty) = 0$.
Вопрос. Рассчитать потенциал V на расстоянии r от заряда q.
Ответ. Напряженность электрического поля

$$D = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon}.$$

Интегрируя, получим:

$$V = \int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}.$$

3.2.2. Расчет электрического поля с использованием потенциала V

Потенциал — функция скалярная. Поэтому легко рассчитать потенциал V(r) заданной точки пространства, имея пространственное распределение зарядов. Применение соотношения $dV = -E(r)$ позволяет рассчитать $\vec{E}(r)$. Используя оператор «градиент», получим:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V.$$

Примечание. Векторный оператор $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$ является векторным трехразмерным оператором. Его математическое выражение зависит от системы координат (табл. 3.2).
Вопрос. Рассчитать электрическое поле, созданное точечным зарядом q.
Ответ. Потенциал определяется как:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}.$$

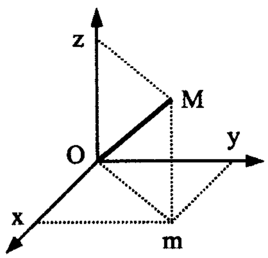
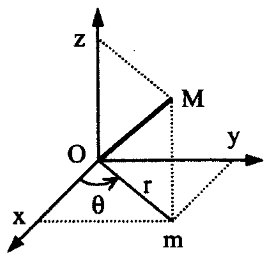
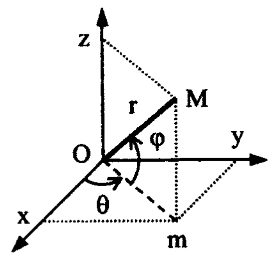
В сферических координатах уравнение $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$ запишется:

$$E(\theta) = -\frac{1}{r\cos(\varphi)}\frac{\partial V}{\partial \theta}; \quad E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}; \quad E(\varphi) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

С учетом симметрии в этой системе координат потенциал V зависит только от расстояния (радиальная составляющая). Он не зависит ни от θ, ни от φ. Поэтому:

$$\begin{cases} E(\theta) = 0; \\ E(r) = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{q}{r^2}; \\ E(\varphi) = 0. \end{cases}$$

Таблица 3.2. Оператор $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ в различных системах координат

Декартовы координаты V(x,y,z)	**Цилиндрические координаты** $V(\theta, r, z)$	**Сферические координаты** $V(\theta, r, \varphi)$
		
$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$
	$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant +\frac{\pi}{2}$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$	$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(\theta,r,z) = \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$	$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(\theta,r,\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}$

3.3. Принцип действия конденсатора

(См. также гл. 12).

3.3.1. Устройство и принцип действия

Конденсатор состоит из двух металлических обкладок, разделенных диэлектриком абсолютной проницаемости ε. Между атомами и молекулами диэлектрика нет никаких носителей заряда, его проводимость теоретически равна нулю.

Когда к обкладкам A и B конденсатора прикладывается напряжение $(V_A - V_B)$, электронное облако атомов притягивается, возникает электрическое поле, оставляя за собой часть атомов, ионизированных положительно: получается электрический двухполюсник (рис. 3.4).

Диэлектрик, в общем нейтральный, на сторонах, близких к обкладкам, поляризован электрическими двухполюсниками. Устанавливаются заряды $-Q$ и $+Q$.

Этой поляризации боковых сторон соответствует обратная поляризация обкладок A и B — заряды $+Q$ и $-Q$. Эти поверхностные заряды мобильны.

Примечание. Пластины только создают электрическое поле $\vec{E}$, воздействующее на диэлектрик. Заряды $+Q$ и $-Q$, образующиеся на обкладках, зависят только от диэлектрика.

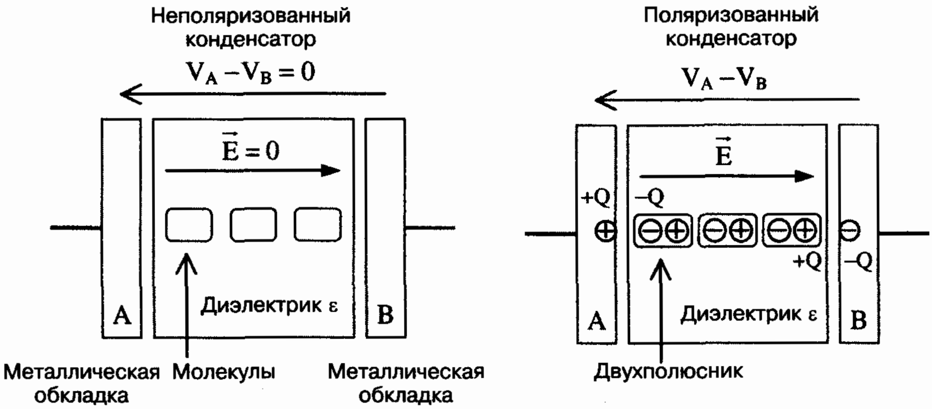


Рис. 3.4. Иллюстрация устройства и действия конденсатора

3.3.2. Диэлектрическая прочность

С ростом приложенного к обкладкам конденсатора напряжения повышается и электрическое поле. Вблизи предельного значения напряженности E_{lim}, называемого *диэлектрической прочностью,* притянутые молекулы «разрываются» и, освобождая электроны, ионизируются. Ионы создают ток, локально разрушающий диэлектрик. Говорят, что диэлектрик или конденсатор «пробит». Он больше не пригоден для использования. Предельной напряженности поля соответствует предельное напряжение $(V_A - V_B)_{lim}$.

Вопрос. Зная, что диэлектрическая прочность воздуха составляет $E_{lim} \approx$ $\approx$ 3,4 кВ/мм, рассчитать минимальное напряжение, прикладываемое к электродам свечи зажигания двигателя внутреннего сгорания при зазоре между электродами $d = 0{,}75$ мм.

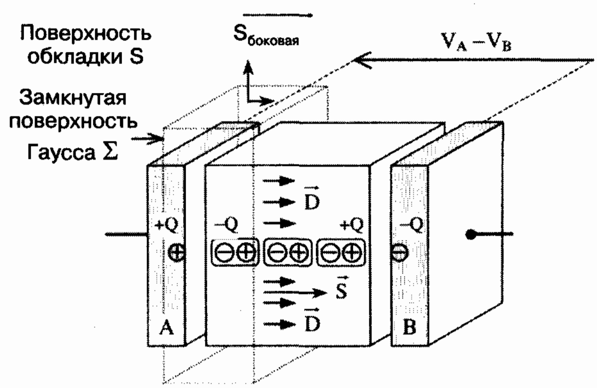
Ответ. $U_{lim} = E_{lim}d \approx 2{,}55$ кВ.

3.3.3. Емкость и накопленный заряд конденсатора

Пренебрегая краевым эффектом, считаем $\vec{D}$ однородным (рис. 3.5). Поверхность Гаусса — это параллелепипед, его грани ориентированы изнутри наружу (вектор $\vec{S}$). Поток в металле равен нулю, так как здесь $\vec{D} = 0$. Выходящий из диэлектрика поток согласно теореме Гаусса

$$\vec{D} \cdot \vec{S} = DS = \varepsilon ES = +Q.$$

Рис. 3.5. Накопленный конденсатором заряд



На каждой обкладке накапливается заряд $Q = \varepsilon ES$.

Напряженность электрического поля $E = \frac{V_A - V_B}{e}$, где e — толщина диэлектрика, откуда:

$$Q = \frac{\varepsilon S}{e}(V_A - V_B) \text{ с единицами измерения Кл} = \frac{(\text{Ф}/\text{м})\text{м}^2}{\text{м}}\text{В}.$$

Эта формула показывает, что накопленный на обкладках заряд зависит только от геометрии диэлектрика (S и e) и от его природы (его абсолютная проницаемость). Это свойство диэлектрика накапливать энергию определяется емкостью конденсатора, выражаемой в фарадах (Ф):

$$C = \frac{\varepsilon S}{e} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e} \text{ с единицами измерения Ф} = \frac{(\text{Ф}/\text{м})\text{м}^2}{\text{м}},$$

откуда $Q = C(V_A - V_B)$ с единицами измерения Кл = Ф · В.

Фарада — это очень большая величина. Обычно используют ее доли:

$$\text{мФ} = 10^{-3}\text{Ф}; \quad \text{мкФ} = 10^{-6}\text{Ф}; \quad \text{нФ} = 10^{-9}\text{Ф}; \quad \text{пФ} = 10^{-12}\text{Ф}.$$

3.3.4. Электрическая энергия, запасенная конденсатором

Исходя из состояния 1 (рис. 3.6), для заряда металлических обкладок дополнительным зарядом dq и перехода в состояние 2, нужно, чтобы диэлектрик подвергся увеличению напряженности электрического поля $d\vec{E}$, которому соответствует повышение напряжения $du = dq/C$.

Заряд dq переходит от нулевого потенциала (бесконечность) к потенциалу u, т. е. имеет место пополнение энергии

$$dw = u\,dq = C\,u\,dq.$$

Окончательно полная энергия для заряда конденсатора до напряжения U составит:

$$W = \int_0^U C\,u\,du = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \text{ с единицами измерения } Дж = Ф \cdot В^2 = \frac{C^2}{Ф}.$$

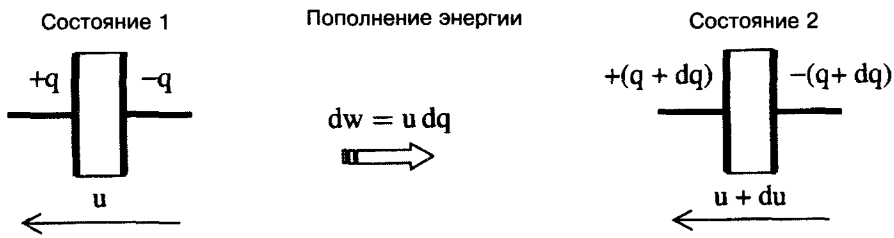


Рис. 3.6. Накопление электрической энергии конденсатором

Примечание. Из этой формулы просто выводится выражение силы, действующей на обкладки конденсатора. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} dW &= Fde \\ W &= \tfrac{1}{2}\tfrac{Q^2}{C} = \tfrac{1}{2}\tfrac{Q^2 e}{\varepsilon S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad F = \frac{dW}{de} = \frac{d}{de}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2 e}{\varepsilon S}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon S}.$$

Определив поверхностную плотность заряда

$$\sigma = \frac{Q}{S}, \qquad Кл/м^2,$$

получим выражение силы притяжения между обкладками:

$$F = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S}{\varepsilon} \text{ с единицами измерения}$$

$$Н = \frac{(Кл/м^2)^2 м^2}{Ф/м} = \frac{Кл^2}{м \cdot Ф} = \frac{Кл \cdot В}{м} = \frac{Дж}{м}.$$

ГЛАВА 4

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

4.1. Магнитное поле

4.1.1. Физическая природа

Упорядоченное движение электрических зарядов (электрический ток) создает в окружающем его пространстве *магнитное поле*. Электрический ток представляет собой *источник возбуждения магнитного поля*. Во всех точках пространства магнитное поле описывается вектором (направление, напряженность), называемым *вектором напряженности магнитного поля* $\vec{H}$. Совокупность векторов $\vec{H}$ составляет магнитное поле (поле векторов).

Рассыпанные вблизи источника поля железные опилки (детектор) позволяют получить наглядную картину (магнитный спектр) поля.

4.1.2. Источники магнитного поля

• ***Магнитная орбиталь*** (рис. 4.1) Вращающийся вокруг атомного ядра электрон является источником возбуждения магнитного поля. Созданное им магнитное поле чрезвычайно слабо. Однако совокупность огромного количества подобных полей того же направления позволяет получить магнит.

• ***Магниты*** (рис. 4.2). Магнит представляет собой стальную деталь, хранящую память о предшествующей магнитной обработке. Магниты могут быть плоскими, в форме подковы или стержня. Магнитные эффекты постоянных магнитов связаны с одинаковой ориентацией электронных орбиталей входящих в них атомов.

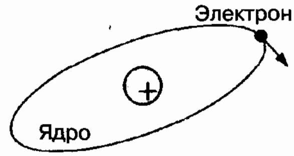


Рис. 4.1. Электронная орбиталь

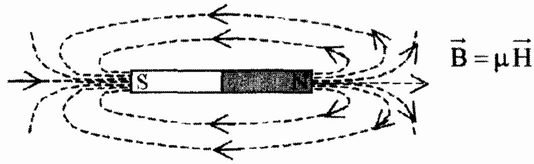


Рис. 4.2. Магнитное поле стержневого магнита

Свойства магнитов

- Магнит притягивает ферромагнитные предметы, находящиеся вблизи него.
- Будучи помещенным в магнитное поле земли, магнит спонтанно ориентируется в направлении север-юг. Условлено считать конец магнита, направленный на географический север «северным полюсом», а направленный на географический юг — «южным полюсом».
- Проявление магнитных эффектов магнита локализовано вблизи его полюсов.
- Изолировать один южный или один северный полюс невозможно. Распил магнита пополам не приведет к разделу полюсов, а приведет к возникновению двух магнитов.
- Два одноименных полюса двух магнитов отталкиваются, а разноименных — притягиваются.

Примечание. Наша планета Земля может рассматриваться как гигантский магнит с двумя полюсами — северным и южным.

• ***Соленоид*** (рис. 4.3). Соленоид (катушка) с током i в его обмотке представляет собой источник возбуждения магнитного поля. Соленоид образует такое же магнитное поле, как и стержневой магнит.

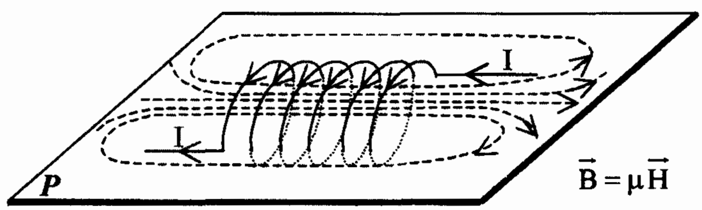


Рис. 4.3. Магнитное поле соленоида

4.1.3. Расчет вектора напряженности $\vec{H}$. Теорема Ампера

Магнитные силовые линии, условно ориентированные с севера на юг, являются замкнутыми линиями. Закон Био-Савара позволяет установить направление и смысл вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$, но расчет напряженности поля часто является сложной задачей и даже невозможной без вычислительной машины. Теорема Ампера позволяет рассчитать вектор напряженности магнитного поля вдоль одной из его линий при наличии симметрии.

а) Элементарный закон Био-Савара (рис. 4.4)

$$\overrightarrow{dH} = \frac{i\,d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{4\pi(PM)^3} = \frac{i\,\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{r_0}}{4\pi r^2} \text{ с единицами измерения } \frac{A}{м} = \frac{Aм}{м^2},$$

где $\wedge$ означает векторное произведение; $\vec{r_0}$ — единичный вектор прямой, направленной от P к M с нормалью $\|r_0\| = 1$; $\overrightarrow{d\ell}$ — элемент проводника с током i.

Этот закон интерпретирует создание элементом $\overrightarrow{d\ell}$ проводника с током i вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$. Вектор $\vec{H}$ перпендикулярен к $\overrightarrow{d\ell}$ и к $\vec{r_0}$, т. е. ориентирован по нормали к плоскости $(\overrightarrow{d\ell}, \vec{r_0})$. Трехгранник $(\overrightarrow{d\ell}, \vec{r_0}, \vec{H})$ прямой (рис. 4.5). Модуль напряженности магнитного поля составит

$$dH = \frac{i \sin\left(\overrightarrow{d\ell}, \vec{r_0}\right) d\ell}{4\pi r^2}.$$

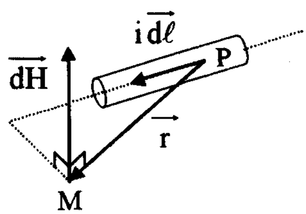


Рис. 4.4. К закону Био-Савара

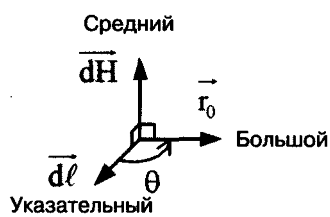


Рис. 4.5. Прямой трехгранник $(\overrightarrow{d\ell}, \vec{r_0}, \vec{H})$

> ***Метод***
> Правило трех пальцев правой руки. Большой указывает $i\overrightarrow{d\ell}$, указательный — $\vec{r_0}$, средний — $\overrightarrow{dH}$ (см. рис. 4.5)

б) Циркуляция вектора напряженности магнитного поля

Элементарной циркуляцией $\overrightarrow{dH}$ по пути $\overrightarrow{d\ell}$ называется скалярное произведение

$$dC = \vec{H} \cdot \overrightarrow{d\ell}.$$

Таким образом, циркуляцией вектора $\overrightarrow{dH}$ по замкнутому контуру будет

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{H}\overrightarrow{d\ell} \text{ с единицами измерения } A = \frac{A}{м}м,$$

где $\oint$ — криволинейный интеграл (т. е. интеграл вдоль замкнутого контура).

3–3927

Примечание. По контуру «циркулирует» только составляющая $\overrightarrow{dH}$.

$\overrightarrow{H_t} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{H}\overrightarrow{d\ell}$, где $\overrightarrow{dH_t}$ — тангенциальная составляющая $\overrightarrow{dH}$.

$\overrightarrow{H_n} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$, где $\overrightarrow{dH_n}$ — нормальная составляющая $\overrightarrow{dH}$.

в) Теорема Ампера (см. рис. 4.6)

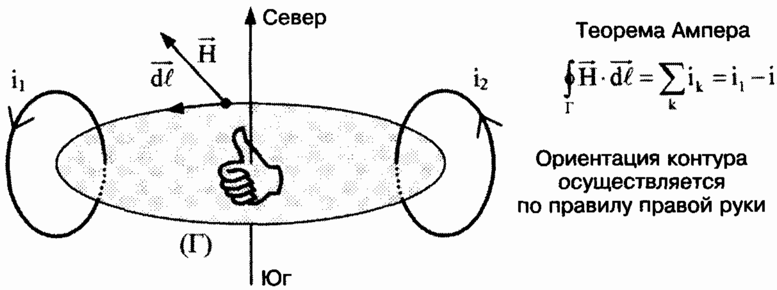


Рис. 4.6. Циркуляция вектора $\overrightarrow{dH}$. Теорема Ампера

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ по замкнутому и ориентированному контуру Г равна алгебраической сумме токов, проходящих через поверхность, опирающуюся на контур Г. Положительным считается ток, проходящий по южной стороне, а отрицательным — по северной. Математические выражения приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Основные соотношения магнитного поля

	Математическое выражение	Условия применения
Алгебраическая форма	$H\ell = \sum_k i_k$	$\vec{H}$ и $\vec{\ell}$ коллинеарны
Векторная форма (скалярное произведение)	$\vec{H} \cdot \vec{\ell} = \sum_k i_k$	$\vec{H}$ = const, а цепь геометрически проста
Интегральная форма	$\oint_\Gamma \vec{H}\overrightarrow{d\ell} = \sum_k i_k$	Общее выражение
Единицы измерения	(А/м)м = А	

Примечание. Теорема Ампера показывает, что напряженность магнитного поля не зависит от среды и выражается в А/м.

Методы

Правила определения направления вектора напряженности магнитного поля. Изо всех существующих приведем два полезных.

– *Правило правой руки.* Мысленно сжимаем правой рукой провод так, что большой палец укажет направление тока i, тогда пальцы охвата провода укажут направление $\overrightarrow{H}$ (см. рис. 4.7).

– *Правило трех пальцев правой руки.* Большой палец на проводе указывает направление тока i, указательный показывает точку, где находится $\overrightarrow{H}$, а средний — направление $\overrightarrow{H}$. Последнее правило вытекает из закона Био-Савара (см. рис. 4.5).

Вопрос. Определить напряженность магнитного поля вокруг бесконечного прямолинейного проводника радиусом a (рис. 4.7).

Ответ. Прямолинейный бесконечный проводник направлен по оси Oz как по оси симметрии. Линии поля формируют окружность с центром O. Теорема Ампера определяет напряженность магнитного поля для силовой линии радиусом r.

$$\begin{cases} H\ell = i, \\ \ell = 2\pi r, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{i}{2\pi r} \ (\text{для } r \geqslant a).$$

Вопрос. Определить напряженность магнитного поля в тороидальной обмотке с числом витков N.

Ответ. Для каждой точки внутри тора теорема Ампера даст напряженность магнитного поля для силовой линии поля радиусом r. Вне тора напряженность будет равна нулю.

$$\begin{cases} H\ell = Ni, \\ \ell = 2\pi r, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{Ni}{2\pi r} \ (\text{для } r \geqslant a).$$

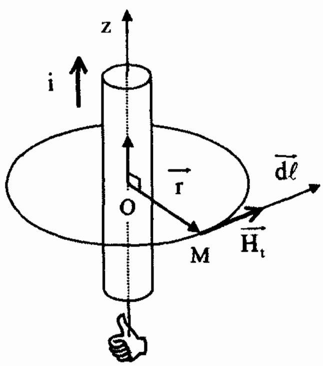


Рис. 4.7. Бесконечный прямолинейный проводник

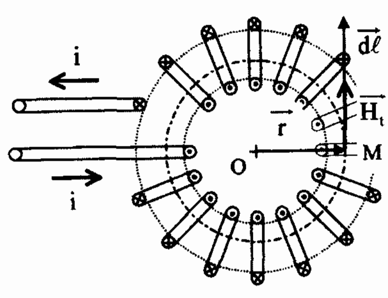


Рис. 4.8. Тор

Вопрос. Определить напряженность магнитного поля внутри «длинного» соленоида длиной L с числом витков N.

Ответ. Полагая, что диаметр соленоида мал по сравнению с его длиной L, по теореме Ампера получим напряженность магнитного поля внутри соленоида. Можно представить также, что речь идет о развернутом торе длиной $L = 2\pi r$. Откуда:

$$H = \frac{Ni}{L} \text{ (внутри соленоида).}$$

4.2. Магнитная индукция

Обычно напряженность магнитного поля меняет свойства среды, в которой она находится. Она наводит поле магнитной индукции. Таким образом, вектору напряженности магнитного поля $\vec{H}$ соответствует вектор магнитной индукции

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \text{ с единицами измерения Тл} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2},$$

где B выражается в тесла (Тл); μ — абсолютная магнитная проницаемость среды, выраженная в Гн/м.

Примечание. Искусственный магнит может навести в воздухе поле в несколько тесла. Планета Земля наводит в окружающем ее пространстве очень слабое поле индукцией менее миллионной доли тесла. Несмотря на это оно на протяжении веков позволяет земным, воздушным и морским навигаторам ориентироваться на поверхности нашей планеты, используя в качестве детектора компас.

4.3. Немагнитные среды

В вакууме векторы напряженности магнитного поля и индукции пропорциональны и коллинеарны:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} \text{ с единицами измерения Тл} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — абсолютная проницаемость вакуума.

О слабо возмущаемых напряженностью магнитного поля средах говорят, что они немагнитные (воздух, вода, медь, нержавеющая сталь, алюминий, дерево и т. д.). В них проницаемость близка к абсолютной проницаемости вакуума. Векторы напряженности магнитного поля и индукции почти пропорциональны и коллинеарны.

$$\mu \approx \mu_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \approx \mu_0\vec{H}.$$

4.4. Ферромагнитные среды

И напротив, когда среды сильно изменяются под действием напряженности магнитного поля, говорят, что они ферромагнитные, даже если они не содержат железа. Это мягкая сталь, никель, хром, ферриты, кобальт и т. д. В этих средах магнитная индукция поля зависит от напряженности магнитного поля и от прошлого состояния магнитной среды.

Внимание! В ферромагнитном теле векторы напряженности магнитного поля и индукции не пропорциональны. При малых значениях напряженности магнитного поля магнитная индукция почти пропорциональна H. С увеличением H пропорциональность нарушается, и выше некоторого значения H магнитная индукция практически не растет — среда насыщается.

4.4.1. Расчет напряженности магнитного поля и индукции

Метод

Прежде всего, нужно рассчитать напряженность магнитного поля, а затем, исходя из кривой намагничивания $B = f(H)$ среды, получить из нее значение магнитной индукции (см. рис. 4.9).

4.4.2. Относительная проницаемость среды μ_r

Для некоторой точки P кривой намагничивания (см. рис. 4.9) можно записать:

$$B = \mu H, \quad \text{где} \quad \mu = \mu_r \mu_0$$

с единицами измерения Гн/м, μ_r — относительная проницаемость среды по отношению к вакууму.

Пример 4.4.1. Для железа μ_r составляет порядка 1000, а для ферритов HF она составляет порядка 10 000.

Внимание! Относительная проницаемость ферромагнитной среды величина не постоянная. Она является функцией: $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$, зависящей от напряженности H.

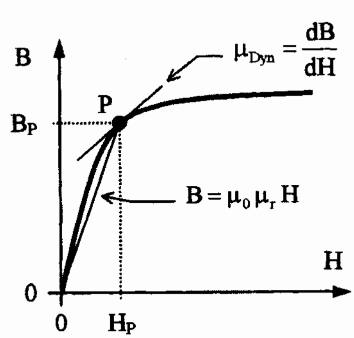


Рис. 4.9. Кривая намагничивания

4.4.3. Динамическая проницаемость

Когда магнитное тело несколько раз подвергается воздействию сильного магнитного поля, изменяющего периодически направление, кривая намагничивания стабилизируется в виде цикла (петли) гистерезиса (рис. 4.10).

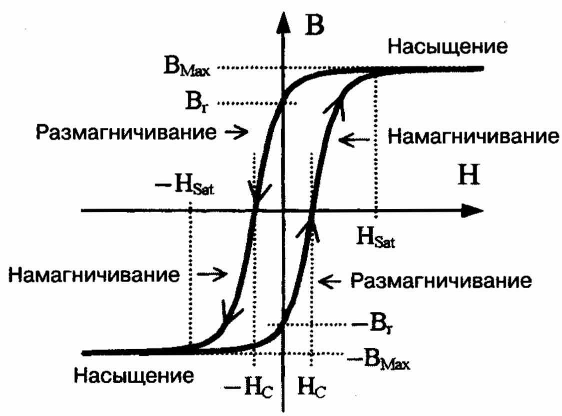


Рис. 4.10. Цикл гистерезиса

• ***Насыщение ферромагнитного тела.*** Как только напряженность магнитного поля превосходит напряженность насыщения H_{Sat} по абсолютному значению, магнитная индукция больше не увеличивается — тело насыщено.

• ***Остаточная индукция.*** Если снять напряженность магнитного поля ($H = 0$), магнитная индукция, не равная нулю, останется. Она называется остаточной индукцией (B_r). Это свойство используется для изготовления постоянных магнитов и для производства магнитных записей (эффект магнитной памяти).

• ***Размагничивание ферромагнитного тела.*** Для устранения остаточной намагниченности нужно приложить обратно направленное поле, называемое *коэрцитивной силой* (H_C). Но ее воздействие перемагничивает материал в другом направлении. Остается единственное решение: повторить несколько раз цикл гистерезиса, постепенно уменьшая напряженность H до ее полного устранения (стирающая головка аудио- и видеомагнитофонов).

Примечание. Магнитомягкие материалы (например, железо) имеют узкую петлю гистерезиса. Размагничивание осуществляется просто. Тогда как магнитотвердые материалы (например, сталь) имеют широкую петлю гистерезиса. Для их размагничивания нужна большая напряженность магнитного поля. Поэтому постоянные магниты изготавливаются из магнитотвердых материалов.

4.4.4. Магнитные потери

Реализация цикла гистерезиса сопровождается потерями энергии (намагничивание в одном, затем в другом направлении).

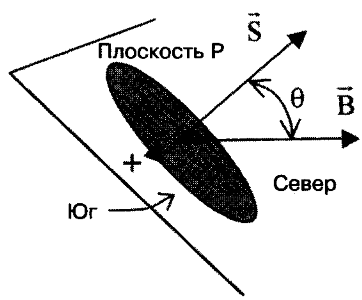
Следует заметить также, что ферромагнитные потери вызываются также перемещением электронов проводимости материалов, описывающих окружность (токи Фуко).

Эти потери P_{Fer} вызывают нагрев материала. Они пропорциональны квадрату частоты тока возбуждения. В первом приближении можно представить эти потери как потери в фиктивном сопротивлении R_F, которое рассеивает такую же тепловую мощность.

4.5. Поток магнитной индукции

4.5.1. Ориентирование поверхности S (рис. 4.11)

Рис. 4.11. Положение поверхности S. Поток через поверхность S



Поверхность представим вектором $\vec{S}$ с модулем, равным площади поверхности. Этот вектор направлен по нормали к поверхности. Его направление (условное) определяется с помощью замкнутой кривой, расположенной в начале вектора, представляющего поверхность.

4.5.2. Поток через поверхность. Определения

Таблица 4.2. Определения потока вектора $\vec{B}$ через поверхность S

$\varphi_S(\vec{B})$: **Поток вектора магнитной индукции через поверхность S** **Единицы измерения:** Вб = Тл · м² **(Вб — вебер)**	
Алгебраическая форма	$\varphi_S(B) = BS\cos(\theta)$
Векторная форма (скалярное произведение)	$\varphi_S(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S}$
Интегральная форма	$\varphi_S(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$

Поток является величиной алгебраической и выражает поток вектора магнитной индукции через поверхность S. Его расчет требует ориентирования поверхности S (см. рис. 4.11).

4.5.3. Идеальная магнитная цепь (ИМЦ)

Это цепь, в которой все магнитные силовые линии сосредоточены в материале, говорят, что цепь не имеет магнитного рассеяния. Тем не менее, в ней есть магнитные потери в железе P_{Fer}.

Пример 4.5.2. Тор (см. рис. 4.8) представляет собой почти идеальную магнитную цепь.

Примечание. В идеальной магнитной цепи поток магнитной индукции консервативен (рис. 4.12). Это означает, что поток, выходящий из боковой поверхности $S_{бок}$, равен нулю. Следовательно,

$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad B_1 S_1 = B_2 S_2.$$

Таким образом, с уменьшением сечения магнитная индукция повышается. Если $S_1 > S_2$, то при $B_1 S_1 = B_2 S_2$ получим $B_1 < B_2$.

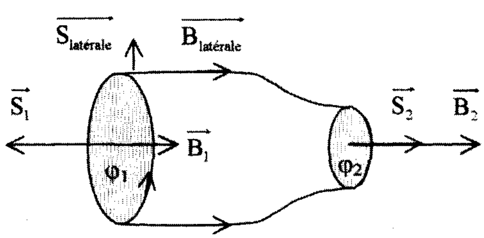


Рис. 4.12. Консервативный магнитный поток идеальной магнитной цепи

Примечание. Идеальная магнитная цепь неизбежно замкнута на саму себя.

4.6. Магнитное сопротивление идеальной магнитной цепи

• ***Закон Гопкинсона.*** N витков с током i, охватывающие идеальную магнитную цепь, являются источником возбуждения магнитного поля, создавая магнитную индукцию.

Напряженность H вектора магнитного поля вдоль замкнутой линии поля (теорема Ампера) составит $H\ell = Ni$. Это магнитное возбуждение создает магнитную индукцию в идеальной цепи $B = \mu H$. Магнитный поток через сечение магнитной цепи запишется в виде: $\varphi = BS = \mu HS = \frac{\mu NiS}{\ell}$, откуда $Ni = \frac{1}{\mu}\frac{\ell}{S}\varphi$.

Это *соотношение Гопкинсона*, которое запишется как:

$$\varepsilon = \Re\varphi \text{ с единицами измерения } \mathrm{А} = \mathrm{Гн}^{-1}\mathrm{Вб},$$

где $\varepsilon = \mathrm{N}i$, $\Re = \frac{1}{\mu}\frac{\ell}{S}$ с единицами измерения $\mathrm{Гн}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Гн/м}}\frac{\mathrm{м}}{\mathrm{м}^2}$.

Здесь ε называется магнитодвижущей силой и измеряется в амперах (А); φ — магнитный поток выражается в веберах (Вб); $\Re$ — магнитное сопротивление, выражается в обратной единице измерения индуктивности генри ($\mathrm{Гн}^{-1}$).

- ***Аналогия с законом Ома.***

Таблица 4.3. Подобие законов Гопкинсона и Ома

Закон Гопкинсона	Закон Ома
$\varepsilon = \mathbb{R}\varphi$. Единицы: $\mathrm{А} = \mathrm{Гн}^{-1}\mathrm{Вб}$	$u = \mathrm{R}i$. Единицы: $\mathrm{В} = \mathrm{Ом} \cdot \mathrm{А}$
ε — магнитодвижущая сила в амперах или ампер-витках	u — напряжение в вольтах (В)
φ — магнитный поток в веберах (Вб)	i — ток в амперах (А)
$\Re$ — магнитное сопротивление $\Re = \frac{1}{\mu}\frac{1}{S}$. Единицы: $\mathrm{Гн}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Гн/м}}\frac{\mathrm{м}}{\mathrm{м}^2}$	R — сопротивление в омах (Ом) $\mathrm{R} = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S}$. Единицы: $\mathrm{Ом} = \mathrm{Ом} \cdot \mathrm{м}\frac{\mathrm{м}}{\mathrm{м}^2}$

> ***Метод***
> Из аналогичных законов и теорем к законам и теоремам, приведенным в гл. 2, следует: можно установить общие законы электричества.

Вопрос. Для магнитной цепи (рис. 4.13) привести эквивалентную схему замещения. Затем дать выражение эквивалентного магнитного сопротивления магнитной цепи.

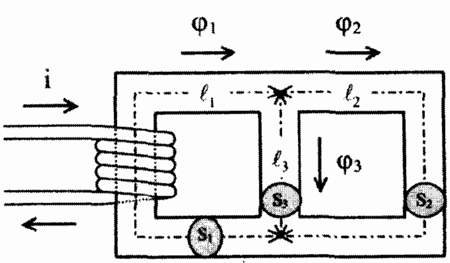


Рис. 4.13. Пример магнитной цепи

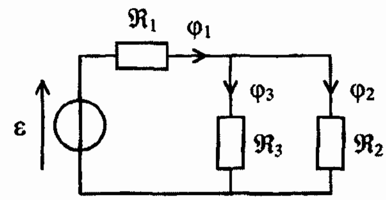


Рис. 4.14. Ее эквивалентная схема замещения

Ответ. Эквивалентная схема замещения магнитной цепи приведена на рис. 4.14. Эквивалентное магнитное сопротивление определится как:

$$\Re_{\text{экв}} = \Re_1 + (\Re_2 // \Re_3),$$

где знак // означает параллельное сопротивление;

$$\Re_1 = \frac{1}{\mu_1}\frac{\ell_1}{S_1}; \quad \Re_2 = \frac{1}{\mu_2}\frac{\ell_2}{S_2}; \quad \Re_3 = \frac{1}{\mu_3}\frac{\ell_3}{S_3}.$$

Уравнением, эквивалентным закону узлов, будет: $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3$. Уравнением, эквивалентным закону контуров, будет:

$$\varepsilon = \Re_1\varphi_1 = \Re_2\varphi_2 = \Re_3\varphi_3 \quad \text{и} \quad \varepsilon = \Re_{\text{экв}}\varphi_1.$$

Примечание. Расчет магнитного сопротивления требует знания магнитной проницаемости. Если можно рассматривать постоянство магнитных проницаемостей, то задача решается просто. Но в общем случае (ферромагнитные тела) магнитная проницаемость среды является функцией напряженности H магнитного поля. Тогда следует начинать решения «сначала» перебором известных и неизвестных данных.

4.7. Поток самоиндукции

4.7.1. Физическое явление

Если электрическая цепь с током i наводит в окружающей среде магнитное поле, то созданный магнитный поток охватывает саму электрическую цепь. Тогда говорят, что имеет место поток *самоиндукции.*

Если катушка электрической цепи содержит N витков сечением S, то полная поверхность, пронизанная потоком, составит $S_{\text{полн}} = NS$.

4.7.2. Индуктивность. Определение

Полный поток является функцией тока i, геометрических и магнитных свойств (μ) цепи. Эта характеристическая величина цепи и ее магнитной среды называется *индуктивностью* или *собственной индуктивностью цепи.*

$$\varphi_{\text{полн}} = Li \text{ с единицами измерения Вб} = \text{Гн} \cdot \text{А},$$

где $\varphi_{\text{полн}}$ — полный поток через $S_{\text{полн}}$, выражается в веберах (Вб); L — индуктивность, выражается в генри (Гн).

Индуктивность может быть выражена в функции магнитного сопротивления:

$$\begin{cases} Ni = \mathbb{R}\varphi, \\ \psi = Li, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N^2}{\mathbb{R}} \text{ с единицами измерения Гн} = 1/\text{Гн}^{-1}.$$

Внимание! Индуктивность является константой, если константой является магнитная проницаемость среды и если магнитная цепь недеформируема. В противном случае индуктивность L зависит от напряженности магнитного поля, т. е. от тока i.

Вопрос. Определить индуктивность тора сечением S и средним радиусом $r_{ср}$, содержащего N витков (см. рис. 4.8).

Ответ. Внутри тора напряженность магнитного поля составит:

$$H = \frac{Ni}{2\pi r} \text{ для линии поля радиусом r.}$$

Магнитная индукция составит: $B = \mu H = \frac{\mu Ni}{2\pi r}$.

Упрощающая гипотеза: рассматривается, что средняя магнитная индукция в торе равна ее значению на среднем радиусе.

$$B_{ср} \approx \frac{\mu Ni}{2\pi r_{ср}}.$$

Поток через поверхность S, т. е. для одного витка составит:

$$\varphi = B_{ср}S \approx \frac{\mu NS}{2\pi r_{ср}} i.$$

Полный поток (потокосцепление) через $S_{полн} = NS$, т. е. для N витков, составит:

$$\psi = B_{ср}S_{полн} \approx \frac{\mu NS_{полн}}{2\pi r_{ср}} i = \frac{\mu N^2 S}{2\pi r_{ср}} i,$$

откуда определяем индуктивность:

$$L \approx \frac{\mu NS}{2\pi r_{ср}},$$

которая запишется как

$$L \approx \frac{N^2}{R_м}, \quad \text{где} \quad R_м \approx \frac{1}{\mu} \frac{2\pi r_{ср}}{S}.$$

4.8. Цепи с переменным потоком

4.8.1. Физическое явление. Закон Фарадея

Идея: всякое *воздействие* на среду сопровождается ее *реакцией*, имеющей тенденцию *противодействия* источнику воздействия. В электромагнетизме, если в цепи сечением S протекает ток i, то возникает поток самоиндукции $\varphi_{полн}$, пронизывающий эту цепь. Тогда всякое действие на изменение магнитного потока вызовет возникновение электрической величины, стремящейся противодействовать этому изменению. (Действие $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Противодействие). Такая реакция может принимать множество аспектов: модификации геометрической характеристики цепи (деформация или перемещение), появления тока i_R, встречного току i. Можно рассматривать, что этот ток i_R вызван напряжением: это закон Фарадея.

4.8.2. Закон Фарадея

При изменении потока магнитного поля в фиксированной цепи или при изменении геометрических свойств цепи (перемещение или деформация) в магнитном поле возникает наведенное (индуцированное) напряжение. Это напряжение для потребителя определяется как:

$$d\varphi_{\text{полн}} = u dt \text{ с единицами измерения Вб} = \text{В} \cdot \text{с}.$$

Если $L = \text{const}$ ($\mu = \text{const}$, и цепь неподвижная и недеформируемая), получим классическое выражение:

$$u = L\frac{di}{dt} \quad \text{или} \quad e = -L\frac{di}{dt} \text{ с единицами измерения В} = \text{Гн} \cdot \text{А/с}.$$

Примечание. Индуцированное напряжение направлено против изменения ψ (и соответственно тока), породившего это напряжение.

Пример 4.8.3. См. гл. 13. Индуктивно не связанные катушки.

4.8.3. Правило наибольшего потока

При наличии возможности геометрия (сечение, длина) или магнитная среда идеальной магнитной цепи могут изменяться (перемещение или деформация) так, чтобы пронизывающий ее поток был наибольшим. Это проявляется уменьшением магнитного сопротивления и появлением магнитных сил.

4.8.4. Электромагниты

• ***Устройство и принцип действия.*** Электромагнит состоит из ферромагнитного сердечника, охваченного обмоткой с большим числом витков (от нескольких сотен до нескольких тысяч). Он может питаться постоянным или переменным током. Под влиянием магнитного поля, созданного обмоткой, сердечник намагничивается. Он создает магнитную индукцию. Поток, стремясь к наибольшему значению, притягивает все ферромагнитные тела, способные подниматься (уменьшение магнитного сопротивления вследствие увеличения магнитной проводимости). Он притягивает также подвижные детали с замыканием или размыканием контактов (коммутационная аппаратура — реле, контакторы и пр.).

• ***Подъемная сила электромагнита.*** При контакте деталей (зазор равен нулю), подъемная сила определяется как:

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0},$$

где F — подъемная сила, выраженная в ньютонах (Н); B — магнитная индукция на поверхности сердечника, выраженная в тесла (Тл); S — полная поверхность между сердечником и притянутыми ферромагнитными деталями ($м^2$).

Примечание. В электромагнитах и трансформаторах электромагнитные силы, стремящиеся увеличить магнитный поток, пропорциональны квадрату синусоидальной магнитной индукции B:

$$B = B_{макс} \cos(2\pi ft) \Rightarrow F \approx F_{макс} \cos^2(2\pi ft) = \frac{F_{макс}}{2}\left[1 + \cos(4\pi ft)\right].$$

Эта сила имеет как постоянную составляющую, так и составляющую вибрационную с частотой 2f, т. е. 100 Гц при питании от промышленных сетей. Этому соответствует шум, создаваемый пластинами однофазных трансформаторов и электромагнитами.

ГЛАВА 5

УСТАНОВИВШИЕСЯ СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОФАЗНЫХ СИСТЕМАХ

5.1. Свойства синусоидальных величин

• ***Синусоидальное напряжение.*** Временна́я диаграмма приведена на рис. 5.1. Соответствующая терминология дана в табл. 5.1. Выражение в функции времени имеет вид:

$$u = u(t) = U_{Max}\sin(\omega t + \varphi_{0,u}) = U_{Max}\sin(\omega(t + t_{0,u}))), \quad \text{где} \quad \varphi_{0,u} = \omega t_{0,u}.$$

Здесь $\omega = 2\pi f$ с единицами измерения рад/с = рад · Гц; $f = 1/T$, Гц = 1/с; $\omega T = 2\pi$ с единицами измерения (рад/с) · с = рад.

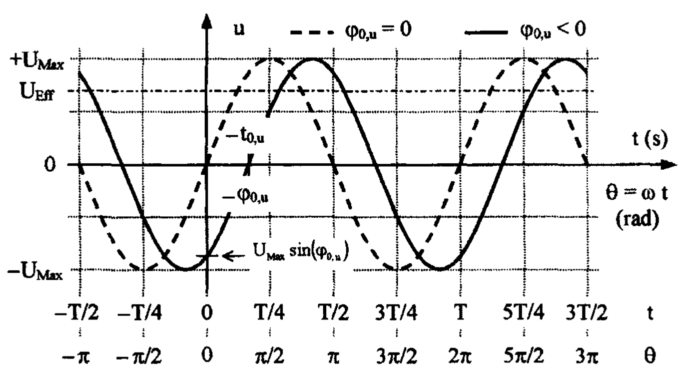


Рис. 5.1. Хронограмма $u = u(t) = U_{Max}\sin(\omega t + \varphi_{0,u})$

Внимание! Значение $\varphi_{0,u}$ может входить в выражение синуса как со знаком «+», как здесь, так и со знаком «−».

Среднее $U_{ср}$ и действующее U значения за некоторое число периодов составит:

$$U_{ср} = 0 \quad \text{и} \quad U = \frac{U_{Max}}{\sqrt{2}}.$$

Таблица 5.1. Терминология синусоидальных величин

Обозначение	Название	Единицы
t	Время	Секунда (с)
$u = u(t)$	Мгновенное значение напряжения	Вольт (В)
U_{Max}	Амплитудное значение напряжения	Вольт (В)
$U_{ср}$	Среднее значение напряжения	Вольт (В)
U	Действующее значение напряжения	Вольт (В)
ω	Угловая частота (пульсация)	Радиан в секунду (рад/с)
$\varphi_{0,u}$	Начальная фаза (при $t = 0$)	Радиан (рад)
$\varphi_u = \varphi_u(t) = \omega t + \varphi_{0,u}$	Фаза при значении времени t	Радиан (рад)
T	Период	Секунда (с)
f	Частота	Герц (Гц)

Пример 5.1.1. Напряжение в энергетической системе Франции имеет следующие характеристики:

$$U \approx 230 \text{ В}; \quad U_М = 325 \text{ В}; f = 50 \text{ Гц}; \quad T = 20 \text{ мс}; \quad \omega = 314{,}16 \text{ рад/с}.$$

• ***Произвольный синусоидальный сигнал.*** Выражения и определения, приведенные для синусоидального напряжения, остаются справедливыми для любой синусоидальной величины.

$$s = s(t) = S_{Max} \sin(\omega t + \varphi_{0,s}).$$

Пример 5.1.2. Выражение синусоидального тока в функции времени:

$$i = i(t) = I_{Max} \sin(\omega t + \varphi_{0,i}).$$

• ***Фазовый сдвиг.*** Фазовым сдвигом (смещением по фазе) синусоидального сигнала по отношению к другому синусоидальному сигналу называется разность между фазами этих сигналов.

Пример 5.1.3. Фазовый сдвиг напряжения u по отношению к току i будет:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i} = \omega(t_{0,u} - t_{0,i}).$$

Если $\varphi = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i} > 0$, то напряжение опережает ток.
Если $\varphi = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i} < 0$, то напряжение отстает от тока.

> ***Метод***
> Для определения начала отсчета фазы удобно обозначить нулевой фазу сигнала, принятого за основной.

Пример 5.1.4. Приняв произвольно $\varphi_{0,i} = 0$, имеем $\varphi = \varphi_{0,u}$, откуда:

$$i = i(t) = I_{Max} \sin(\omega t) \quad \text{и} \quad u = u(t) = U_{Max} \sin(\omega t + \varphi).$$

5.2. Установившиеся синусоидальные процессы. Методы расчетов

Когда линейная электрическая цепь (т. е. состоящая из линейных двухполюсников) питается непрерывно (все переходные процессы затухли) от источника энергии с синусоидально изменяющимся напряжением, то все электрические величины цепи также синусоидальны и той же частоты, что и источник. Тогда говорят, что имеем *принужденный установившийся синусоидальный режим* или *установившийся синусоидальный режим.*

Разумеется, расчеты мгновенных значений остаются возможными, но очень скоро эта проблема становится довольно деликатной. Чтобы упростить расчеты, используют два способа, абстрагируясь от переменной времени: комплексная формализация задачи или векторное построение Френеля.

Внимание! Законы узлов и контуров (законы Кирхгофа) и теоремы (суперпозиции, Тевенена, Нортона, Миллмана и т. п.), приведенные в гл. 2, справедливы при условии их использования для мгновенных значений или при их представления для комплексных расчетов или расчетов в векторной форме.

Примечание. Если в цепи имеется несколько источников, они должны быть синхронизированными и иметь одну и ту же частоту.

5.2.1. Векторное построение Френеля

Метод

Каждой синусоидальной величине соответствует вектор и наоборот (табл. 5.2).

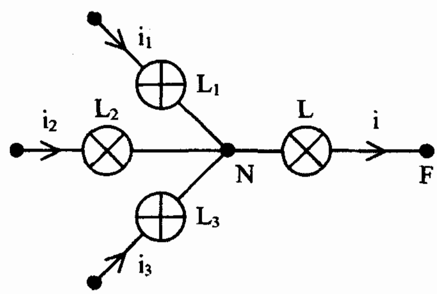
Таблица 5.2. Соответствие вектора синусоидальной величине

Синусоидальная величина	Соответствующий вектор
Мгновенное значение $u = u(t) = U_{Max} \sin(\omega t + \varphi_{0,u})$	Вектор $\vec{U}$
Амплитуда $U_м$	Модуль $\lVert\vec{U}\rVert = U_{Max}$
Фаза при $t = 0$: $\varphi_{0,u}$	Полярный угол: $\varphi_{0,u}$

Вопрос. В схеме (рис. 5.2) определить ток в лампе L, зная симметричные трехфазные синусоидальные токи:

$i_1 = I_{Max}\sin(\omega t)$; $i_2 = I_{Max}\sin(\omega t + 2\pi/3)$; $i_3 = I_{Max}\sin(\omega t + 4\pi/3)$,
если $I_{Max} = 1$ А и $f = 50$ Гц.

Рис. 5.2. Пример трехфазных синусоидальных токов



Ответ. Каждому току соответствует вектор:

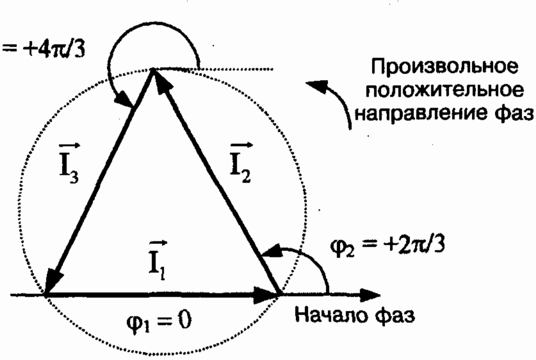
$$i_1 \leftrightarrow \vec{I}_1;\quad i_2 \leftrightarrow \vec{I}_2;\quad i_3 \leftrightarrow \vec{I}_3;\quad i \leftrightarrow \vec{I}.$$

- ***Закон узлов.***

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad \leftrightarrow \quad \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3.$$

Графически получаем векторную сумму токов (рис. 5.3), зная длину I_M каждого вектора. Получаем результирующий вектор, равный нулю, следовательно, и амплитуда результирующего тока i равна нулю.

Рис. 5.3. Векторное построение Френеля



Примечание. Лампа L не зажигается, и проводник F бесполезен. Прямым использованием этого является передача электрической энергии трехфазными линиями без возврата тока: экономятся миллионы километров электрических кабелей.

5.2.2. Использование комплексных чисел

Для упрощения расчетов принимается, что каждой реальной синусоидальной функции времени $u = u(t)$ соответствует комплексная функция времени $\underline{u} = \underline{u(t)}$. Если величина выражается через синус (соответственно — косинус), то она является мнимой (соответственно — действительной) частью комплексной функции (табл. 5.3).

Таблица 5.3. Соответствие комплексных и синусоидальных функций

Синусоидальная переменная	Комплексная функция
Если $u = u(t) = U_м \sin(\omega t + \varphi_{0,u})$, то $u = \mathrm{Im}(\underline{u})$ Если $u = u(t) = U_м \cos(\omega t + \varphi_{0,u})$, то $u = \mathrm{Re}(\underline{u})$	$\underline{u} = U_м e^{j(\omega t + \varphi_{0,u})} =$ $= U_м e^{j\varphi_{0,u}} e^{j\omega t}$

Внимание! Модуль $|\underline{U}| = U_м$ (амплитудное значение), но не U (действующее значение), как это иногда бывает, когда произвольно вводится коэффициент $\sqrt{2}$.

Примечание. В линейной системе, когда все источники синхронны и имеют одну и ту же частоту, можно абстрагироваться членом $\exp(j\omega)$, что позволяет работать только с комплексными амплитудами.

Метод

Каждой синусоидальной величине соответствует комплексная величина и наоборот (табл. 5.4).

Таблица 5.4. Синусоидальная величина и комплексное число

Синусоидальная переменная	Комплексная функция
Мгновенное значение $u = u(t) = U_{Max} \sin(\omega t + \varphi_{0,u})$	Комплексное число $\underline{U} = U_{Max} e^{j\varphi_{0,u}}$
Амплитуда U_{Max}	Модуль $\lvert\underline{U}\rvert = U_{Max}$
Фаза при $t = 0$: $\varphi_{0,u}$	Аргумент $\mathrm{Arg}(\underline{U}) = \varphi_{0,u}$

Вопрос. Из предыдущего примера (см. рис. 5.2) определить ток в лампе L.
Ответ. Каждому току соответствует комплексное число:

$$i \leftrightarrow \underline{I} = I_{Max} e^{j\varphi}; \qquad i_1 \leftrightarrow \underline{I_1} = I_{Max};$$
$$i_2 \leftrightarrow \underline{I_2} = I_{Max} e^{j2\pi/3}; \qquad i_3 \leftrightarrow \underline{I_3} = I_{Max} e^{j4\pi/3}.$$

• ***Закон узлов.***

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \qquad \leftrightarrow \qquad \underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3},$$

откуда:

$$\underline{I} = I_{Max} \left[1 + e^{j2\pi/3} + e^{j4\pi/3}\right] =$$
$$= I_{Max} \left[1 + \cos(2\pi/3) + j\sin(2\pi/3) + j\sin(4\pi/3)\right] = 0.$$

5.2.3. Выражения для комплексных чисел

Декартова форма $\underline{Z} = (a, b) \quad (a, b) \in \mathbf{R}^2$	$\underline{Z} = a + jb$
Полярная форма $\underline{Z} = [\rho; \varphi] \quad \rho \geqslant 0$	$\underline{Z} = \rho e^{j\varphi} = \rho[\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)]$
Комплексное сопряжение $\overline{\underline{Z}}$	$\overline{\underline{Z}} = a - jb = \rho e^{-j\varphi}$
Действительная часть $a = \mathrm{Re}(\underline{Z})$	$a = \rho\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(\underline{Z} + \overline{\underline{Z}})$
Мнимая часть $b = \mathrm{Im}(\underline{Z})$	$b = \rho\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}(\underline{Z} - \overline{\underline{Z}})$
Модуль $\lvert\underline{Z}\rvert = \rho \quad (\rho \geqslant 0)$	$\rho^2 = \underline{Z}\overline{\underline{Z}} = a^2 + b^2$
Аргумент $\mathrm{Arg}(\underline{Z}) = \varphi$ (период 2π)	$\rho \neq 0 \Rightarrow \cos(\varphi) = a/\rho;\ \sin(\varphi) = b/\rho$
	$a \neq 0 \Rightarrow \mathrm{tg}(\varphi) = b/a$
	$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\,(b/a) \\ a < 0 \Rightarrow \varphi = \pm\pi + \mathrm{arctg}\,(b/a) \end{cases}$
Экспоненциальная форма	$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$
Формула Эйлера	$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2};\ \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}$
Формула Муавра	$(e^{j\varphi})^n = e^{jn\varphi} \quad (n \in \mathbf{N})$
Сумма (декартова форма)	$\underline{Z_1} + \underline{Z_2} = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
Произведение (полярная форма)	$\underline{Z_1}\,\underline{Z_2} = \rho_1\rho_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$
Частное (полярная форма)	$\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$
Степень n^i; $n \in \mathbf{N}$	$(\underline{Z})^n = \rho^n e^{jn\varphi}$
Корень n-й степени $n \in \mathbf{N}$	$(\sqrt[n]{\underline{Z}})_k = \sqrt[n]{\rho} e^{j(\varphi+2k\pi)/n};\ k \in \{0, 1, 2 ... n-1\}$
Произведение вещественных частей	$a_1 a_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{Z_1}\,\underline{Z_2} + \underline{Z_1}\,\overline{\underline{Z_2}})$
Произведение мнимых частей	$b_1 b_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{Z_1}\,\underline{Z_2} - \underline{Z_1}\,\overline{\underline{Z_2}})$
Перекрестное произведение	$b_1 a_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\underline{Z_1}\,\underline{Z_2} + \underline{Z_1}\,\overline{\underline{Z_2}})$ $a_1 b_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\underline{Z_1}\,\underline{Z_2} - \underline{Z_1}\,\overline{\underline{Z_2}})$

Внимание! Функция арктангенс отражает значения, содержащиеся между $-\pi/2$ и $+\ \pi/2$.

5.3. Полные комплексные сопротивление и проводимость двухполюсника

Имеем пассивный линейный двухполюсник (рис. 5.4).

• ***Определения.*** *Полное комплексное сопротивление* $\underline{Z}$ двухполюсника определяется соотношением $\underline{u(t)}$ к $\underline{i(t)}$,

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{Max}}{I_{Max}} e^{j\varphi} = |\underline{Z}|\, e^{j\varphi} = R + jX,$$

где $\varphi = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i}$; $R = \mathrm{Re}(\underline{Z}) = |\underline{Z}|\cos(\varphi)$ — *активное* сопротивление; $X = \mathrm{Im}(\underline{Z}) = |\underline{Z}|\sin(\varphi)$ — *реактивное* сопротивление. $|Z|$ и R выражаются в омах.

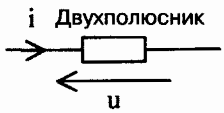


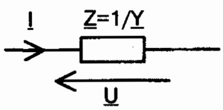
Рис. 5.4. Линейный двухполюсник

Комплексная проводимость $\underline{Y}$ является величиной, обратной комплексному сопротивлению:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB,$$

где $G = \mathrm{Re}(\underline{Y}) = \frac{R}{R^2+X^2}$ — *активная проводимость*; $B = \mathrm{Im}(\underline{Y}) = -\frac{X}{R^2+X^2}$ — *реактивная проводимость*. $\underline{Y}$, G, B выражаются в сименсах (См) или в Ом$^{-1}$.

• ***Электрическая схема с комплексными параметрами. Закон Ома*** (рис. 5.5).

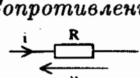
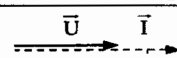
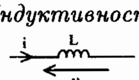
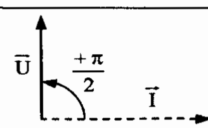
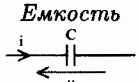
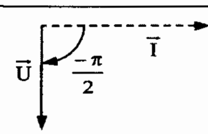


$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}; \quad \underline{I} = \underline{Y}\underline{U}.$$

Рис. 5.5. Комплексные параметры. Закон Ома

• ***Элементарные линейные двухполюсники*** (табл. 5.5).

Таблица 5.5. Элементарные линейные двухполюсники

	Комплексное сопротивление	**Изображение по Френелю**
Сопротивление 	$\underline{Z_R} = R$	
Индуктивность 	$\underline{Z_L} = jL\omega = L\omega e^{+j\pi/2}$	
Емкость 	$\underline{Z_C} = 1/(jC\omega) = e^{-j\pi/2}/C\omega$	

• ***Последовательное соединение полных сопротивлений*** (рис. 5.6). Два двухполюсника соединены последовательно, если по ним протекает один и тот же ток.

Для двух полных сопротивлений:

$\underline{U}_{\text{сум}} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_{\text{экв}}\underline{I}$, где $\underline{Z}_{\text{экв}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$.

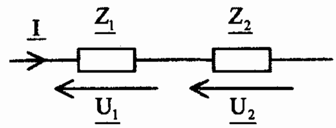


Рис. 5.6. Последовательное соединение

Для n полных сопротивлений:

$$\underline{U}_{\text{сум}} = \sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k = \underline{Z}_{\text{экв}}\underline{I},$$

где $\underline{Z}_{\text{экв}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \underline{Z}_k$.

• ***Параллельное соединение полных сопротивлений*** (рис. 5.7). Два двухполюсника соединены параллельно, если они питаются одним и тем же напряжением.

Для двух полных сопротивлений:

$$\underline{I}_{\text{сум}} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{экв}}},$$

где $\underline{Z}_{\text{экв}} = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ или $\underline{Y}_{\text{экв}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$.

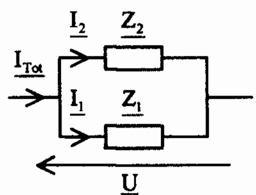


Рис. 5.7. Параллельное соединение

Для n полных сопротивлений:

$$\underline{I}_{\text{сум}} = \sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{экв}}},$$

где $\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{экв}}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\underline{Z}_k}$ или $\underline{Y}_{\text{экв}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \underline{Y}_k$.

5.4. Мощности. Коэффициент мощности

• ***Мгновенная мощность.*** Линейный реактивный двухполюсник питается от источника однофазного синусоидального тока (рис. 5.8).

Имеем:

$i = I_{Max}\sin(\omega t + \varphi_{0i})$ $\qquad u = U_{Max}\sin(\omega t + \varphi_{0u})$.

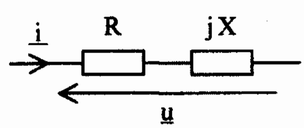


Рис. 5.8. Линейный реактивный двухполюсник

Этим функциям времени соответствуют комплексные функции:

$\underline{i} = I_{Max}e^{j(\omega t + \varphi_{0,i})}$ $\qquad \underline{u} = U_{Max}e^{j(\omega t + \varphi_{0,u})}$.

Мгновенная мощность определится как

$$p = ui = \mathrm{Im}(\underline{u})\mathrm{Im}(\underline{i}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{ui} - \underline{u\bar{i}}), \quad \text{где} \quad \underline{u} = (R + jX)\underline{i}.$$

Выполнив преобразования, получим:

$$p = \frac{RI^2_{Max}}{2}\left[1 - \cos(\omega t + \varphi_{0,i})\right] + \frac{XI^2_{Max}}{2}\sin 2(\omega t + \varphi_{0,i}).$$

Таким образом, мгновенная мощность (p) является суммой мощностей. Мощность, передаваемая сопротивлению называется *активной мгновенной мощностью* (p_A), а передаваемая реактивному сопротивлению называется *мгновенной реактивной мощностью* (p_R).

$$p = p_A + p_R,$$

где $p_A = P[1 - \cos(\omega t + \varphi_{0,i})]$; здесь $P = \frac{RI^2_{Max}}{2}$; $p_R = Q\sin 2(\omega t + \varphi_{0,i})$; здесь $Q = \frac{XI^2_{Max}}{2}$.

Принято называть P — *активной мощностью* и Q — *реактивной мощностью.*

• ***Средняя мощность.*** По определению

$$P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (p_A + p_R)dt.$$

Поскольку среднее значение синусоидальной функции равно нулю, получим:

$$P_{cp} = P \text{ (средняя мощность равна мощности активной).}$$

Примечание. После преобразований мгновенная мощность выразится как:

$$p = P - S\cos(2\omega t + \varphi_{0,u} + \varphi_{0,i}).$$

Следовательно, мгновенная мощность, передаваемая двухполюснику, может также рассматриваться как сумма: *средняя мощность* плюс *гармоническая мощность*. Называемая гармонической мощность представляет собой синусоидальную функцию, изменяющуюся с частотой 2ω и имеющую амплитуду $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, называемую *кажущейся* мощностью[1].

• ***Формулы и соотношения*** (табл. 5.6). Комплексные амплитуды:

$$\underline{U} = U_{Max}e^{j\varphi_{0,u}} \quad \text{и} \quad \underline{I} = U_{Max}e^{j\varphi_{0,i}}.$$

Сдвиг по фазе u по отношению к i: $\varphi = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i}$.

Примечание. $\underline{Z} = R + jX = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}e^{j\varphi} \Rightarrow R = \frac{U}{I}\cos\varphi$ и $X = \frac{U}{I}\sin\varphi$.

• ***Коэффициент мощности.*** Характеризует эффективность использования сети (табл. 5.7)

[1]Ее называют также *полной мощностью.* — *Прим. перев.*

Таблица 5.6. Мощности: формулы и соотношения

Мощность	Единицы	Формулы	Соотношения
комплексная полная		$\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{U}\bar{\underline{I}} = UIe^{j\varphi}$	$\underline{S} = P + jQ$
активная или средняя	ватт (Вт)	$P = UI\cos\varphi = RI^2$	$P = Re(S)$ $P = P_{ср}$
реактивная	вольт-ампер реактивный (вар)	$Q = UI\sin\varphi = XI^2$	$Q = Im(S)$ $Q = P\,tg(\varphi)$
полная	Вольт-ампер (ВА)	$S = UI$	$S = \lvert\underline{S}\rvert = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Таблица 5.7. Коэффициент мощности

Общее определение	Режим синусоидальный и линейный
$f_P = \frac{P}{S}$	$f_P = \frac{P}{S} = \cos\varphi$

• ***Мощности элементарных линейных двухполюсников*** (табл. 5.8).

Таблица 5.8. Мощности элементарных линейных двухполюсников

Элементарный двухполюсник	Активная мощность	Реактивная мощность
R	$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$	0
L	0	$Q = L = \frac{U^2}{L\omega}$
C	0	$Q = -\frac{I^2}{C\omega} = -C\omega U^2$

• ***Физический смысл.*** Активной мощности соответствует активная энергия, потребляемая и преобразуемая в потребителе в термическую, механическую, химическую и т. п. энергии.

Напротив, реактивная мощность соответствует реактивной энергии, которая периодически поступает от источника к потребителю и от потребителя к источнику и т. д., но никогда не расходуется потребителем.

Наличие реактивной мощности приводит к увеличению тока в источнике и в питающей потребитель линии. Это увеличение вызывает повышение потерь и требует увеличения размеров (сечений) средств передачи энергии. Кажущаяся (полная) мощность является фактором, по которому производится выбор размеров линий и источников. Для заданного значения активной мощности, чем меньше коэффициент мощности, тем больше значение тока. Поэтому EDF[2] требует поддерживать высокое значение коэффициента мощности и материально наказывает чрезмерное потребление реактивной энергии[3].

[2]Французская электротехническая компания. — *Прим. перев.*

[3]В российских электрических компаниях — тоже. — *Прим. перев.*

• ***Теорема Бушеро.*** Полная активная (соответственно полная реактивная) мощность, потребляемая группой приемников, равна сумме активных (соответственно реактивных) мощностей, потребляемых каждым приемником.

Таким образом, установка, содержащая n потребителей, питаемая напряжением U при токе I, потребляет активную $P_{\text{сум}}$ и реактивную $Q_{\text{сум}}$ мощности при коэффициенте мощности $f_P = \cos\varphi$:

$$P_{\text{сум}} = \sum_{k=1}^{n} P_k = UI\cos\varphi Q_{\text{сум}} = \sum_{k=1}^{n} UI\sin\varphi.$$

Внимание! Кажущаяся (полная) мощность не складывается.

• ***Повышение коэффициента мощности.*** Если в установке он ниже нормы, то должен быть повышен. Простой метод состоит в параллельном подключении конденсаторов к преимущественно индуктивной нагрузке установки.

Метод

Активные мощности, с одной стороны, и реактивные мощности, с другой стороны, складываются (теорема Бушеро). Полная активная мощность остается неизменной с конденсатором или без него, так как, полагая, что конденсатор идеальный, он не потребляет активной мощности. В установках с индуктивно-активной нагрузкой включение конденсаторов параллельно нагрузке снижает потребление реактивной энергии.

Вопрос. Двигатель, полезная мощность которого составляет $P_{\text{пол}} = 4$ кВт, коэффициент мощности $\cos(\varphi_1) = 0{,}7$ и КПД $= 0{,}85$, подключен к сети 230 В, 50 Гц.

1) Рассчитать активную и реактивную мощности, затем действующее значение тока.

2) Рассчитать емкость конденсаторов для подключения параллельно с двигателем, чтобы поднять коэффициент мощности до 0,9. Рассчитать новое значение действующего тока.

Ответ. 1) Активная и реактивная мощности. Действующее значение тока.

$$P_1 = \frac{P_{\text{пол}}}{\eta} \approx 4{,}7 \text{ кВт};\ Q_1 = P_1 \operatorname{tg}(\varphi_1) \approx 4{,}8 \text{ квар};\ I_1 = \frac{P_1}{U\cos\varphi_1} \approx 29{,}2 \text{ А}.$$

2) Расчет емкости C (рис. 5.9). Действующий ток.

Мощность двигателя (без C):

$$\begin{cases} P_1 = UI_1\cos(\varphi_1); \\ Q_1 = UI_1\sin(\varphi_1) = P_1\operatorname{tg}(\varphi_1). \end{cases}$$

Мощность конденсатора (предположительно идеального):

$$\begin{cases} P_C = 0; \\ Q_C = -C\omega U^2. \end{cases}$$

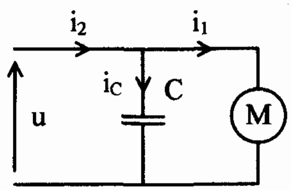


Рис. 5.9. Схема повышения коэффициента мощности

Полная мощность при включенном конденсаторе:

$$\begin{cases} P_2 = UI_2\cos(\varphi_2) = P_1 + P_C = P_1; \\ Q_2 = UI_2\sin(\varphi_2) = Q_1 + Q_C = P_2\operatorname{tg}(\varphi_2), \end{cases}$$

откуда

$$Q_C = Q_2 - Q_1 = P_1\left[\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1\right].$$

Окончательно:

$$C = \frac{P_1\left[\operatorname{tg}(\varphi_1) - \operatorname{tg}(\varphi_2)\right]}{2\pi f U^2} \approx 150 \text{ мкФ}.$$

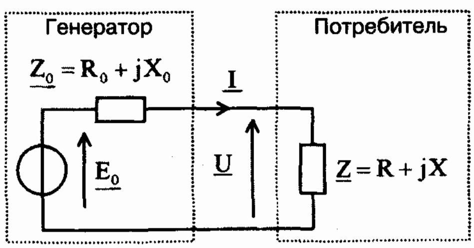
Действующее значение тока после повышения коэффициента мощности составит:

$$\begin{cases} P_1 = UI_1\cos(\varphi_1); \\ P_2 = UI_2\cos(\varphi_2) = P_1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_1\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \approx 22{,}7 \text{ A}.$$

Внимание! Закон узлов справедлив для мгновенных значений ($i_2 = i_1 + i_C$), но не для действующих, так как между ними имеется сдвиг по фазе.

• ***Согласование полного сопротивления по мощности.*** Источник и потребитель согласованы по мощности, если от источника к потребителю передается наибольшая мощность.

Рис. 5.10. Согласование по мощности при источнике напряжения



При источнике напряжения (рис. 5.10). Потребляемая нагрузкой активная мощность составляет:

$$P = RI^2 = \frac{RE_0^2}{(R_0 + R)^2 + (X_0 + X)^2}.$$

Согласование полного сопротивления по мощности реализуется, если, и только если:

$$\underline{Z} = \overline{\underline{Z_0}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G = G_0 \\ B = -B_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_{\text{макс}} = P_{0\text{макс}} = \frac{E_0^2}{4R}.$$

При источнике тока (рис. 5.11). Потребляемая нагрузкой активная мощность составляет:

$$P = GU^2 = \frac{GI_0^2}{(G_0 + G)^2 + (B_0 + B)^2}.$$

Согласование полного сопротивления по мощности реализуется, если и только если:

$$\underline{Z} = \overline{\underline{Z_0}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G = G_0 \\ B = -B_0 \end{cases} \quad \Rightarrow P_{\text{макс}} = P_{0\text{макс}} = \frac{I_0^2}{4G}.$$

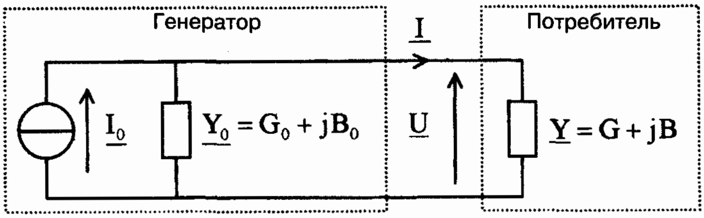


Рис. 5.11. Согласование по мощности при источнике тока

5.5. Добротность. Последовательно-параллельное преобразование

5.5.1. Добротность

• ***Определение.*** Реактивный двухполюсник идеален, если он не потребляет активной мощности (см. § 5.4). Для оценки этого показателя вводят понятие *добротности* f_Q как:

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} \qquad (f_Q \text{ всегда положителен}),$$

где Q — передаваемая диполю реактивная мощность; P — передаваемая диполю активная мощность.

Внимание! Часто добротность обозначают как Q, тогда не путать с реактивной мощностью.

• ***Добротность последовательного двухполюсника*** (рис. 5.12). При этом один и тот же ток протекает по активному и по реактивному сопротивлению. Поэтому:

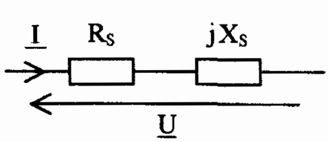


Рис. 5.12. Последовательный двухполюсник

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} = \frac{|X_S|\,I^2}{R_S I^2} = \frac{|X_S|}{R_S}.$$

• ***Добротность последовательного двухполюсника*** (рис. 5.13). При этом одно и то же напряжение приложено к зажимам активного и реактивного сопротивлений.

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} = \frac{U^2/|X_P|}{U^2/|R_P|} = \frac{R_P}{|X_P|}.$$

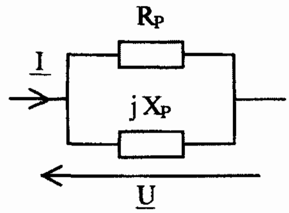


Рис. 5.13. Параллельный двухполюсник

Здесь и далее индекс «P» соответствует параллельному соединению, индекс «S» — последовательному.

Вопрос. На переменном токе при низкой частоте конденсатор моделируют емкостью C, соединенной параллельно с активным сопротивлением R, учитывающим тепловые потери в диэлектрике и ток утечки через изоляцию и корпус (рис. 5.14).

Рассчитать тангенс угла потерь, зная, что угол потерь δ представляет собой фазовый сдвиг тока i_C по отношению к току i_0.

Ответ. Используя делитель тока, получаем:

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{I}_0} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} = RC\omega\frac{(RC\omega+j)}{1+(RC\omega)^2},$$

откуда по определению: $\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{f_P}$ (величина, обратная добротности).

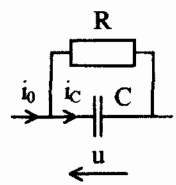


Рис. 5.14. Модель конденсатора

5.5.2. Последовательно-параллельное преобразование

При синусоидальном режиме последовательный и параллельный двухполюсники эквивалентны. Переход от одного к другому выполняется согласно следующим выражениям:

$$R_P = R_S\left(1+f_Q^2\right) \quad \text{и} \quad X_P = X_S\left(1+\frac{1}{f_Q^2}\right).$$

Если $f_Q^2 \gg 1$, то $R_P \approx R_S f_Q^2$ и $X_P \approx X_S$.

Внимание! Добротность зависит от частоты и от ниже изложенных факторов.

5.6. Резонансные цепи

• ***Последовательная резонансная цепь*** (рис. 5.15). Полное комплексное сопротивление определяется как:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \operatorname{Arg}(\underline{Z}) = \operatorname{arctg}\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \end{cases}$$

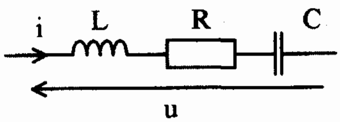


Рис. 5.15. Последовательная резонансная цепь

Это полное сопротивление при резонансе минимально и равно активному сопротивлению:

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad \underline{Z}_{(\omega=\omega_0)} = R.$$

При резонансе ($\omega = \omega_0$) напряжение на зажимах конденсатора и индуктивности наибольшее. Для потребителя имеем:

$$\underline{U} = \underline{U}_R = R\underline{I}; \quad \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega_0} = -jQ_0\underline{U}; \quad \underline{U}_L = jL\omega_0\underline{I} - jQ_0\underline{U},$$

где Q_0 — *коэффициент перенапряжения*, определяемый при резонансе как:

$$Q_0 = \frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{U}|} = \frac{U_L}{U} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{|\underline{U}_C|}{|\underline{U}|} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Тогда полное комплексное сопротивление запишется в виде:

$$\underline{Z} = R\left[1 + jQ_0\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = R\frac{1 - x^2 + jx/Q_0}{jx/Q_0}, \quad \text{где} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Значения модуля в децибелах, фазы в градусах полного комплексного сопротивления приведены на рис. 5.16. Частоты среза (высокая f_H и низкая f_B), а также полоса пропускания (ПП) для +3 дБ минимума определяются как:

$$f_H = \frac{\omega_H}{2\pi} = f_0\left(\frac{1}{2Q_0} + \sqrt{1+\frac{1}{4Q_0^2}}\right); \quad f_B = \frac{\omega_B}{2\pi} = f_0\left(-\frac{1}{2Q_0} + \sqrt{1+\frac{1}{4Q_0^2}}\right).$$

$$\text{ПП}_{(-3\text{дБ})} = f_H - f_B = \frac{f_0}{Q_0}, \ (\text{Гц}), \quad \text{где} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

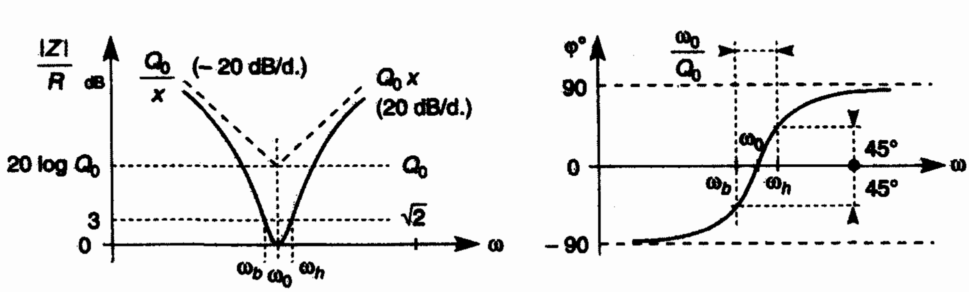


Рис. 5.16. Полное сопротивление последовательной резонансной цепи

Примечание. Коэффициент перенапряжения равен добротности последовательного двухполюсника RC или последовательного двухполюсника RL.

• ***Параллельная резонансная схема, называемая «пробкой».*** Параллельная резонансная цепь изображена на рис. 5.17.

Полная проводимость составит:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2} \\ \operatorname{Arg}(\underline{Y}) = \operatorname{arctg} \frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{G} \end{cases}$$

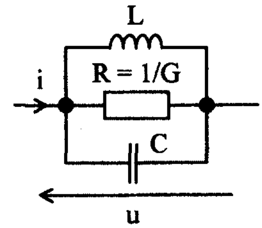


Рис. 5.17. Параллельная резонансная цепь

Эта проводимость является активной (G = 1/R) и наименьшей в случае резонанса:

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \underline{Y}_{(\omega=\omega_0)} = G.$$

При резонансе ($\omega = \omega_0$) токи в конденсаторе и в индуктивности максимальные. Для такой схемы потребителя справедливо:

$$\underline{I} = \underline{I}_R = G\underline{U}; \quad \underline{I}_C = jC\omega_0\underline{U} = jQ_0\underline{I}; \quad \underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{jL\omega_0} = -jQ_0\underline{I},$$

где Q_0 — *коэффициент сверхтока*, определяемый при резонансе как:

$$Q_0 = \frac{|\underline{I}_L|}{|\underline{I}|} = \frac{I_L}{I} = \frac{1}{GL\omega_0} = \frac{|\underline{I}_C|}{|\underline{I}|} = \frac{I_C}{I} = \frac{C\omega_0}{G} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Тогда полная комплексная проводимость составит:

$$\underline{Y} = G\left[1 + jQ_0\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = G\frac{1 - x^2 + jx/Q_0}{jx/Q_0}, \quad \text{где} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0},$$

или полное комплексное сопротивление определится как:

$$\underline{Z} = R\frac{jx/Q_0}{1 - x^2 + jx/Q_0}.$$

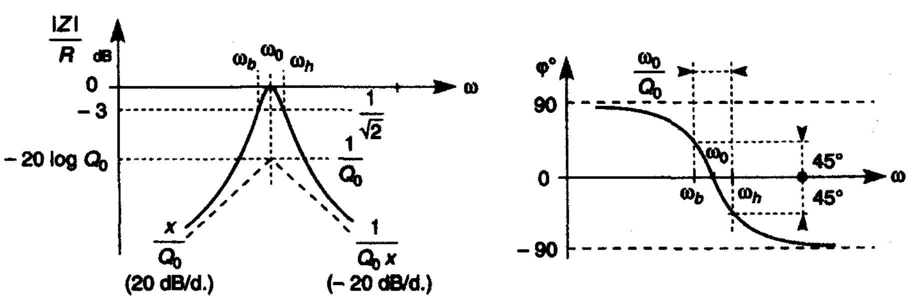


Рис. 5.18. Полное сопротивление параллельной резонансной схемы

Значения модуля в децибелах, фазы в градусах полного комплексного сопротивления приведены на рис. 5.18. Частоты среза (высокая f_H и низкая f_B), а также полоса пропускания (ПП) при −3 дБ максимума те же, что и для последовательной резонансной цепи.

Примечание. Коэффициент сверхтока равен добротности параллельного двухполюсника RC или параллельного двухполюсника RL при $\omega = \omega_0$.

5.7. Частотные свойства. Комплексная передаточная функция

Рассмотрим отклик линейной системы (см. гл. 9) на *гармоническое воздействие* на входе (рис. 5.19).

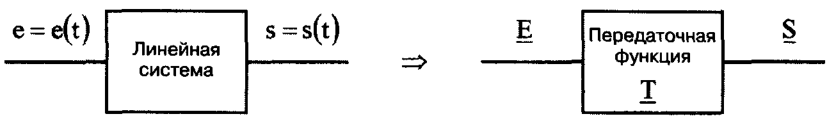


Рис. 5.19. Комплексная передаточная функция линейной системы

Входному синусоидальному сигналу e = e(t) соответствует комплексная функция $\underline{e} = \underline{e(t)}$, а выходному синусоидальному сигналу s = s(t) соответствует комплексная функция $\underline{s} = \underline{s(t)}$ (линейное преобразование).

$$\underline{e} = E_{Max}e^{j(\omega t+\varphi_E)} = \underline{E}e^{j\omega t} \text{ с комплексной амплитудой } \underline{E} = E_{Max}e^{j\varphi_E};$$

$$\underline{s} = S_{Max}e^{j(\omega t+\varphi_S)} = \underline{S}e^{j\omega t} \text{ с комплексной амплитудой } \underline{S} = S_{Max}e^{j\varphi_S}.$$

5.7.1. Передаточная функция

• ***Комплексная (изохронная) передаточная функция, или комплексная передаточная функция T*** (рис. 5.19). Это отношение $\underline{s} = \underline{s(t)}$ к $\underline{e} = \underline{e(t)}$ или $\underline{S}$ к $\underline{E}$ при упрощении путем введения exp(jωt), поскольку имеем одно и то же время и одну и ту же частоту.

$$\underline{T} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S_{Max}}{E_{Max}}e^{j(\varphi s-\varphi e)} = |\underline{T}|\,e^{j\varphi}.$$

• ***Модуль T комплексной передаточной функции $\underline{T}$.***

$$T = |\underline{T}| = \frac{S_м}{E_м} = \frac{S}{E}.$$

• ***Коэффициент передачи комплексной передаточной функции $\underline{T}$.***

$$G = 20\log|\underline{T}|,\ (дБ).$$

• ***Фазовый сдвиг комплексной передаточной функции $\underline{T}$.*** Это сдвиг по фазе s(t) по отношению к e(t)

$$\varphi = \mathrm{Arg}\underline{\mathrm{T}} = \varphi_{\mathrm{S}} - \varphi_{\mathrm{E}},$$

измеряется в радианах (рад) или градусах (°).

• ***Частота среза при −3 дБ.*** Частотами среза, называемыми при −3 дБ, являются те, для которых коэффициент усиления G меньше его максимального значения, практически равного 3 дБ. Точнее, частотами среза, называемыми при −3 дБ, являются те, для которых модуль равен максимальному модулю, деленному на $\sqrt{2}$, что соответствует максимальной мощности сигнала, деленной на 2.

• ***Полоса пропускания.*** Обычно определяют полосу пропускания при −3 дБ как область частот, для которых коэффициент усиления остается больше максимального −3 дБ.

• ***Октава — Декада.*** *Октава* (музыкальный термин) представляет собой такой интервал между двух частот f_2 и f_1, для которого $f_2 = 2f_1$, а *декада* — интервал между двух частот f_2 и f_1, для которого $f_2 = 10f_1$ (рис. 5.20).

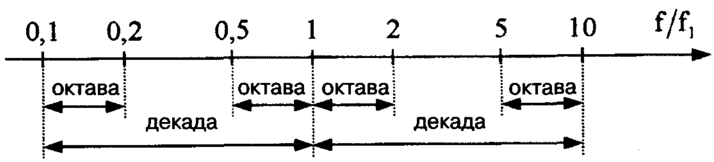


Рис. 5.20. Октавы и декады (масштаб $\log_{10}$)

Примечание. При обработке сигнала часто интересуются его «мощностью». Тогда среднюю мощность периодического сигнала определяют как квадрат его действующего значения (среднее значение сигнала, возведенное в квадрат). Следовательно, передаточную функцию по мощности $\mathrm{T_P}$ и коэффициент усиления по мощности $\mathrm{G_P}$ определяют как:

$$\mathrm{T_P} = \frac{\mathrm{P_S}}{\mathrm{P_E}} = \frac{\mathrm{S}^2}{\mathrm{E}^2} = |\underline{\mathrm{T}}|^2 \quad \text{и} \quad \mathrm{G_P} = 10\log \mathrm{T_P}$$

Вопрос. Имеем фильтр низких частот 1-го порядка (рис. 5.21).

1) Определить комплексную передаточную функцию, ее модуль, коэффициент передачи, фазовый сдвиг и ее частоту среза. На вход подается синусоидальный сигнал $\mathrm{e(t)} = \mathrm{E}_{Max}\cos\omega \mathrm{t}$. Определить выходной сигнал фильтра.

2) Определить передаточную функцию по мощности и ее коэффициент передачи.

Ответ. 1) Передаточная функция:

$$\underline{T} = \frac{\underline{s(t)}}{\underline{e(t)}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}, \quad \text{где} \quad \tau = RC;$$

$$|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}; \quad G = 20\log|\underline{T}| = -10\log\left[1 + (\tau\omega)^2\right];$$

$$\varphi = \mathrm{Arg}\underline{T} = -\,\mathrm{arctg}\,(\tau\omega).$$

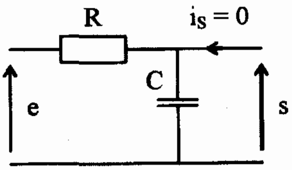


Рис. 5.21. Низкочастотный фильтр

Это позволяет записать:

$$\underline{T} = \frac{e^{j\varphi}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}.$$

Частота среза f_0 при -3 дБ: для $\omega = \omega_0$

$$|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}.$$

Если $e(t) = E_{Max}\cos(\omega t)$, то $\underline{e(t)} = E_{Max}e^{j\omega t}$. Тогда

$$\underline{s(t)} = \frac{E_{Max}e^{j\omega t}}{1 + j\tau\omega} = \frac{E_{Max}e^{j(\omega t + \varphi)}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}},$$

откуда:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{s(t)}\right) = \frac{E_{Max}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}\cos(\omega t + \varphi).$$

2) Передаточная функция по мощности:

$$T_P = \frac{S^2}{E^2} = |\underline{T}|^2 = \frac{1}{1 + (\tau\omega)^2}; \quad G_P = 10\log T_P = -10\log\left[1 + (\tau\omega)^2\right].$$

• ***Простые передаточные функции первого и второго порядка.*** (см. гл. 24 Аналоговые фильтры). Последовательное соединение звеньев (рис. 5.22).

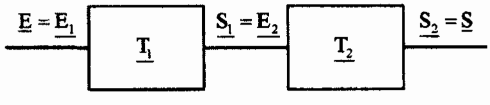


Рис. 5.22. Последовательное соединение звеньев

Имеем:

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{S_2}}{\underline{E_2}}\frac{\underline{S_1}}{\underline{E_1}} = \underline{T_2}\,\underline{T_1},$$

где $\underline{T} = |\underline{T}|\,e^{j\varphi}$; $\underline{T_2} = |\underline{T_2}|\,e^{j\varphi_2}$; $\underline{T_1} = |\underline{T_1}|\,e^{j\varphi_1}$, откуда:

$$|\underline{T}| = |\underline{T_2}|\,|\underline{T_1}|; \quad \varphi = \varphi_2 + \varphi_1$$

и $$G = 20\log|\underline{T}| = 20\log(G = 20\log|\underline{T}| = 20\log(|\underline{T_2}|\,|\underline{T_1}|) =$$
$$= 20\log|\underline{T_2}| + 20\log|\underline{T_1}| = G_2 + G_1.$$

Внимание! В общем случае полное входное сопротивление относительно $\underline{T_2}$ должно быть учтено в $\underline{T_1}$.

Вопрос. Имеем два пассивных фильтра пропускания низких частот первого порядка, включенных последовательно (рис. 5.16). Привести их комплексную передаточную функцию, коэффициент передачи и фазовый сдвиг.

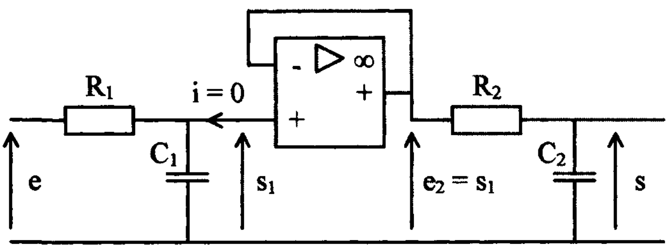


Рис. 5.23. Последовательное соединение двух фильтров пропускания низких частот 1-го порядка

Ответ. Два каскада независимы. Поэтому:

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \underline{T_2 T_1} = \frac{1}{(1+j\tau_2\omega)(1+j\tau_1\omega)} = \frac{e^{j(\varphi_2+\varphi_1)}}{\sqrt{1+(\tau_2\omega)^2}\sqrt{1+(\tau 1\omega)^2}},$$

где $\begin{cases} \tau_1 = R_1C_1 \\ \tau_2 = R_2C_2 \end{cases}$ и $\begin{cases} \varphi_1 = \mathrm{Arg}(\underline{T_1} = -\mathrm{arctg}\,(\tau_1\omega) \\ \varphi_2 = \mathrm{Arg}\underline{T_2} = -\mathrm{arctg}\,(\tau_2\omega) \end{cases}.$

$$G = G_2 + G_1 - 10\log\left[1+(\tau_2\omega)^2\right] - 10\log\left[1+(\tau_1\omega)^2\right];$$

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_1 = -\mathrm{arctg}\,(\tau_2\omega).$$

5.7.2. Диаграмма Боде

- ***Принцип построения.*** *Диаграмма Боде* состоит из двух кривых:
  - коэффициент передачи G комплексной передаточной функции в зависимости от десятичного логарифма частоты (или угловой частоты)[4];
  - сдвига фаз φ комплексной передаточной функции в зависимости от десятичного логарифма частоты (или угловой частоты)[5].

[4]Общепринятый термин — логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звена (ЛАЧХ). — *Прим. перев.*

[5]Общепринятый термин — логарифмическая фазо-частотная характеристика звена (ЛФЧХ). — *Прим. перев.*

Вопрос. Имеем пассивный фильтр пропускания низких частот 1-го порядка (см. рис. 5.21). Начертить его диаграмму Боде.

Ответ. Диаграмма Боде приведена на рис. 5.24. Исходя их комплексной передаточной функции

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC},$$

получаем коэффициент передачи

$$G = 20 \log |\underline{T}| = -10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).$$

Здесь при $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow G \approx 0$ (асимптота для кривой G); $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow G \approx$ $\approx -20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$ (асимптота для кривой G).

Если угловую частоту умножить на 10, коэффициент передачи уменьшается на 20 дБ. Тогда говорят, что имеем затухание 20 дБ на декаду.

Сдвиг по фазе

$$\varphi = \mathrm{Arg}\underline{T} = -\operatorname{arctg}(\omega/\omega_0).$$

Здесь при $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \varphi \approx 0$ (асимптота для кривой φ); $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \varphi \approx -\pi/2$ (асимптота для кривой φ).

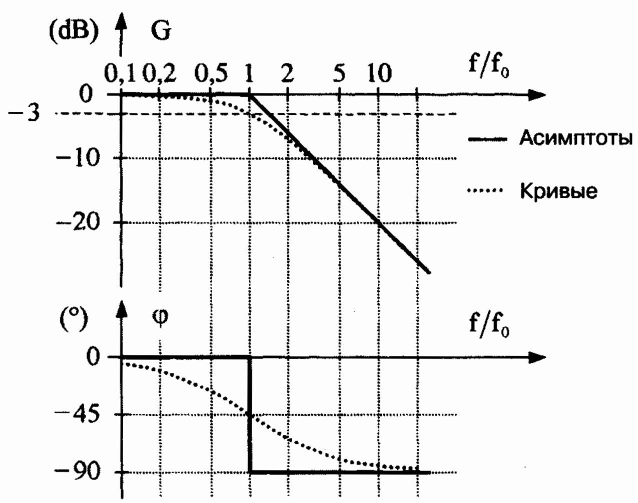


Рис. 5.24. Диаграмма Боде фильтра низкой частоты первого порядка

• ***Диаграмма Боде элементарного звена первого и второго порядка*** (см. гл. 24).

• ***Последовательное соединение звеньев*** (см. рис. 5.22). Имеем передаточную функцию в форме произведения соответствующего числа передаточных функций элементарных звеньев.

Метод

Диаграмма Боде позволяет осуществлять сложение коэффициентов передачи с одной стороны и фазовых сдвигов с другой.

$$\underline{T} = \underline{T}_2\underline{T}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G = G_2 + G_1 \\ \varphi = \varphi_2 + \varphi_1 \end{cases}$$

Вопрос. Имеем два фильтра низких частот 1-го порядка, соединенных последовательно (см. рис. 5.23). Начертить асимптоты диаграммы Боде для $f_2 = 10f_1$.

Ответ. Передаточная функция запишется в виде:

$$\underline{T} = \underline{T_2T_1} = \frac{1}{(1 + j\tau_2\omega)(1 + j\tau_1\omega)} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_2}}\frac{1}{1 + j\frac{f}{f_1}},$$

где $f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1}$ и $f_2 = \frac{1}{2\pi\tau_2}$.

Коэффициенты передачи и фазовые сдвиги складываются. Для этого выполняется графическое сложение асимптот двух звеньев первого порядка с $f_2 = 10f_1$ (рис. 5.25). На этом рисунке асимптоты двух звеньев первого порядка, взятые отдельно (пунктирная линия), произвольно смещены вверх для придания очевидности процессу построения (точное построение для звена первого порядка см. рис. 5.24).

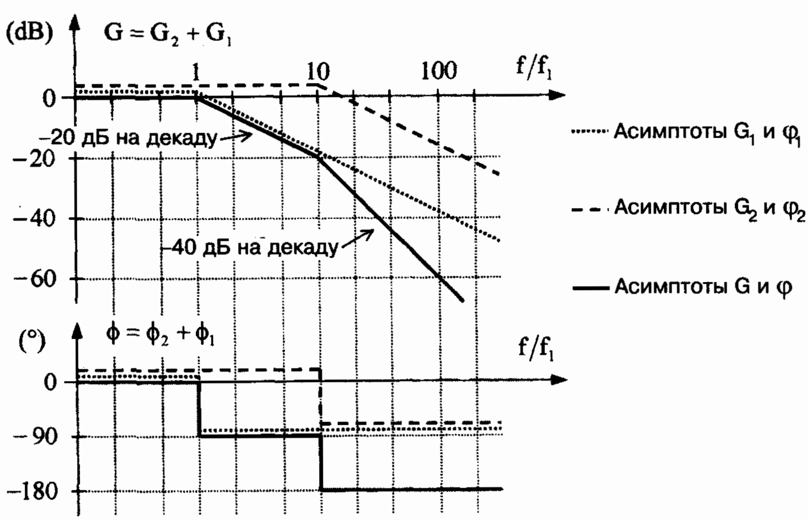


Рис. 5.25. ЛАЧХ и ЛФЧХ двух последовательно соединенных звеньев 1-го порядка

ГЛАВА 6

УСТАНОВИВШИЕСЯ СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТРЕХФАЗНЫХ СИСТЕМАХ

6.1. Трехфазные установки. Определения

Передача электрической энергии трехфазными системами более экономична, так как требует минимального количества металлического кабеля для передачи заданной мощности, трехфазные двигатели просты и эффективны, трехфазный ток легко выпрямляется.

Трехфазная установка содержит три фазных провода и, при необходимости, один нулевой (нейтральный) провод (рис. 6.1).

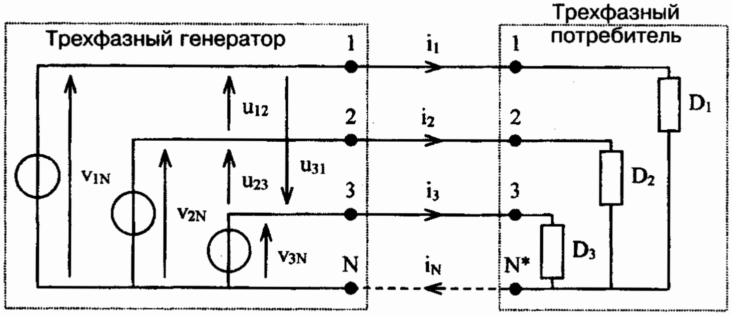


Рис. 6.1. Трехфазная установка

• ***Фазное и линейное напряжение.*** Напряжения v_{1N}, v_{2N}, v_{3N} между одной из фаз и нулевым проводом (нейтралью) называются *фазными*. Напряжения u_{12}, u_{23}, u_{31} между двумя фазами называются *линейными* (рис. 6.1).

• ***Симметричная трехфазная система.*** Три синусоидальные величины одних и тех же частоты и амплитуды, сдвинутых по фазе одна относительно другой на $2\pi/3$, формируют симметричную трехфазную систему.

• ***Прямая и обратная последовательности.*** Трехфазная система (g_1, g_2, g_3) имеет прямую последовательность, если g_3 запаздывает на угол $2\pi/3$ по отношению к g_2, которая в свою очередь запаздывает на угол $2\pi/3$ по отношению к g_1. Иная последовательность называется обратной.

• ***Распределительная электрическая сеть.*** Она основана на трехфазной системе напряжений. Обычно рассматривают, что (v_{1N}, v_{2N}, v_{3N}) есть симметричная трехфазная система прямой последовательности. То же можно рассматривать и по отношению к (u_{12}, u_{23}, u_{31}). Это записывается в виде:

$$\begin{cases} u_{12} = v_{1N} - v_{2N}, \\ u_{23} = v_{2N} - v_{3N}, \\ u_{31} = v_{3N} - v_{1N}, \end{cases} \quad \begin{cases} v_{1N} = V_{Max} \sin \omega t, \\ v_{2N} = V_{Max} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}), \\ v_{3N} = V_{Max} \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3}), \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{V_{1N}} = V_{Max}, \\ \underline{V_{2N}} = V_{Max} e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \\ \underline{V_{3N}} = V_{Max} e^{-j\frac{4\pi}{3}}. \end{cases}$$

На рис. 6.2 приведен график мгновенных значений фазных напряжений симметричной трехфазной системы.

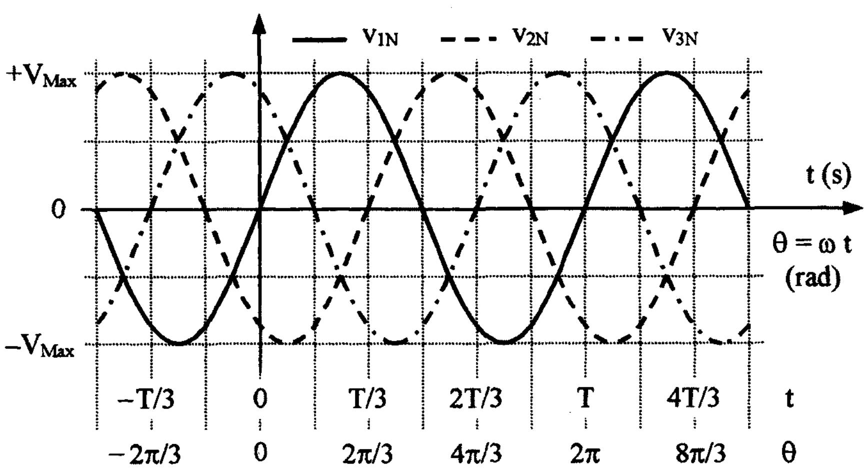


Рис. 6.2. Трехфазная симметричная система прямой последовательности

Примечания.

– При этих условиях, если три однофазных приемника идентичны, то (i_1, i_2, i_3) образуют симметричную трехфазную систему токов.

– При этих условиях, если нейтраль потребителя связана с нейтралью генератора $(v_{1N*}, v_{2N*}, v_{3N*})$, то система трехфазных напряжений симметрична.

Вопрос. Выразить линейное напряжение u_{12}.

Ответ. Непосредственно из выражения в функции времени запишем:

$$u_{12} = v_N - v_{2N} = V_{Max}\sin(\omega t) - V_{Max}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Исходя из тригонометрических соотношений

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

получим:

$$u_{12} = 2V_{Max}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}V_{Max}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) =$$
$$= \sqrt{3}V_{Max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Проще, используя их комплексные амплитуды, можно записать:

$$\underline{U_{12}} = \underline{V_{1N}} - \underline{V_{2N}} = \underline{V_{1N}}\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) = \sqrt{3}\underline{V_{1N}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right),$$

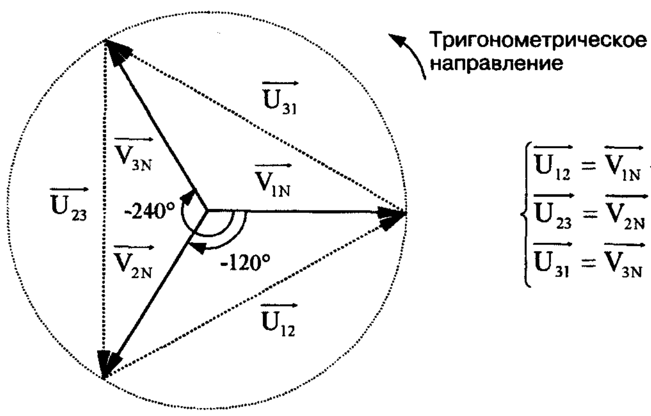
откуда

$$\underline{U_{12}} = \sqrt{3}\underline{V_{1N}}e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}V_{Max}e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

Окончательно:

$$u_{12} = \sqrt{3}V_{Max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

• ***Построение диаграммы Френеля***[1]***.*** Каждому синусоидальному напряжению соответствует вектор. Это позволяет построить графически векторы линейных напряжений.



$$\begin{cases} \overrightarrow{U_{12}} = \overrightarrow{V_{1N}} - \overrightarrow{V_{2N}} \\ \overrightarrow{U_{23}} = \overrightarrow{V_{2N}} - \overrightarrow{V_{3N}} \\ \overrightarrow{U_{31}} = \overrightarrow{V_{3N}} - \overrightarrow{V_{1N}} \end{cases}$$

Рис. 6.3. Симметричная трехфазная система прямой последовательности

[1] Векторная диаграмма. — *Прим. перев.*

Вопрос. Выразить модуль и фазу линейного напряжения $\overrightarrow{U_{12}}$.

Ответ.

$$\left\|\overrightarrow{U_{12}}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{V_{1N}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{V_{2N}}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{V_{1N}}\right\|\left\|\overrightarrow{V_{2N}}\right\|\cos(120^\circ),$$

откуда $\left\|\overrightarrow{U_{12}}\right\| = \sqrt{3}V_{\text{м}}$. Поскольку сумма углов треугольника составляет 180°, а $\left\|\overrightarrow{V_{1N}}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_{2N}}\right\|$, получим, что фаза вектора $\overrightarrow{U_{12}}$ составит $+30^\circ$.

Примечание. На векторном построении Френеля (см. рис. 6.3) перед наблюдателем имеется последовательность изображения в тригонометрическом направлении $\overrightarrow{V_{1N}}$, $\overrightarrow{V_{2N}}$, затем $\overrightarrow{V_{3N}}$, с одной стороны, и $\overrightarrow{U_{12}}$, $\overrightarrow{U_{23}}$, затем $\overrightarrow{U_{31}}$. Отсюда следует, что имеем системы прямой последовательности. Для системы прямой последовательности имеем направление против часовой стрелки, а для системы обратной последовательности — по часовой стрелке. Переход от системы прямой последовательности к системе обратной последовательности и наоборот осуществляется перестановкой двух любых векторов.

- ***Соотношения в симметричной трехфазной системе.***

$$\forall t, \quad v_{1N} + v_{2N} + v_{3N} = 0; \qquad \forall t, \quad u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0;$$

$$U_{Max} = \sqrt{3}V_{Max}; \qquad U = \sqrt{3}V.$$

Примечание. Если для сети не уточняется — идет ли речь о фазном или о линейном напряжении, то следует считать, что речь идет о линейном напряжении. Так, трехфазная сеть 400 В, 50 Гц такова, что в ней $U = 400$ В, а $V = 230$ В.

Общепринятые комплексные обозначения

Для упрощения расчетов и записи справедливы следующие соотношения:

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{4\pi}{3}} \quad \Rightarrow \quad \underline{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad \underline{a}^3 = 1; \quad \sqrt{\underline{a}} = e^{j\frac{\pi}{3}};$$

$$1 - \underline{a} = \sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}; \quad 1 - \underline{a}^2 = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}; \quad 1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0; \quad \underline{a} - \underline{a}^2 = +j\sqrt{3}.$$

Вопрос. Выразить через комплексные обозначения V_{1N}, V_{2N}, V_{3N}, U_{12}, U_{23}, U_{31}.

Ответ. $\underline{V_{1N}} = V_{Max}$; $\quad \underline{V_{2N}} = \underline{a}^2 V_{Max}$; $\quad \underline{V_{3N}} = \underline{a}V_{Max}$;

$$\underline{U_{12}} = \underline{V_{1N}} - \underline{V_{2N}} = (1 - \underline{a}^2)V_{Max};$$

$$\underline{U_{23}} = \underline{V_{2N}} - \underline{V_{3N}} = (\underline{a}^2 - \underline{a})V_{Max} = \underline{a}^2(1 - \underline{a}^2)V_{Max} = \underline{a}^2\underline{U_{12}};$$

$$\underline{U_{31}} = \underline{V_{3N}} - \underline{V_{1N}} = (\underline{a} - 1)V_{Max} = \underline{a}(1 - \underline{a}^2)V_{Max} = \underline{a}\underline{U_{12}}.$$

Или еще:

$$\underline{U_{12}} = (1 - \underline{a}^2)V_{1N}; \quad \underline{U_{23}} = (1 - \underline{a}^2)V_{2N}; \quad \underline{U_{31}} = (1 - \underline{a}^2)V_{3N}.$$

6.2. Соединения

6.2.1. Соединение в звезду

При соединении в звезду каждый двухполюсник включается между нейтралью и фазой сети (рис. 6.4).

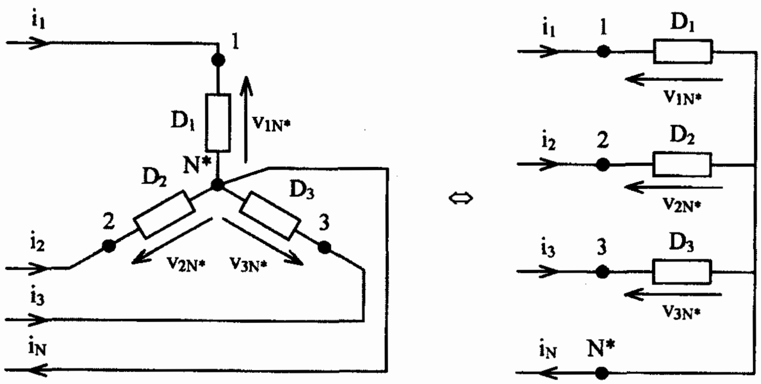


Рис. 6.4. Соединение трехфазного потребителя в звезду

а) Общий случай при наличии нейтрали

Точка N* присоединяется к нулевому проводу сети. Приложенные на зажимы двухполюсников напряжения являются фазными напряжениями сети, а линейные токи — это токи в фазах потребителей.

$$v_{1N^*} = v_{1N}; \quad v_{2N^*} = v_{2N}; \quad v_{3N^*} = v_{3N};$$

$$i_N = i_1 + i_2 + i_3.$$

Или в комплексной форме:

$$\underline{I_N} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3}, \quad \text{где} \quad \underline{I_1} = \frac{\underline{V_{1N}}}{\underline{Z_1}}, \quad \underline{I_2} = \frac{\underline{V_{2N}}}{\underline{Z_2}}, \quad \underline{I_3} = \frac{\underline{V_{3N}}}{\underline{Z_3}}.$$

Здесь $\underline{Z_1}$, $\underline{Z_2}$, $\underline{Z_3}$ — полные сопротивления двухполюсников D_1, D_2, D_3 соответственно.

б) Симметричный потребитель с нулевым проводом

Потребитель (нагрузка) симметричен, если двухполюсники идентичны:

$$\underline{Z_1} = \underline{Z_2} = \underline{Z_3},$$

откуда:

$$\underline{I_1} = \frac{\underline{V_{1N}}}{\underline{Z_1}}, \quad \underline{I_2} = \frac{\underline{a^2 V_{1N}}}{\underline{Z_2}} = \underline{a^2 I_1}, \quad \underline{I_3} = \frac{\underline{aV_{1N}}}{\underline{Z_3}} = \underline{aI_1},$$

$$\underline{I_N} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} = \underline{I_1}(1 + a^2 + a) = 0.$$

Примечание. Для соединенного в звезду симметричного потребителя ток в нулевом проводе равен нулю.

в) Соединение без нулевого провода

Если точка N* не соединена с нейтралью N сети, напряжения на зажимах двухполюсников зависят от особенностей этих двухполюсников. Если двухполюсники потребителя не идентичны, то некоторые двухполюсники окажутся под пониженным, а некоторые — под повышенным напряжением. В установках, чтобы устранить анормальные режимы, риски повреждений аппаратов, нейтрали источника и потребителя должны быть всегда соединены, даже если априори известно, что режим симметричен, он ненадежен по своей природе. Возможны аварийные ситуации.

6.2.2. Соединение в треугольник

При соединении в треугольник каждый двухполюсник присоединен между двух фаз сети (рис. 6.5). Нулевой провод здесь бесполезен.

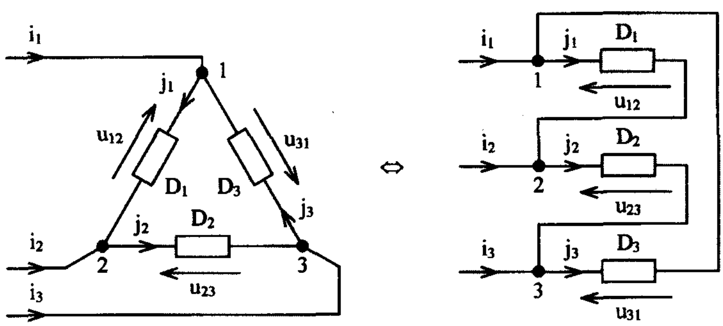


Рис. 6.5. Соединение в треугольник трехфазного потребителя

а) Общий случай

На зажимы двухполюсников подается линейное напряжение сети, но линейные токи отличны от токов в фазах потребителей.

$$\begin{cases} i_1 = j_1 - j_3 \\ i_2 = j_2 - j_1 \\ i_3 = j_3 - j_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

В комплексной форме имеем:

$$\underline{J_1} = \frac{\underline{U_{12}}}{\underline{Z_1}}, \quad \underline{J_2} = \frac{\underline{U_{23}}}{\underline{Z_2}}, \quad \underline{J_3} = \frac{\underline{U_{31}}}{\underline{Z_3}}.$$

Здесь $\underline{Z_1}$, $\underline{Z_2}$, $\underline{Z_3}$ — полные сопротивления двухполюсников D_1, D_2, D_3 соответственно.

б) Нагрузка симметрична

Потребитель (нагрузка) симметричен, если двухполюсники идентичны:

$$\underline{Z_1} = \underline{Z_2} = \underline{Z_3},$$

откуда:

$$\underline{J_1} = \frac{\underline{U_{12}}}{\underline{Z_1}}, \qquad \underline{J_2} = \frac{\underline{a^2 U_{12}}}{\underline{Z_2}} = \underline{a^2 J_1}, \qquad \underline{J_3} = \frac{\underline{aU_{12}}}{\underline{Z_3}} = \underline{aJ_1},$$

$$\underline{J_1} + \underline{J_2} + \underline{J_3} = \underline{J_1}(1 + a^2 + a) = 0.$$

Вопрос. Дать выражения линейных токов $\underline{I_1}$, $\underline{I_2}$, $\underline{I_3}$.

Ответ.

$$\underline{I_1} = \underline{J_1} - \underline{J_3} = (1 - \underline{a})\underline{J_1};$$

$$\underline{I_2} = \underline{J_2} - \underline{J_1} = (\underline{a}^2 - 1)J_1 = \underline{a}^2(1 - \underline{a})\underline{J_1} = (1 - \underline{a})\underline{J_2};$$

$$\underline{I_3} = \underline{J_3} - \underline{J_2} = (\underline{a} - \underline{a}^2)\underline{J_1} = \underline{a}(1 - \underline{a})\underline{J_1} = (1 - \underline{a})\underline{J_3}.$$

Примечание. При симметричной нагрузке справедливо:

$$J_{Max} = \frac{I_{Max}}{\sqrt{3}}; \quad J = \frac{I}{\sqrt{3}}.$$

6.3. Мощности. Коэффициент мощности

6.3.1. Общий случай

Приведенные в табл. 6.1 формулы выводятся из однофазного синусоидального режима, в частности путем использования теоремы Бушеро. При соединении в звезду фазовый сдвиг фазных напряжений v_{1N}, v_{2N}, v_{3N} по отношению к токам i_1, i_2, i_3 составляет φ_1, φ_2, φ_3 соответственно. При соединении в треугольник фазовый сдвиг линейных напряжений u_{12}, u_{23}, u_{31} по отношению к токам j_1, j_2, j_3 составляет соответственно ψ_1, ψ_2, ψ_3.

6.3.2. Трехфазные генератор и потребитель симметричны

Формулы (табл. 6.2) выводят из общих выражений, зная, что если трехфазные генератор и потребитель симметричны, то справедливо:

$$V = V_{1N} = V_{2N} = V_{3N}, \qquad U = U_{12} = U_{23} = U_{31},$$

$$I = I_1 = I_2 = I_3, \qquad J = J_1 = J_2 = J_3,$$

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3, \qquad \psi = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3,$$

$$U = \sqrt{3}V; \qquad J = I/\sqrt{3}.$$

Таблица 6.1. Общие выражения мощности трехфазных систем

<table>
<tr><th></th><th>Соединение в звезду</th><th>Соединение в треугольник</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Полная комплексная мощность ($\underline{\bar{x}}$ — величина, сопряженная $\underline{x}$)</td><td colspan="2">$\underline{S} = \underline{S_1} + \underline{S_2} + \underline{S_3} = P + jQ$</td></tr>
<tr><td>$\underline{S_1} = \frac{1}{2}\underline{V_{1N}}\,\overline{\underline{I_1}}$
$\underline{S_2} = \frac{1}{2}\underline{V_{2N}}\,\overline{\underline{I_2}}$
$\underline{S_3} = \frac{1}{2}\underline{V_{3N}}\,\overline{\underline{I_3}}$</td><td>$\underline{S_1} = \frac{1}{2}\underline{U_{12}}\,\overline{\underline{J_1}}$
$\underline{S_2} = \frac{1}{2}\underline{U_{23}}\,\overline{\underline{J_2}}$
$\underline{S_3} = \frac{1}{2}\underline{U_{31}}\,\overline{\underline{J_3}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Активная или средняя мощность в ваттах (Вт)</td><td colspan="2">$P = P_{ср} = P_1 + P_2 + P_3 = \mathrm{Re}(\underline{S})$</td></tr>
<tr><td>$P_1 = V_{1N}I_1\cos(\varphi_1)$
$P_2 = V_{2N}I_2\cos(\varphi_2)$
$P_3 + V_{3N}I_3\cos(\varphi_3)$</td><td>$P_1 = U_{12}J_1\cos(\psi_1)$
$P_2 = U_{23}I_2\cos(\psi_2)$
$P_3 = U_{31}J_3\cos(\psi_3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Реактивная мощность в вольт-амперах реактивных (вар)</td><td colspan="2">$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \mathrm{Im}(\underline{S})$</td></tr>
<tr><td>$Q_1 = V_{1N}I_1\sin(\varphi_1)$
$Q_2 = V_{2N}I_2\sin(\varphi_2)$
$Q_3 = V_{3N}I_3\sin(\varphi_3)$</td><td>$Q_1 = U_{12}J_1\sin(\psi_1)$
$Q_2 = U_{23}J_2\sin(\psi_2)$
$Q_3 = U_{31}J_3\sin(\psi_3)$</td></tr>
<tr><td>Полная мощность в вольт-амперах (ВА)</td><td colspan="2">$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$</td></tr>
<tr><td>Коэффициент мощности</td><td colspan="2">$f_P = \frac{P}{S}$</td></tr>
</table>

Таблица 6.2. Мощности трехфазных симметричных генератора и потребителя

<table>
<tr><th></th><th>Соединение в звезду</th><th>Соединение в треугольник</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Полная комплексная мощность ($\underline{\bar{x}}$ — величина, сопряженная $\underline{x}$)</td><td colspan="2">$\underline{S} = P + jQ$</td></tr>
<tr><td>$\underline{S} = \frac{3}{2}\underline{V_{1N}}\,\overline{\underline{I_1}} =$
$= 3UIe^{j\varphi}$</td><td>$\underline{S} = \frac{3}{2}\underline{U_{12}}\,\overline{\underline{J_1}} =$
$= 3UIe^{j\psi}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Активная или средняя мощность в ваттах (Вт)</td><td colspan="2">$P = \mathrm{Re}(\underline{S})$</td></tr>
<tr><td>$P = 3VI\cos(\varphi) =$
$= \sqrt{3}UI\cos\varphi$</td><td>$P = 3UJ\cos(\psi) =$
$= \sqrt{3}UI\cos\psi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Реактивная мощность в вольт-амперах реактивных (вар)</td><td>$Q = \mathrm{Im}(S) = P\,\mathrm{tg}(\varphi)$</td><td>$Q = \mathrm{Im}(S) = P\,\mathrm{tg}(\psi)$</td></tr>
<tr><td>$Q = 3VI\sin(\varphi) =$
$= \sqrt{3}UI\sin(\varphi)$</td><td>$Q = 3VI\sin(\psi) =$
$= \sqrt{3}UI\sin(\psi)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Полная мощность, вольт-амперы (ВА)</td><td colspan="2">$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$</td></tr>
<tr><td>$S = 3VI = \sqrt{3}UI$</td><td>$S = 3UI = \sqrt{3}UI$</td></tr>
<tr><td>Коэффициент мощности</td><td>$f_P = \frac{P}{S} = \cos(\varphi)$</td><td>$f_P = \frac{P}{S} = \cos(\psi)$</td></tr>
</table>

Вопрос. При несимметричном потребителе без нулевого провода, исходя из полной комплексной мощности, показать, что измерение активной мощности может быть выполнено по методу двух ваттметров.

Ответ. Поставляемая генератором мощность составляет:

$$\underline{S} = \underline{S_1} + \underline{S_2} + \underline{S_3} = \frac{1}{2}\left(\underline{V_{1N}}\,\overline{\underline{I_1}} + \underline{V_{2N}}\,\overline{\underline{I_2}} + \underline{V_{3N}}\,\overline{\underline{I_3}}\right).$$

Учитывая отсутствие нулевого провода, получим: $\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} = 0$, откуда:

$$\underline{S} = \frac{1}{2}(\underline{V_{1N}} - \underline{V_{3N}})\overline{\underline{I_1}} + \frac{1}{2}(\underline{V_{2N}} - \underline{V_{3N}})\overline{\underline{I_2}} = \frac{1}{2}\underline{U_{13}}\overline{\underline{I_1}} + \frac{1}{2}\underline{U_{23}}\overline{\underline{I_2}}.$$

Следовательно, активная мощность измеряется с помощью двух ваттметров, так как

$$P = \mathrm{Re}(\underline{S}) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\underline{U_{13}}\,\overline{\underline{I_1}}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\underline{U_{23}}\,\overline{\underline{I_2}}\right) =$$

$$= U_{13}I_1\cos(\theta_1) + U_{23}I_2\cos(\theta_2) = P_{u_{13}i_1} + P_{u_{23}i_2}.$$

Примечание. При симметричном режиме метод двух ваттметров позволяет измерять реактивную мощность, определяемую как:

$$Q = \sqrt{3}(P_{u_{13}i_1} - P_{u_{23}i_2}).$$

ГЛАВА 7

ДИНАМИЧЕСКИЙ РЕЖИМ. СРЕДНЕЕ И ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЯ

7.1. Динамический режим

Система работает в *динамическом режиме*, когда ее переменные являются функциями времени. Для переменных во времени обычно используются строчные буквы (u — для напряжения, i — для тока, p — для мощности, s — для любого сигнала и т. д.).

И напротив, система работает в *продолжительном режиме*, когда ее переменные не зависят от времени. Здесь «продолжительный» означает «постоянный». Для обозначения величин в этом режиме используются прописные буквы (U — для напряжения, I — для тока, P — для мощности, S — для любого сигнала и т. д.).

Система работает в *установившемся режиме*, когда ее переходный процесс затух. Практически затухшим считается процесс, при котором переходные составляющие становятся пренебрежимо малыми.

Система работает в *периодическом режиме*, когда ее величины являются периодическими функциями времени. *Периодический сигнал* во времени воспроизводится идентично. *Периодом* T периодического сигнала является самая короткая длительность между двумя значениями, при которых сигнал воспроизводится идентично. Его *частота* есть величина, обратная периоду.

$$\forall t,\ s(t+T)=s(t),\ f=1/T \text{ с единицами измерения Гц} = 1/\text{с}$$

и

$$\omega = 2\pi f$$

(круговая частота, пульсации) с единицами измерения рад/с = рад · Гц.

7.2. Среднее значение

7.2.1. Среднее значение тока

Среднее значение тока равно фиктивному значению постоянного тока, которое перенесло бы то же количество электричества (перемещены те же заряды) за то же время.

$$\Delta q_{\text{перемещ.}} = \int_{Q_1}^{Q_2} dq = \int_{t_1}^{t_2} i\,dt \quad \Rightarrow \quad I_{\text{ср}} = \frac{\Delta q_{\text{перемещ}}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} i\,dt.$$

7.2.2. Определения (табл. 7.1)

Таблица 7.1. Определения среднего значения

Периодический сигнал: среднее значение за период T	Непериодический, периодический сигнал: среднее значение за интервал $[t_1 \div t_2]$
$S_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} s(t)dt$	$S_{\text{ср}} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} s(t)dt$

Примечание. Если продолжительность наблюдения не задана, подразумевают, что сигнал периодический. Для такого сигнала принятый для расчета интервал времени должен быть целым числом периодов: $[t_1, t_1 + nT]$. Однако из соображений симметричности возможно прибегнуть к делению этого минимального интервала на 2 или более. Оправданный выбор t_1 часто позволяет упростить расчет.

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения

$$u(t) = U_0 + U_{1Max}\sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Ответ. Имеем сумму двух напряжений:

$$u(t) = U_0 + u_1(t), \quad \text{где} \quad u_1(t) = U_{1Max}\sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

откуда:

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} U_0 dt + \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u_1(t)dt = U_0 + U_{1\text{ср}}.$$

Для синусоидальных функций интерес представляет обычно замена переменных

$$\theta = \omega_1 t (\Rightarrow 2\pi = \omega_1 T).$$

$$u_1(\theta) = U_{1Max}\sin(\theta + \varphi_1),$$

откуда:

$$U_{1ср} = \frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} u_1(t)dt = \frac{\omega_1}{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} u_1(\theta)\frac{d\theta}{d\omega_1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} u_1(\theta)d\theta.$$

Или, интегрируя за период, начиная от $-\varphi_1$, для упрощения расчета получим:

$$U_{1ср} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varphi_1}^{-\varphi_1+2\pi} U_{1Max}\sin(\theta+\varphi_1)d\theta = 0.$$

Окончательно: $U_{ср} = 0$.

> ***Метод***
> Для приближенной оценки или для простых сигналов (прямоугольные, треугольные и т. д.) расчет интеграла можно заменить алгебраической суммой площадей, заключенных между кривой и осью времени. Если кривая расположена выше оси времени, рассчитанная площадь принимается положительной, а если ниже — отрицательной.

Вопрос. Дать выражение среднего значения асимметричного периодического треугольного напряжения (рис. 7.1).

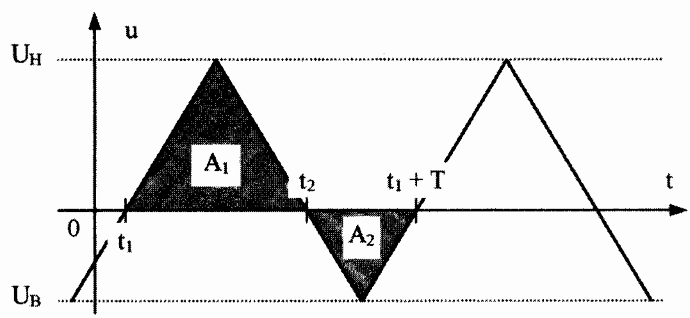


Рис. 7.1. Асимметричное треугольное периодическое напряжение

Ответ.

$$U_{ср} = \frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} u(t)dt = \frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_2} u(t)dt + \frac{1}{T}\int\limits_{t_2}^{t_1+T} u(t)dt = \frac{A_1 - A_2}{T},$$

откуда:

$$U_{ср} = \frac{U_H(t_2 - t_1) + U_B(t_1 + T - t_2)}{2T}.$$

7.3. Действующее значение

Вместо термина «действующее» часто встречается англо-саксонская аббревиатура «r.m.s.» (*root mean square)*, что дословно переводится как «корень из квадрата среднего».

7.3.1. Действующее значение тока

Действующее значение тока равно фиктивному значению постоянного тока которое выделило бы такое же количество теплоты (ту же привнесенную энергию) в том же сопротивлении за то же время.

$$\Delta W_{\text{привнес}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} Ri^2\,dt \quad \Rightarrow \quad I^2 = \frac{\Delta W_{\text{привнес}}}{R(t_2 - t_1)} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int\limits_{t_1}^{t_2} i^2\,dt.$$

7.3.2. Определения (табл. 7.2)

Таблица 7.2. Определения действующих значений

Периодический сигнал: действующее значение за период	**Сигнал любой формы: действующее значение за интервал $(t_1 - t_2)$**
$S^2 = \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} s^2(t)\,dt = \left[s^2(t)\right]_{\text{ср}}$	$S^2 = \frac{1}{t_2-t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt = \left[s^2(t)\right]_{\text{ср}}$

Примечание. Принятый для расчета интервал времени при периодических сигналах должен составлять целое число периодов: $[t_1, t_1 + nT]$. Однако, по соображениям симметрии, возможно разделить этот интервал. Обоснованный выбор t_1 часто позволяет упростить расчет.

Вопрос. Дать выражение действующего значения напряжения

$$u_1(t) = U_{1Max}\sin(\omega_1 t - \varphi_1).$$

Ответ. Выполним замену переменной $\theta = \omega_1 t (\Rightarrow 2\pi = \omega_1 T)$. Получим:

$$u_1(\theta) = U_{1Max}\sin(\theta - \varphi_1), \text{ откуда: } U_1^2 = \frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} u_1^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} u_1^2(\theta)\,d\theta.$$

Или, интегрируя за период от $-\varphi_1$, для упрощения расчета получим:

$$U_1^2 = \frac{U_{1Max}^2}{4\pi}\int\limits_{-\varphi_1}^{-\varphi_1+2\pi} \sin^2(\theta + \varphi_1)d\theta =$$

$$= \frac{U_{1Max}^2}{4\pi}\int\limits_{-\varphi_1}^{-\varphi_1+2\pi} [1 - \cos(2(\theta + \varphi_1))]\,d\theta = \frac{U_{1Max}^2}{2}. \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{U_{1Max}}{\sqrt{2}}.$$

> ***Метод***
> Как и для средних значений, расчет интеграла квадрата сигнала можно заменить алгебраической суммой площадей.

Примечание. Квадрат действующего значения равен среднему значению квадрата сигнала. Отсюда следует последовательность расчета действующего значения, приведенная на рис. 7.2.

Рис. 7.2. Последовательность расчета действующего значения

7.4. Разложение периодического сигнала

• ***Мгновенное и среднее значения.*** Каждый периодический сигнал $s(t)$ может быть представлен как сумма *постоянной составляющей*, равной среднему значению $S_{ср}$, и *переменной периодической составляющей*, среднее значение которой равно нулю, а сама эта переменная составляющая иногда называется *колебательной* $s_{пер}(t)$.

$$s(t) = S_{ср} + s_{пер}(t).$$

> ***Метод***
> Фильтр низких частот позволяет извлечь и измерить постоянную составляющую, например напряжения.
> $$u(t) = U_{DC} + u_{AC}(t),$$
> где $U_{DC} = U_{ср}$. Здесь индекс «DC» означает «постоянный ток», а индекс «AC» означает «переменный ток»[1].

• ***Действующее значение.*** Для периодического сигнала $s(t) = S_{ср} + s_{пер}(t)$ имеем:

$$S^2 = S^2_{ср} + S^2_{пер}.$$

Вопрос. Доказать приведенное соотношение на примере действующего значения.

[1]В английском и во французском языках эти индексы соответствуют начальным буквам терминов «постоянный ток» и «переменный ток». Широко используются для обозначения рода тока, в том числе и на бытовых электроприборах в России. — *Прим. перев.*

Ответ. По определению имеем:

$$S^2 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} s^2(t)\,dt = \frac{S_{cp}^2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} dt + \frac{2S_{cp}}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} s_{пер}(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} s_{пер}^2(t)\,dt.$$

Поскольку среднее значение переменной составляющей равно нулю, получим требуемое соотношение.

> ***Метод***
>
> Фильтр высоких частот позволяет извлечь и измерить переменную составляющую, например напряжения. Затем рассчитывается действующее значение из соотношения:
>
> $$U = \sqrt{U_{DC}^2 + U_{AC}^2}, \quad \text{где} \quad U_{DC} = U_{cp}, \quad \text{а} \quad U_{AC} = U_{пер}.$$

Вопрос. Дать выражение действующего значения напряжения:

$$u(t) = U_0 + U_{1Max}\sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Ответ. Это будет сумма постоянной составляющей и переменной, среднее значение которой равно нулю. Поэтому можно записать:

$$u(t) = U_0 + u_1(t), \quad \text{где} \quad u(t) = U_{1Max}\sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

откуда:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2}, \quad \text{где} \quad U_1 = \frac{U_{1Max}}{\sqrt{2}}$$

(см. § 7.3.2). Полученный результат можно проверить, прямо рассчитав действующее значение.

$$U_1^2 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u_1^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} (U_0 + u_1(t))^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} (U_0)^2 dt + \frac{2U_0}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u_1(t)dt + \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} (u_1(t))^2 dt = U_0^2 + 2U_0U_{1cp} + U_1^2,$$

откуда: $U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2}$, так как $U_{1cp} = 0$.

7.5. Свойства сигнала

• ***Коэффициенты амплитуды, формы и пульсации*** (табл. 7.3). Они позволяют оценить сигнал по отношению его к действующему значению или его переменной составляющей к его постоянной составляющей.

• ***Двойная амплитуда колебаний.*** Это разброс между наибольшим и наименьшим значениями сигнала $s(t)$ или его переменной составляющей $s_{пер}(t)$.

В абсолютных величинах: $\Delta S = S_{Max} - S_{Min} = S_{пер.Max} - S_{пер.Min}$.

В относительных величинах: $\frac{\Delta S}{S_{ср}}$.

• ***Соотношение между коэффициентами формы и пульсации.***

$$F^2 = 1 + \beta^2.$$

Таблица 7.3. Коэффициенты амплитуды, формы и пульсации

Коэффициент амплитуды	$F_C = \frac{\lvert s(t)\rvert_{Max}}{S}$	Определяет импульсные сигналы. Дает оценку трудностям прохождения этих сигналов через усилители, фильтры и т. д.
Коэффициент формы	$F = \frac{S}{\lvert S_{ср}\rvert}$	Определяет долю переменной составляющей в каком-либо сигнале относительно его среднего значения. Дает оценку качества переменного сигнала: $F \to \infty$ при среднем значении сигнала, равном нулю.
Коэффициент пульсации	$\beta = \frac{S_{пер}}{\lvert S_{ср}\rvert}$	Измеряет долю переменной составляющей сигнала относительно его среднего значения. Дает оценку качества постоянной составляющей сигнала (выпрямление): $\beta = 0$ при идеальном постоянном сигнале.

• ***Свойства некоторых сигналов*** (табл. 7.4).

Таблица 7.4. Свойства некоторых сигналов

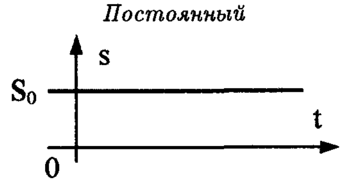
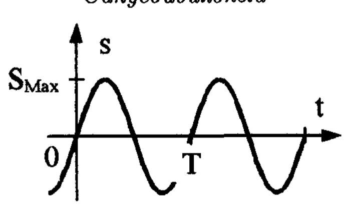
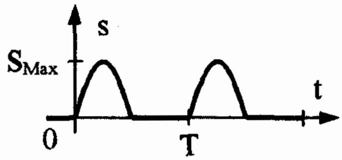
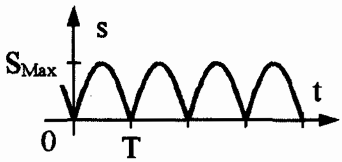
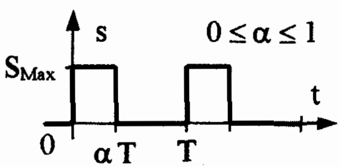
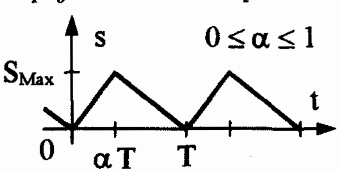
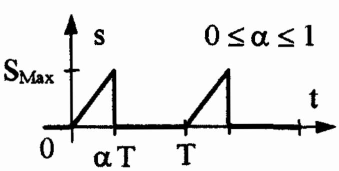
Сигнал	$S_{ср}$	**S**	F_C	**F**	β
Постоянный 	S_0	S_0	1	1	0
Синусоидальный 	0	$\frac{S_{Max}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Таблица 7.4 (окончание)

Однополупериодное выпрямление 	$\frac{S_{Max}}{\pi}$	$\frac{S_{Max}}{2}$	2	$\frac{\pi}{2}$	$\approx 1{,}21$
Двухполупериодное выпрямление 	$\frac{2S_{Max}}{\pi}$	$\frac{S_{Max}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\approx 0{,}48$
Прямоугольные импульсы 	αS	$\sqrt{\alpha} S$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	$\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}$
Сигнал	$S_{ср}$	**S**	F_C	**F**	β
Треугольные пилообразные 	$\frac{S_{Max}}{2}$	$\frac{S_{Max}}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\approx 0{,}58$
Импульсные пилообразные 	$\frac{\alpha S_{Max}}{2}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{3}} S_{Max}$	$\sqrt{\frac{3}{\alpha}}$	$\frac{2}{\sqrt{3\alpha}}$	$\sqrt{\frac{4}{3\alpha} - 1}$

Вопрос. Определить действующее значение выпрямленного двухполупериодного сигнала, среднее значение которого равно нулю.

Ответ.

$$S_{пер}^2 = S^2 - S_{ср}^2 = \frac{S_{Max}^2}{2} - \frac{4S_{Max}^2}{\pi^2} \quad \Rightarrow \quad S_{пер} = S_{Max}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{\pi^2}} \approx 0{,}31 S_М.$$

• ***Коэффициент искажения синусоиды*** (см. гл. 8).

ГЛАВА 8

ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС. РЯДЫ ФУРЬЕ

8.1. Ряды Фурье

Здесь рассматриваются только функции реальных переменных.

8.1.1. Основная теорема

Периодическая функция f периода T, удовлетворяющая условиям Дирихле (см. далее примечание), преобразуется в ряд Фурье в форме одной из трех следующих записей: две тригонометрические и одна комплексная.

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

где $a_0, a_n, b_n \in \mathbf{R}$; $A_n, \varphi_n \in \mathbf{R}$; $c_n \in \mathbf{C}$. В частности, в любой точке t, где f непрерывна, имеем:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

где $\omega = 2\pi/T$ с единицами измерения рад/с.

Можно привести иную форму для другой записи, заменив косинус на синус:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

где $\varphi_n = \varphi_n + \pi/2$. При такой форме записи A_n — амплитуды (наибольшие значения); φ_n (или φ_n) — фазы n-й гармоники синусоидальной функции.

Примечание. Периодическая функция f периода T удовлетворяет *условиям Дирихле*, если f непрерывна и имеет непрерывную производную f'

на всем интервале $[t_1, t_1+T]$ за исключением возможного конечного числа разрывов в точках t_i, в которых существуют $f(t_i^+)$, $f(t_i^-)$, $f'(t_i^+)$, $f'(t_i^-)$.

8.1.2. Расчет коэффициентов

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)dt;$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos(n\omega t)dt,\ b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin(n\omega t)dt;$$

$$\forall n \in \mathbf{N},\ c_n = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)e^{-jn\omega t}dt.$$

8.1.3. Соотношения между коэффициентами

Таблица 8.1. Соотношения между коэффициентами

$(a_n, b_n) \to (A_n, \varphi_n)$	$(a_n, b_n) \to (c_n, c_{-n})$	$(c_n, c_{-n}) \to (A_n, \varphi_n)$
$A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ $\cos\varphi_n = a_n/A_n$ $\sin\varphi_n = -b_n/A_n$	$c_n = \frac{a_n-jb_n}{2}$ $c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n+jb_n}{2}$	$A_n = 2\lvert c_n\rvert = 2\sqrt{c_n c_{-n}}$ $\varphi_n = \arg(c_n) = -\arg(c_{-n})$
$(A_n, \varphi_n) \to (a_n, b_n)$	$(c_n, c_{-n}) \to (a_n, b_n)$	$(A_n, \varphi_n) \to (c_n, c_{-n})$
$a_n = A_n\cos\varphi_n$ $b_n = -A_n\sin\varphi_n$	$a_n = c_n + c_{-n}$ $b_n = j(c_n - c_{-n})$	$2c_n = A_n e^{j\varphi_n}$ $2c_{-n} = A_n e^{-j\varphi_n}$

8.1.4. Свойства. Упрощение расчетов

Имеем периодическую функцию f периода T, разлагаемую в ряд Фурье.

- ***Выбор интервала времени.*** Расчет коэффициентов не зависит от выбора интервала времени $[t_1, t_1+T]$. Следовательно, обоснованный выбор значения t_1 часто позволяет упростить расчеты.

- ***Четная и нечетная периодические функции*** (рис. 8.1). Четная функция f разлагается в ряд косинусов.

$$\forall t,\quad f(t) = f(-t) \quad\Rightarrow\quad b_n = 0 \quad \Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t).$$

В любой точке, в которой функция непрерывна, имеем:

$$a_n = \frac{4}{T} \int\limits_{t_{11}}^{t_1+T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt \quad (\forall n \in \mathbf{N}^*).$$

Нечетная функция f разлагается в ряд синусов.

$$\forall t, \quad f(t) = -f(-t) \quad \Rightarrow a_n = 0 \quad \Rightarrow . \ f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t).$$

В любой точке, в которой функция непрерывна, имеем:

$$b_n = \frac{4}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (\forall n \in \mathbf{N}^*).$$

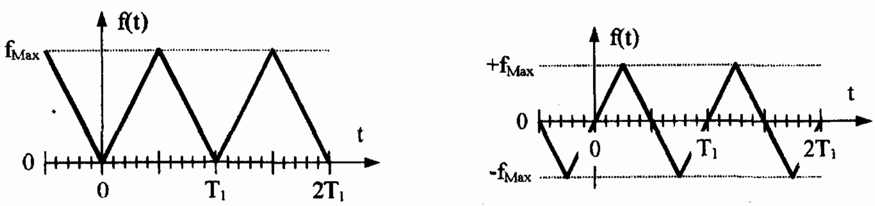


Рис. 8.1. Примеры четной и нечетной периодических функций

• ***«Скользящая» симметрия.*** Если функция обладает «скользящей» симметрией, то постоянная составляющая и четные гармоники равны нулю.

$$\forall t, \quad f(t + T/2) = -f(t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{2(p+1)} = 0 \\ b_{2(p+1)} = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_{2p+1} = \frac{4}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T/2} f(t)\cos\left[(2p+1)\omega t\right] dt \\ b_{2p+1} = \frac{4}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T/2} f(t)\sin\left[(2p+1)\omega t\right] dt \ (p \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

Графически, вводя «скольжение» (рис. 8.2) полупериода, можно заметить, что часть функции между t_1 и $(t_1 + T/2)$ симметрична относительно оси времени.

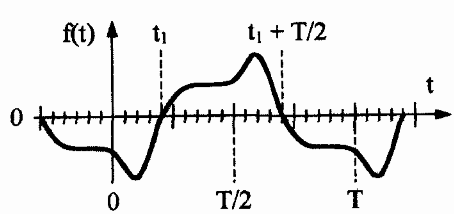


Рис. 8.2. Пример «скользящей» симметрии

• ***Пределы коэффициентов Фурье.*** Коэффициенты Фурье стремятся к нулю, когда номер гармоники n стремится к бесконечности. Следовательно, конечное число гармонических составляющих разложения в ряд Фурье определяет сумму, являющуюся приближением разлагаемой функции.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} |c_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = 0.$$

• ***Производная.*** Для производной f' периодической функции f, разлагаемой в ряд Фурье, справедливо:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \Rightarrow \quad f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jn\omega c_n e^{jn\omega t}.$$

• ***Интегрирование.*** Для функции f, для которой $f_{ср} = 0$ $(a_0 = c_0 = 0)$, имеем:

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \\ c_0 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = G_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{c_n e^{jn\omega t}}{jn\omega},$$

где $G_0 = G_{ср} = \int\limits_{t_1}^{t_1+T} g(t)dt.$

8.1.5. Формула Бесселя – Парсеваля

Для периодической функции f, разлагаемой в ряд Фурье, справедливо:

$$|f|^2 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f^2(t)\, dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

8.2. Физический смысл периодических процессов

8.2.1. Периодический режим. Периодический сигнал

Система работает в *периодическом режиме*, если ее переменные являются периодическими функциями времени (см. гл. 7). *Периодический сигнал* $s(t)$ идентично воспроизводится за период T, являющийся самым малым действительным значением, для которого справедливо:

$$\forall t, \quad s(t + T) = s(t).$$

8.2.2. Разложение периодического сигнала. Терминология

Периодический сигнал $s(t)$, разлагаясь в ряд Фурье, является суммой:

– *постоянной составляющей*, равной ее среднему значению $S_0 = a_0$;

– бесконечному спектру *синусоидальных составляющих*, называемых *гармониками* частот 1/T, 2/T, ..., n/T, ...:

$$s_n(t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n),$$

где A_n — амплитуда, а φ_n — фаза n-й гармоники.

Составляющая той же частоты $f = 1/T$, что и разлагаемый периодический сигнал, называется *основной*, первой гармоникой. У второй гармоники частота будет вдвое больше, у n-й гармоники — в n раз больше основной.

$\omega = 2\pi f$ с единицами измерения рад/с = рад · Гц; $f = 1/T$, (Гц = 1/с).

Примечание. При комплексной форме записи имеем также и отрицательные частоты $-1/T, -2/T, \ldots, -n/T\ldots$

Вопрос. Имеем сигнал e(t) частотой f_1, с коэффициентом заполнения $\alpha = 1/2$ и уровнями 0 и E (рис. 8.3). Привести его разложение в ряд Фурье в тригонометрической форме.

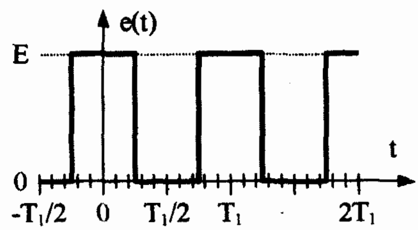


Рис. 8.3. Прямоугольный сигнал с коэффициентом заполнения 1/2

Ответ. Сигнал четный, поэтому ряд Фурье составляют функции косинуса.

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{1}{T}\int\limits_{-T_1/2}^{T_1/2} e(t)dt =$$

$$= \frac{E}{T_1}\int\limits_{-T_1/4}^{T_1/4} dt = \frac{E}{T_1}t\Bigg|_{-T_1/4}^{T_1/4} = \frac{E}{2},$$

$$a_n = \frac{4}{T_1}\int\limits_0^{T_1/2} e(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt = \frac{4E}{T_1}\int\limits_0^{T_1/4}\cos(n\omega_1 t)\,dt =$$

$$= \frac{4E}{T_1}\frac{\sin(n\omega_1 t)}{n\omega_1}\Bigg|_0^{T_1/4} = \frac{2E}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},$$

откуда:

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\cos(n\omega_1 t).$$

Отмечая, что четные гармоники (n четное) равны нулю, получим:

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}\cos[(2p+1)\omega_1 t].$$

Разложение в ряд Фурье представим в виде:

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\Big[\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t) + \dots + \\ + \frac{(-1)^p}{2p+1}\cos\left[(2p+1)\omega_1 t\right] + \dots\Big].$$

Вопрос. Для предыдущего сигнала e(t) (см. рис. 8.3) определить разложение в ряд Фурье в комплексной форме.

Ответ.

$$c_0 = a_0 = \frac{E}{2};$$

$$c_n = \frac{1}{T_1}\int\limits_{-T_1/2}^{T_1/2} e(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt = \frac{E}{T_1}\int\limits_{-T_1/4}^{T_1/4} e^{-jn\omega_1 t}\,dt = \frac{E}{T_1}\frac{e^{-jn\omega_1 t}}{-jn\omega_1 t}\Bigg|_{-T_1/4}^{T_1/4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{a_n}{2}, \qquad \text{откуда: } e(t) = \frac{E}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}e^{jn\omega_1 t}.$$

Разложение в ряд Фурье представим в виде:

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\Bigg[\left(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}\right) - \frac{1}{3}\left(e^{j3\omega_1 t} + e^{-j3\omega_1 t}\right) + \dots + \\ + \frac{(-1)^p}{2p+1}\left(e^{j(2p+1)\omega_1 t} + e^{-j(2p+1)\omega_1 t}\right) + \dots\Bigg].$$

Заменяя по формулам Эйлера комплексные функции на косинусы, получим результат предшествующего примера.

8.2.3. Действующее значение и средняя мощность

• ***Действующее значение.*** для разлагаемого в ряд Фурье периодического сигнала s(t) формула Бесселя – Парсеваля дает квадрат действующего значения сигнала (см. также гл. 7):

$$S^2 = \frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} s^2(t)dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2.$$

Таким образом, квадрат действующего значения периодического сигнала s(t) представляет собой сумму квадрата своего среднего значения и квадратов действующих значений каждой гармоники:

$$S^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}A_n^2, \quad \text{где} \quad A_0 = |a_0| \quad \text{и} \quad A_n = \frac{A_{n.м}}{\sqrt{2}}.$$

Вопрос. Имеем выпрямленное двухполупериодное напряжение и его разложение в ряд Фурье:

$$u(t) = U_{Max}|\sin(\omega t)| \quad \text{и} \quad u(t) = \frac{2U_{Max}}{\pi}\left(1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1}\right).$$

Это напряжение прикладывается на зажимы сопротивления R. Определить рассеиваемую в сопротивлении мощность от постоянной составляющей и от гармоник.

Ответ. Средняя мощность, рассеиваемая сопротивлением, составит:

$$P_{ср} = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2_{Max}}{2R}.$$

Согласно формуле Бесселя – Парсеваля действующее напряжение запишется в виде:

$$U^2 = U_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} U_n^2, \quad \text{где} \quad U_0 = U_{ср} \quad \text{и} \quad U_n = \frac{U_{n.Max}}{\sqrt{2}}.$$

Разделив на R, получим:

$$P_{ср} = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n, \quad \text{где} \quad P_0 = \frac{U_0^2}{R} = \frac{4U_м^2}{\pi^2 R} \quad \text{и} \quad P_n = \frac{U_n^2}{R}.$$

Средняя мощность, рассеиваемая сопротивлением, — это сумма рассеиваемой мощности от постоянной составляющей напряжения и от мощностей гармонических составляющих напряжения. Отсюда следует:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_n = P_{ср} - P_0 = \frac{U^2_{Max}}{2R}\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right).$$

Окончательно получим:

$$\frac{P_0}{P_{ср}} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0{,}81 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} P_n/P_{ср} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \approx 0{,}19.$$

Примечание. Обрабатывая сигнал, мы определяем среднюю мощность P_S периодического сигнала $s(t)$ через квадрат действующего значения сигнала. Тогда соотношение между действующими значениями запишется как:

$$P_S = S^2 = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n,$$

где $P_0 = A_0^2$ (при $A_0 = |a_0|$) — мощность постоянной составляющей; $P_n = A_n^2$ — мощность n-й гармоники.

- ***Средняя мощность двухполюсника.***

Если напряжение u на зажимах двухполюсника и ток i в нем являются периодическими функциями одинакового периода, то их разложение в ряды

Фурье запишется как:

$$u = U_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} U_{n.Max} \cos(n\omega t + \varphi_{U_n}) \quad \text{и} \quad i = I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} I_{n.Max} \cos(n\omega t + \varphi_{I_n}).$$

Тогда средняя, или активная, мощность запишется в виде:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} U_n I_n \cos\varphi_n, \quad \text{где} \quad \varphi_n = \varphi_{U_n} - \varphi_{I_n}.$$

Здесь

$$U_0 = U_{cp}, \quad I_0 = I_{cp}, \quad U_n = \frac{U_{n.Max}}{\sqrt{2}}, \quad I_n = \frac{I_{n.Max}}{\sqrt{2}}.$$

8.2.4. Оценка сигнала

• ***Коэффициенты формы и пульсации*** (см. гл. 7). Отметим, что $A_0 = |a_0|$.

Таблица 8.2. Показатели сигнала

Коэффициент формы	Коэффициент пульсации
$F = \frac{S}{\boxed{S_{cp}}} = \frac{\sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2}}{A_0}$	$\beta = \frac{S_{пер}}{\boxed{S_{cp}}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2}}{A_0}$

• ***Коэффициент искажения гармоники.*** Он служит для оценки деформации сигнала, который должен бы быть синусоидальным. Находясь между нулем и бесконечностью, он представляет собой отношение действующего значения сигнала, за вычетом постоянной составляющей и основной гармоники, к действующему значению основной гармоники.

$$d = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} A_n^2}}{A_1} = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots + A_n^2 + \dots}}{A_1}.$$

Определяют также коэффициент искажения n-й гармоники как:

$$d_n = \frac{A_n}{A_1} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} d_n^2}.$$

8.2.5. Приложение к линейным системам

Мы хорошо умеем оценить отклик линейной системы (см. гл. 9) на входное постоянное или синусоидальное воздействие $e = e(t)$ (см. гл. 5). Но на практике на вход системы часто воздействует периодический несинусоидальный сигнал.

Метод

По отношению к составляющим ряда Фурье применяется принцип линейности в соответствии со следующей процедурой.

1) Разложение входного сигнала на постоянную и синусоидальные составляющие:

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

2) Определение отклика линейной системы на каждую составляющую на входе:

$$E_0 \to S_0 e_n(t) \to s_n(t) = S_n \cos(n\omega t + \psi_n).$$

3) Суммируем отклики:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \psi_n).$$

Вопрос. Имеем пассивный фильтр 1-го порядка, пропускающий низкие частоты (рис. 8.4). Прямоугольные сигналы e(t) подаются на вход (см. рис. 8.3). Привести ряд Фурье для сигнала на выходе схемы.

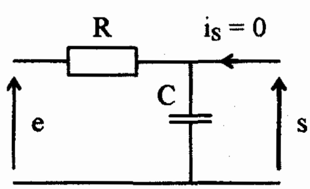


Рис. 8.4. Фильтр 1-го порядка

Ответ. Разложение в ряд Фурье функции e(t) дает:

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \cos(n\omega_1 t).$$

Комплексной передаточной функцией схемы будет:

$$\underline{T} = \frac{\underline{s(t)}}{\underline{e(t)}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\tau\omega} = \frac{e^{j\varphi}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}},$$

где $\tau = RC$ и $\varphi = -\operatorname{arctg}(\tau\omega)$.

Если $e_n(t) = E_n \cos(n\omega_1 t)$, то

$$s_n(t) = \frac{E_n}{\sqrt{1 + (\tau n\omega_1)^2}} \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad \text{где} \quad \varphi_n = -\operatorname{arctg}(\tau n\omega_1).$$

Окончательно получим:

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\sqrt{1 + (\tau n\omega_1)^2}} \cos(n\omega_1 t + \varphi_n).$$

Примечание. Фильтр низких частот изменяет амплитуду и фазу каждой синусоидальной составляющей (основной и высших гармоник). Следовательно, сигнал s(t) будет деформирован по отношению к e(t). В нем будет присутствовать искажение как по амплитуде, так и по фазе.

Вопрос. Для сдвига по фазе φ определить условие, при котором искажения по фазе не будет.

Ответ. Косинусоидальную функцию можно записать также как:

$$\cos(n\omega_1 t + \varphi_n) = \cos\left[n\omega_1(t - \tau_n)\right], \quad \text{где} \quad \tau_n = \frac{-\varphi_n}{n\omega_1}.$$

Чтобы не было искажения по фазе, следовало бы иметь запаздывание $\tau_n = \mathrm{const}$, каким бы ни был порядок гармоники. Это соответствует линейному фазовому сдвигу.

$$\varphi_n = -\tau_n n\omega_1.$$

Внимание! Фильтр с линейным фазовым сдвигом в аналоговой форме не реализуем (см. гл. 24).

8.3. Графическое представление спектров

Пример 8.3.1. Иллюстрируется прямоугольное напряжение u(t) уровней 0 и 5 В периодом T = 1 мс, с коэффициентом заполнения $\alpha = 1/5$ (рис. 8.5).

8.3.1. Представление в функции времени

График в функции времени иллюстрирует мгновенные значения сигнала. График в функции времени периодического сигнала с периодом T состоит из идентичных представлений длительностью T.

Примечание. Сигнал является действительной функцией времени.

Пример 8.3.2. (См. рис. 8.5).

8.3.2. Частотные свойства

Амплитудный спектр иллюстрирует зависимость амплитуды (модуля) сигнала в функции частоты. Фазовый спектр — зависимость фазы сигнала в функции частоты.

Амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала с периодом T состоят из спектральных линий частот, кратных 1/T.

Примечания.

– Сигнал является комплексной функцией частоты. Сигнал, зависящий от времени, является действительной функцией времени, частотный сигнал содержит действительную часть и модуль четных гармоник, мнимую часть и фазу нечетных гармоник.

– Можно также представить сигнал действительной и мнимой частями в функции частоты, но интерпретировать такое представление сложнее.

– Сигнал полностью оценивается своими амплитудным и фазовым спектрами.

– Амплитудный спектр независим от выбранного начала отсчета времени. Следовательно, если нас интересует только амплитудный спектр, мы выберем начало отсчета времени из соображений упрощения расчетов коэффициентов с демонстрацией симметрии.

– Фазовый спектр зависит от выбранного начала отсчета времени.

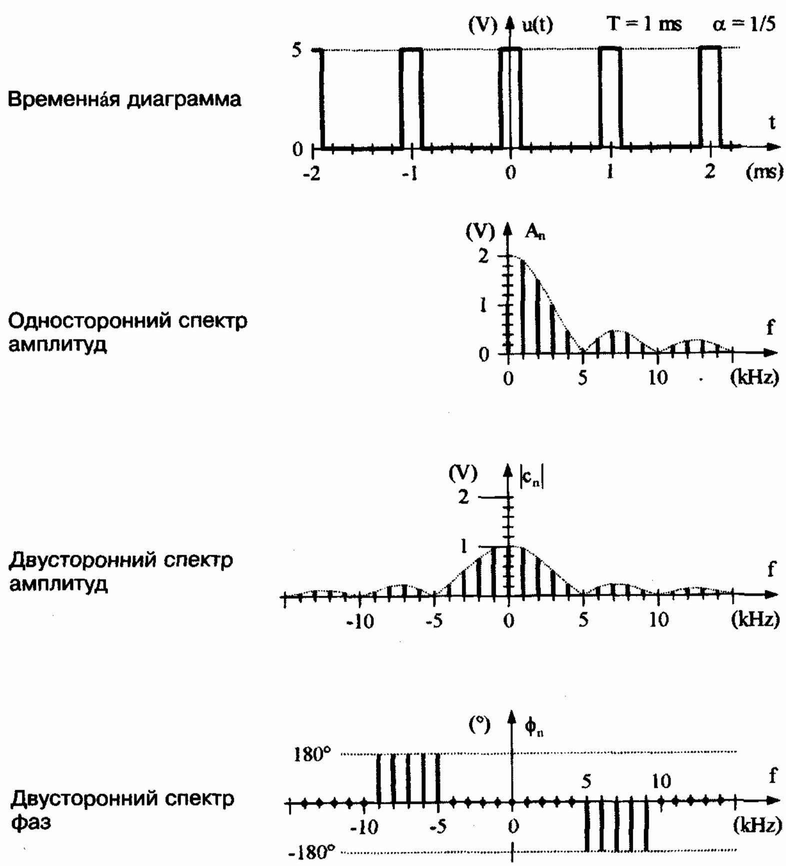


Рис. 8.5. Прямоугольное напряжение уровней 0 и 5 В, $\alpha = 1/5$

а) Односторонний амплитудный спектр

Односторонний амплитудный спектр периодического сигнала представляет собой графическое представление амплитудных линий A_n синусоидальных составляющих частот nf, где $n \in \mathbf{N}^*$ (см. § 8.1) и постоянной составляющей A_0.

$$A_0 = |a_0| = |c_0| \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\,|c_n| \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

Пример 8.3.3. (см. рис. 8.5).

Вопрос. Имеем сигнал e(t) частотой f_1, с коэффициентом заполнения $\alpha = 1/5$ и уровнями 0 и E (см. рис. 8.3). Изобразить его односторонний амплитудный спектр.

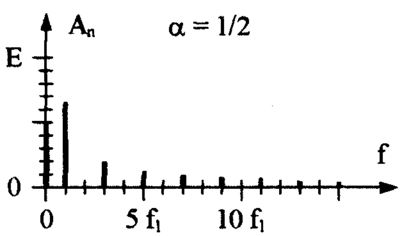


Рис. 8.6. Односторонний спектр амплитуд прямоугольного сигнала e(t)

Ответ. Рассчитываем амплитуды спектральных линий, исходя из коэффициентов разложения в ряд Фурье согласно § 8.2.2, затем чертим односторонний спектр (рис. 8.6).

$$A_0 = |a_0| = \left|\frac{E}{2}\right|, \text{ и при } n \geqslant 1$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\left|\frac{2E\sin(n\pi/2)}{n\pi}\right|.$$

Так как E положительно, имеем:

Линия	DC	F	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10	H11	H12
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A_n	$\frac{E}{2}$	$\frac{2E}{\pi}$	0	$\frac{2E}{3\pi}$	0	$\frac{2E}{5\pi}$	0	$\frac{2E}{7\pi}$	0	$\frac{2E}{9\pi}$	0	$\frac{2E}{11\pi}$	0
f	0	f_1	$2f_1$	$3f_1$	$4f_1$	$5f_1$	$6f_1$	$7f_1$	$8f_1$	$9f_1$	$10f_1$	$11f_1$	$12f_1$

б) Двусторонний амплитудный спектр

Двусторонний амплитудный спектр периодического сигнала является графическим представлением амплитудных линий $|c_0|$ постоянной составляющей и синусоидальных составляющих частот nf, где $n \in \mathbf{N}^*$ (см. § 8.1).

$$|c_0| = A_0 = |a_0|, \quad |c_n| = |-c_n| = \frac{A_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Пример 8.3.4. (См. рис. 8.5).

Внимание! При действительном четном сигнале мы часто удовлетворяемся представлением части положительных частот двустороннего амплитудного спектра. Тогда не следует путать это представление с односторонним амплитудным спектром, составляющие которого следующие:

$$|c_0| = A_0 = |a_0|, \quad 2|c_n| = 2|-c_n| = A_n.$$

Вопрос. Имеем сигнал e(t) частотой f_1, с коэффициентом заполнения $\alpha = 1/5$ и уровнями 0 и E (см. рис. 8.3). Изобразить его двусторонний амплитудный спектр.

Ответ. Рассчитываем амплитуды спектральных линий, исходя из коэффициентов разложения в ряд Фурье согласно § 8.2.2, затем чертим двусторонний спектр (рис. 8.7).

$$|c_0| = A_0 = \left|\frac{E}{2}\right|, \quad |c_n| = |-c_n| = \frac{A_n}{2} = \frac{E\sin(n\pi/2)}{n\pi} \quad (n \geqslant 1).$$

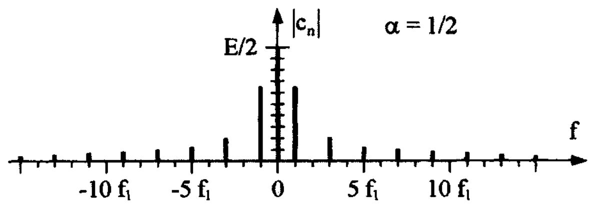


Рис. 8.7. Двусторонний амплитудный спектр прямоугольного сигнала e(t)

в) Фазовый спектр

Фазовый спектр периодического сигнала графически представляется фазовыми линиями φ_n синусоидальных составляющих с частотами nf при $n \in \mathbf{N}^*$ для одностороннего спектра и $n \in \mathbf{Z}$ для двустороннего спектра (см. § 8.1) и постоянной составляющей $\varphi_0 = 0$ (по определению).

$$\begin{cases} \cos\varphi_n = a_n/A_n \\ \sin\varphi_n = -b_n/A_n \end{cases} \qquad \varphi_n = -\varphi_{-n} = \arg(c_n) = -\arg(-c_n) \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

Примечание. При иной форме записи (см. § 8.1), если заменить функцию косинуса на функцию синуса, то фазовый спектр составляется из линеек φ_n.

Пример 8.3.5. (см. рис 8.5). Односторонний фазовый спектр получается простым исключением части, соответствующей отрицательным частотам.

8.4. Некоторые классические сигналы

Здесь приводится разложение в ряд Фурье и односторонний амплитудный спектр некоторых классических сигналов (рис. 8.8–8.13).

$$\frac{s(t)}{S_M} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\cos[(2p+1)\omega_1 t]}{2p+1} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos(\omega_1 t) - \frac{\cos(3\omega_1 t)}{3} + \frac{\cos(5\omega_1 t)}{5} - \frac{\cos(7\omega_1 t)}{7} + \ldots\right].$$

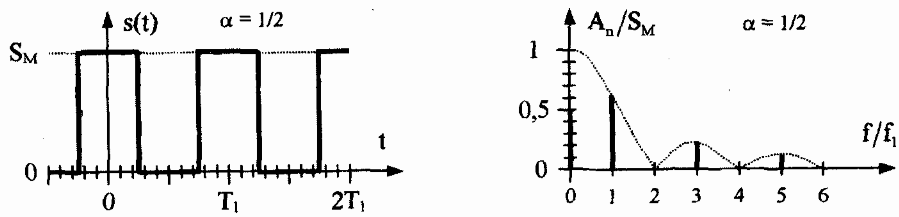


Рис. 8.8. Прямоугольный сигнал с коэффициентом заполнения $\alpha = 1/5$

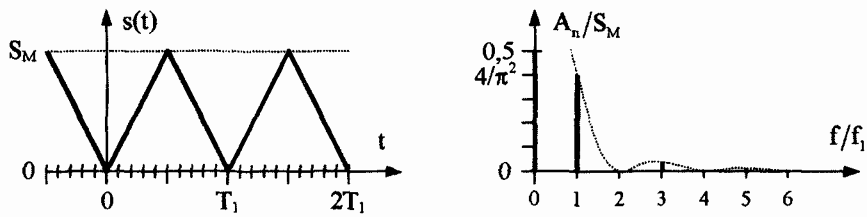


Рис. 8.9. Прямоугольный сигнал с произвольным α

$$\frac{s(t)}{S_M} = \alpha + 2\alpha \sum_{T=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi} \cos(n\omega_1 t) =$$

$$= \alpha + 2\alpha \left[\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \cos(\omega_1 t) + \frac{\sin(2\alpha\pi)}{2\alpha\pi} \cos(2\omega_1 t) + \ldots \right]$$

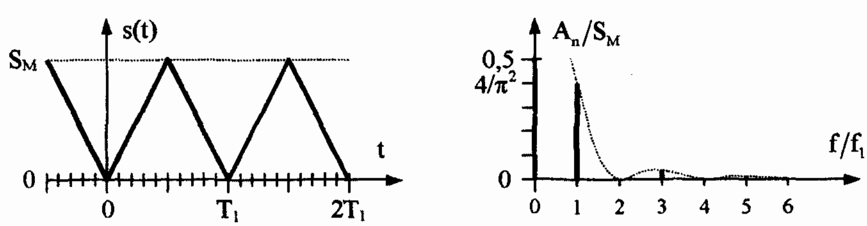


Рис. 8.10. Треугольный сигнал с симметричным наклоном

$$\frac{s(t)}{S_M} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos\left[(2p+1)\omega_1 t\right]}{2p+1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{\cos(3\omega_1 t)}{3} + \frac{\cos(5\omega_1 t)}{5} + \frac{\cos(7\omega_1 t)}{7} + \ldots \right].$$

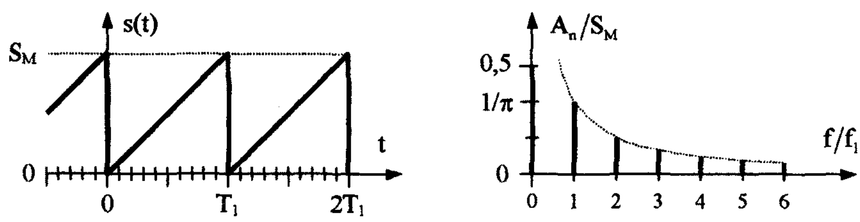


Рис. 8.11. Пилообразный сигнал

$$\frac{s(t)}{S_M} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\omega_1 e)}{n}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t) + \frac{\cos(2\omega_1 t)}{2} + \frac{\cos(3\omega_1 t)}{3} + \frac{\cos(4\omega_1 t)}{4} + \dots\right].$$

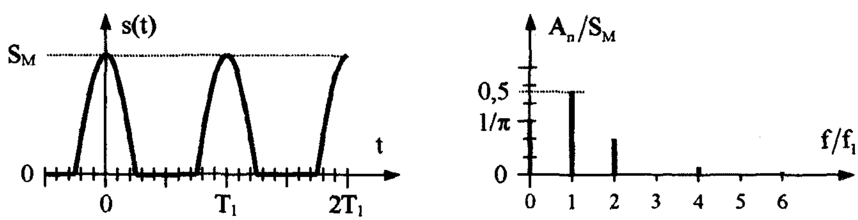


Рис. 8.12. Сигнал однополупериодного выпрямления

$$\frac{s(t)}{S_M} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(2n\omega_1 t)}{4n^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{2\cos(2\omega_1 t)}{3} - \frac{2\cos(4\omega_1 t)}{15} + \frac{2\cos(6\omega_1 t)}{35} + \dots\right]$$

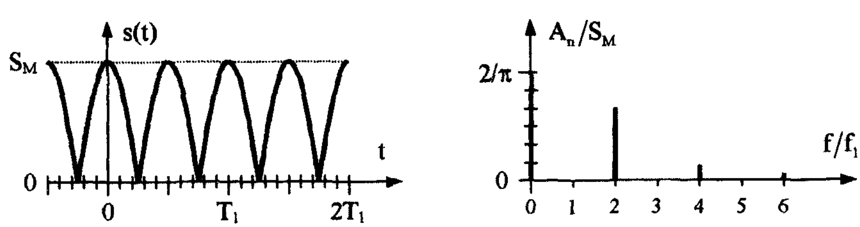


Рис. 8.13. Сигнал двухполупериодного выпрямления

$$\frac{s(t)}{S_M} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{4n^2-1}\cos(2n\omega_1 t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos(2n\omega_1 t)}{4n^2-1} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{2\cos(2\omega_1 t)}{3} - \frac{2\cos(4\omega_1 t)}{15} + \frac{2\cos(6\omega_1 t)}{35} - \frac{2\cos(8\omega_1 t)}{63} + \ldots\right]$$

ГЛАВА 9

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

Линейная система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами в функции времени. Мы ограничимся здесь решением этих уравнений для $t \in]0, +\infty]$ и начальных условий при $t = 0^+$ по физическим соображениям. В дифференциальных уравнениях этой главы импульсы Дирака не рассматриваются, так как их математический аппарат выходит за пределы этого издания. Следовательно, рассматриваемые сигналы непрерывны и дифференцируемы, кроме некоторых случаев при $t = 0$. Однако линейная система может описываться использованием преобразований Лапласа (см. гл. 10), благодаря чему можно проще учитывать возможные импульсы, в том числе и при $t = 0$.

9.1. Линейная система

• ***Определение.*** *Линейная система* (рис. 9.1) имеет на входе сигнал $e = e(t)$, а на выходе — $s = s(t)$. Она обладает свойством пропорциональности и аддитивности, т. е. если выход $s_1(t)$ является откликом системы на входной сигнал $e_1(t)$, а выход $s_2(t)$ является откликом системы на входной сигнал $e_2(t)$, то откликом системы на входной сигнал $\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)$ будет сигнал на выходе системы $\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$.

Рис. 9.1. Линейная система

• ***Дифференциальные уравнения.*** Линейная система имеет воздействие на входе и отклик на выходе и описывается линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \cdots + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \ (m \leqslant n).$$

Примечание. Дифференциальное уравнение не содержит постоянных членов, так как их можно исключить заменой переменных. Более обобщенно, если отклик на выходе зависит от нескольких входных сигналов, используется принцип линейности (см. гл. 2).

9.2. Общий принцип исследования переходных процессов

Имея в линейной системе входное воздействие e(t) при заданных начальных условиях мы наблюдаем ее отклик на выходе s(t).

9.2.1. Воздействующие сигналы

Для оценки системы во времени исследуется ее отклик на воздействующие сигналы (табл. 9.1), исходя из произвольно заданного времени $t = 0$. Обычно исследуются следующие отклики.

- *Отклик на ступенчатую единичную функцию* (*переходная характеристика цепи*): на систему воздействует ступенчатая функция. Это случай подключения на напряжение электрической цепи.
- *Отклик на линейно нарастающее воздействие*: на систему воздействует линейно нарастающий сигнал с заданным наклоном, который возрастает теоретически до бесконечности, но на практике ограничивается насыщением. Это, например, случай плавного пуска двигателя.
- *Отклик на синусоидальное воздействие.* Это, например, подключение устройства на напряжение сети.
- *Импульсная характеристика цепи*: на систему воздействуют импульсы Дирака (см. гл. 10).

Примечание. Можно рассматривать также отклик системы в частотной области, подвергая ее воздействию со стороны непрерывного синусоидального сигнала переменной частоты: *отклик на гармоническое воздействие* (см. гл. 5).

9.2.2. Математическое описание электрической цепи

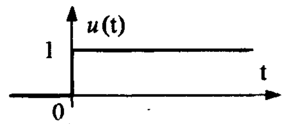
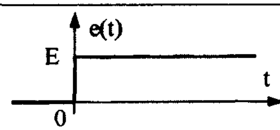
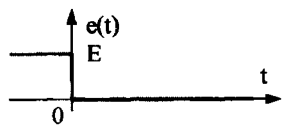
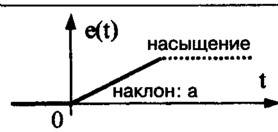
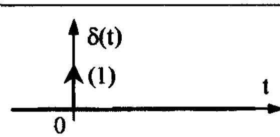
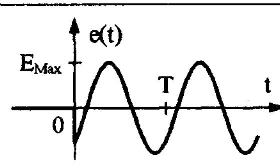
Оно осуществляется согласно законам и теоремам электротехники (гл. 2). Возможны два способа.

1) Записывается дифференциальное уравнение для искомых электрических переменных непосредственно в функции времени. Это выполняется в данной главе.

2) Записывается уравнение в преобразованиях Лапласа (при нулевых начальных условиях) для искомых электрических величин соответственно

понятию полного операционного сопротивления. Затем происходит возврат к функциям времени, определяемым дифференциальными уравнениями. Преимущества этого способа состоят в том, что дифференциальное уравнение заменяется символическим расчетом, в котором оператор d/dt заменяется умножением на p (см. гл. 10).

Таблица 9.1. Типовые сигналы возмущения

Название	Определение	Зависимость от времени
Единичная функция (Хевисайда)	$\begin{cases} t<0 & u(t)=0 \\ t>0 & u(t)=1 \end{cases}$	
Возрастающий скачок амплитуды	$e(t)=Eu(t)$	
Спадающий скачок амплитуды	$e(t)=E(1-u(t))$	
Линейно нарастающий сигнал	$e(t)=atu(t)$	
Единичный импульс (Дирака)	$\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)$	
Синусоидальное воздействие	$e(t)=E_{Max}\sin(\omega t+\varphi_0)u(t)$	

Примечание. Порядок дифференциального уравнения равен числу интегрирований (напряжение на зажимах конденсатора или ток в индуктивности). Проще говоря — числу реактивных элементов (конденсаторов, катушек индуктивности) в цепи.

9.2.3. Решение дифференциального уравнения

• ***Свободная и принужденная составляющие отклика.*** Отклик системы на входное воздействие e(t), т. е. решение дифференциального уравнения (см. § 9.1) ищется в форме:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t),$$

где $s_1(t)$ — общее решение уравнения без второго члена, не зависящее от системы и от начальных условий. Эта составляющая отклика называется *свободным или естественным откликом*; $s_2(t)$ — частное решение уравнения со вторым членом той же природы, что и входное возмущение $e(t)$. Эта составляющая называется *принужденным откликом.* Для простых случаев $s_2(t)$ определяется идентификацией функции той же природы, что $e(t)$.

• ***Начальные условия. Определение постоянных.*** Дифференциальное уравнение решаем относительно $t \in]0, +\infty]$ с начальными условиями, установленными для $t = 0^+$ в соответствии с физическим смыслом. Это определяет постоянные интегрирования.

Перед приложением воздействия на систему $e(t)$ в реактивных элементах (конденсаторы и катушки) электрической цепи может быть уже накоплена энергия при $t = 0^-$, которая сохраняется и при подаче возмущения при $t = 0^+$ (для энергии не существует разрывов). При напряжении на конденсаторе U_0 он содержит запас энергии $W_C = CU_0^2/2$, а катушка с током I_0 имеет запас энергии $W_L = LI_0^2/2$. В таком случае, если значения энергии соответствуют моменту коммутации, значения напряжения U_0 на обкладках конденсатора и тока I_0 в обмотке катушки являются начальными условиями. Следует напомнить, что:

1) Напряжение на зажимах конденсатора всегда непрерывно

$$\forall t, \quad u_C(t^-) = u_C(t^+) \Rightarrow u_C(0^-) = u_C(0^+).$$

2) Ток в катушке индуктивности всегда непрерывен

$$\forall t, \quad i_L(t^-) = i_L(t^+) \Rightarrow i_L(0^-) = i_L(0^+).$$

Примечания.

- Однако если напряжение на зажимах конденсатора (или ток в индуктивности) в окрестностях t меняется «очень быстро», то с точки зрения теории можно допустить, что это напряжение (этот ток) в окрестностях t имеют разрыв. Однако необходимые в этом случае математические методы выходят за рамки этой книги.
- Для того чтобы получить единственное решение дифференциального уравнения n-го порядка, нужно знать n начальных условий на выходе системы и их производные.

9.2.4. Переходный и установившийся режимы

Отклик системы на входное воздействие e(t) может быть записан также как:

$$s(t) = s_{пер}(t) + s_{уст}(t),$$

где $s_{пер}(t)$ — составляющая отклика, называемая *переходной*, эта составляющая стремится к нулю, когда t стремится к бесконечности; $s_{уст}(t)$ — составляющая отклика, называемая *установившейся*, эта составляющая не стремится к нулю, когда t стремится к бесконечности[1]. Она может быть постоянной, периодической с постоянными средними и действующими значениями и т. д.

Система находится в *переходном режиме*, пока переходная составляющая отклика не затухнет. Продолжительность такого режима зависит от постоянных времени системы. Во время переходного режима.

Система находится в *установившемся режиме* после затухания переходного процесса. В установившемся режиме $s(t) = s_{уст}(t)$.

Примечание. В общем случае свободная составляющая отклика отличается от его переходной составляющей $s_{пер}(t) \neq s_1(t)$, а принужденная составляющая отклика отличается от его установившегося значения $s_{уст}(t) \neq s_2(t)$. Однако часто встречается особый случай, когда $s_{пер}(t) = s_1(t)$ и $s_{уст}(t) = s_2(t)$.

9.3. Линейная система первого порядка

Линейная система первого порядка с одним входом и одним выходом подчинена дифференциальному уравнению первого порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$a_1\frac{ds}{dt} + a_0 s = b_1\frac{de}{dt} + b_0 s, \quad \text{где} \quad a_1 > 0 \quad \text{и} \quad a_0 \geqslant 0.$$

9.3.1. Методы решения дифференциального уравнения

а) Первый случай: $a_0 > 0$ (и $a_1 > 0$)

• ***Каноническая форма.*** Эта форма позволяет легко идентифицировать характеристические величины.

$$\tau\frac{ds}{dt} + s = C_1\frac{de}{dt} + C_0 e \underset{\text{если} b_0 \neq 0}{=} C_0\left(\tau'\frac{de}{dt} + e\right),$$

где $\tau = a_1/a_0$ — постоянная времени системы; $C_0 = b_0/a_0$ — статическая передаточная функция системы; $C_1 = b_1/a_0$ — константа. Если $b_0 \neq 0$, то $C_1 = C_0\tau'$, где $\tau' = b_1/b_0$ — вторая постоянная времени.

[1]Она может стремиться к нулю при спадающем до нуля воздействии. — *Прим. перев.*

• ***Последовательность решения (для $t > 0$).***

1) Общее решение уравнения без второго члена:

$$s(t) = Ke^{-t/\tau},$$

где K — постоянная интегрирования.

2) Частное решение уравнения со вторым членом $s_2(t)$ зависит от второго члена.

3) Общее решение уравнения со вторым членом:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = Ke^{-t/\tau} + s_2(t).$$

4) Определение постоянной интегрирования из начального условия:

$$s(0^+) = S_0 = K + s_2(0^+).$$

5) Запись общего решения уравнения со вторым членом.

б) Второй случай: $a_0 = 0$ (и $a_1 > 0$)

• ***Дифференциальное уравнение.***

$$\frac{ds}{dt} = \frac{b_1}{a_1}\frac{de}{dt} + \frac{b_0}{a_1}e.$$

• ***Последовательность решения (для $t > 0$).*** Интегрируется правая часть, постоянная интегрирования определяется из начальных условий.

9.3.2. Переходная характеристика цепи

Здесь рассматривается очень распространенный случай: отклик системы первого порядка на скачок $e(t) = Eu(t)$ при $b_1 = 0$ или все, что приводит к такому же решению, к напряжению вида $e(t) = E$ для $t > 0$ (в этом случае мы не уточняем $e(t)$ для $t < 0$).

а) Первый случай: $a_0 > 0$

Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется как: $\tau\frac{ds}{dt} + s = C_0E$.

1) Общее решение уравнения без второго члена: $s_1(t) = Ke^{-t/\tau}$.

2) Частное решение уравнения со вторым членом: $s_2(t) = C_0E$.

3) Общее решение уравнения со вторым членом:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = Ke^{-t/\tau} + C_0E = Ke^{-t/\tau} + S_{+\infty}, \quad \text{где} \quad S_{+\infty} = \lim_{t\to\infty} s(t).$$

4) Постоянная интегрирования. Полагая начальное условие $s(0^+) = S_0$, получим:

$$s(0^+) = S_0 = K + S_{+\infty} \Rightarrow K = S_0 - S_{+\infty}.$$

5) Общее решение уравнения со вторым членом:

$$s(t) = (S_0 - S_{+\infty})e^{-t/\tau} + S_{+\infty} = (S_{+\infty} - S_0)(1 - e^{-t/\tau}) + S_0.$$

6) График в функции времени (рис. 9.2). Для $S_0 < S_{+\infty}$ сигнал s(t) возрастающий, тогда как для $S_0 > S_{+\infty}$ сигнал s(t) нисходящий.

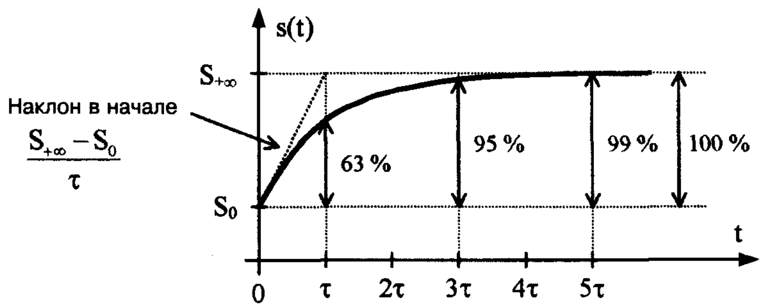


Рис. 9.2. График в функции времени при $0 < S_0 < S_{+\infty}$

Примечание. *Длительность процесса* обычно соответствует достижению 5% установившегося значения ($s(t) = 0{,}95\,S_{+\infty}$), что определяется как $t_{\text{п.п}} \approx 3\tau$.

Вопрос. Определить время $t_2 - t_1$ перехода от значения S_1 к значению S_2 при входной переменной s(t).

Ответ. Значение S_1(соответственно S_2) достигается за время t_1 (соответственно t_2). Имеем:

$$S_1 = (S_0 - S_{+\infty})e^{-t_1/\tau} + S_{+\infty} \Rightarrow t_1 = \tau \ln \frac{S_{+\infty} - S_0}{S_{+\infty} - S_1}$$

и

$$S_2 = (S_0 - S_{+\infty})e^{-t_2/\tau} + S_{+\infty} \Rightarrow t_2 = \tau \ln \frac{S_{+\infty} - S_0}{S_{+\infty} - S_2},$$

откуда:

$$t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{S_{+\infty} - S_1}{S_{+\infty} - S_2}.$$

б) Второй случай: $a_0 = 0$ (идеальный интегратор)

Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\frac{ds}{dt} = C'E, \quad \text{где} \quad C' = b_0/a_1.$$

Интегрированием, полагая начальные условия $s(0^+) = S_0$, получим: $S(t) = C'Et + S_0$, что представляет собой уравнение прямой.

Вопрос. Определить время $(t_2 - t_1)$, необходимое для перехода от одного значения S_1 к значению S_2 при входной переменной s(t).

Ответ. Значение S_1 (соответственно S_2) достигается за время t_1 (соответственно t_2).

Имеем:

$$S_1 = C'Et_1 + S_0 \quad \text{и} \quad S_2 = C'Et_2 + S_0,$$

откуда:

$$t_2 = t_1 = \frac{S_2 - S_1}{C'E}.$$

9.3.3. Простейшие электрические схемы

а) Пассивный псевдоинтегратор RC и LR (рис. 9.3)

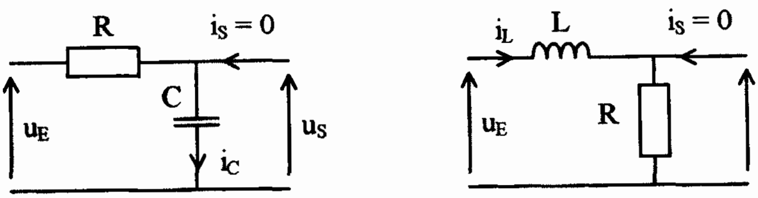


Рис. 9.3. Пассивный псевдоинтегратор RC и LR

Вопрос. Записать дифференциальное уравнение связи выходного напряжения со входным напряжением для цепей RC и LR (см. рис. 9.3).

Ответ.

Цепь RC $\quad \left.\begin{array}{l} u_E - u_S = Ri_C \\ i_C = C\frac{du_S}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \tau\frac{du_S}{dt} + u_S = u_E, \quad$ где $\quad \tau = RC.$

Цепь LR $\quad \left.\begin{array}{l} u_E - u_S = L\frac{di}{dt} \\ u_S = Ri_L \end{array}\right\} \Rightarrow \tau\frac{du_S}{dt} + u_S = u_E, \quad$ где $\quad \tau = \frac{L}{R}.$

Вопрос. Исследовать отклик на скачок входного напряжения $u_E(t) = Eu(t)$ при напряжении $u_E(t) = E$ для $t > 0$ (в этом случае значение $u_E(t)$ не уточняется для $t < 0$). Утверждается, что при $t = 0$ в реактивных элементах никакого запаса энергии не было.

Ответ. Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\tau\frac{du_S}{dt} + u_S = E.$$

1) Общее решение уравнения без второго члена: $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$.
2) Частное решение уравнения со вторым членом: $u_{S2}(t) = E$.
3) Общее решение уравнения со вторым членом:

$$u_S(t) = u_{S1}(t) + u_{S2}(t) = Ke^{-t/\tau} + E.$$

4) Постоянная интегрирования. Если при $t = 0$ в реактивных элементах не запасается никакой энергии (до ступенчатого воздействия), имеем:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{и} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.$$

И поскольку $u_S = u_C$ или $u_S = Ri_L$, получим: $u_S(0^+) = 0 = K - a\tau$, откуда $K = a\tau$.

5) Общее решение уравнения со вторым членом: $u_S(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ для $t > 0$.

6) График в функции времени (рис. 9.2).

Примечание. В установившемся режиме напряжение $u_S(t) = E$ равно входному напряжению $u_E(t) = E$.

Вопрос. Исследовать отклик на линейно нарастающее напряжение $u_E(t) = at u(t)$. Полагается, что при $t = 0$ в реактивных элементах никакого запаса энергии не было.

Ответ. Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\tau\frac{du_S}{dt} + u_S = E.$$

1) Общее решение уравнения без второго члена: $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$.

2) Частное решение уравнения со вторым членом:

$$u_{S2}(t) = mt + n \Rightarrow du_{S2}/dt = m.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение, получим:

$$\tau m + mt + n = at \Rightarrow m = a \quad \text{и} \quad n = -a\tau \Rightarrow u_{S2} = a(t - \tau).$$

3) Общее решение уравнения со вторым членом:

$$u_S(t) = u_{S1}(t) + u_{S2}(t) = Ke^{-t/\tau} + a(t - \tau).$$

4) Постоянная интегрирования. Если при $t = 0$ в реактивных элементах не запасается никакой энергии (до ступенчатого воздействия), имеем:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{и} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.$$

И поскольку $u_S = u_C$ или $u_S = Ri_L$, получим: $u_S(0^+) = 0 = K - a\tau$, откуда $K = a\tau$.

5) Общее решение уравнения со вторым членом: $u_S(t) = a\tau e^{-t/\tau} + a(t - \tau)$ для $t > 0$.

6) График в функции времени (рис. 9.4).

Примечание. В установившемся режиме напряжение $u_S(t) = a(t - \tau)$ запаздывает на время τ от входного напряжения $u_E(t) = at$. Эти напряжения теоретически повышаются до бесконечности. Практически насыщение источника или разрушение элементов ограничат рост напряжений.

Вопрос. Исследовать отклик $u(t)$ на синусоидальное воздействие $u_E(t) = E_{Max}\sin(\omega t)$. Предполагается, что в реактивных элементах нет никакого запаса энергии при $t = 0$.

Ответ. Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\tau\frac{du_S}{dt} + u_S = E_{Max}\sin(\omega t).$$

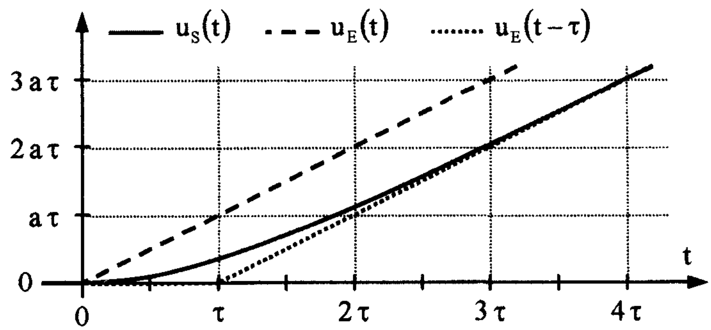


Рис. 9.4. Временна́я диаграмма

1) Общее решение уравнения без второго члена: $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$.

2) Частное решение уравнения со вторым членом в виде:

$$u_{S2}(t) = M\sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad du_{S2}(t)/dt = M\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Производя замены в дифференциальном уравнении, получим:

$$M\omega\tau\cos(\omega t + \varphi) + M\sin(\omega t + \varphi) = E_{Max}\sin(\omega t).$$

Или:

$$M\omega\tau(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) + M(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi) = E_M\sin(\omega t),$$

откуда следует система:

$$\begin{array}{l} M\omega\tau\cos\varphi + M\sin\varphi = 0 \\ -M\omega\tau + Mc\cos\varphi = E_{Max} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = -\omega\tau \quad \text{и} \quad M = \frac{E_{Max}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}.$$

3) Общее решение уравнения со вторым членом:

$$u_S(t) = u_{S1}(t) + u_{S2}(t) = Ke^{-t/\tau} + M\sin(\omega t + \varphi).$$

4) Постоянная интегрирования. До воздействия скачком в реактивных элементах не было накоплено никакой энергии. Следует:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{и} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.$$

И поскольку $u_S = u_C$ или $u_S = Ri_L$, получим :

$$u_C(0^+) = 0 = K + M\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad K = -M\sin\varphi.$$

5) Общее решение уравнения со вторым членом:

$$u_S(t) = -M\sin(\varphi)e^{-t/\tau} + M\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{для} \quad t > 0.$$

Примечание. В установившемся режиме выходное синусоидальное напряжение $u_S(t) = M\sin(\omega t + \varphi)$. Этот результат мы обнаруживаем в гармоническом анализе (см. гл. 5).

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad \Rightarrow \quad |\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Вопрос. Получить уравнение тока i_C (рис. 9.3) для отклика на скачок напряжения $u_E(t) = Eu(t)$.

Ответ. Так как мы знаем выражение напряжения на зажимах конденсатора, достаточно получить его производную:

$$u_S(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \Rightarrow \quad i_c(t) = C\frac{du_S(t)}{dt} = \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau} \quad \text{для} \quad t > 0.$$

Вопрос. Получить уравнение тока i_L (рис. 9.3) для отклика на скачок напряжения $u_E(t) = Eu(t)$.

Ответ. Так как мы знаем выражение напряжения на зажимах сопротивления, достаточно разделить его на R:

$$u_S(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \Rightarrow \quad i_L(t) = \frac{u_S(t)}{R} = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{для} \quad t > 0.$$

б) Пассивные псевдодифференцирующие звенья RC и RL (рис. 9.5)

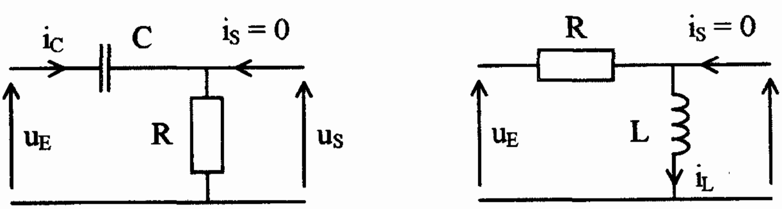


Рис. 9.5. Пассивные псевдодифференцирующие звенья RC и RL

Вопрос. Получить дифференциальное уравнение связи входного и выходного напряжений цепей RC и RL (рис. 9.5).

Ответ.

$$\text{Цепь RC} \quad \left.\begin{array}{l} u_S = Ri_C \\ i_C = C\frac{d(u_E - u_S)}{dt} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \tau\frac{du_S}{dt} + u_S = \tau\frac{du_E}{dt}, \quad \text{где} \quad \tau = RC.$$

$$\text{Цепь RL} \quad \left.\begin{array}{l} u_S = L\frac{di}{dt} \\ u_E - u_S = Ri_L \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \tau\frac{du_S}{dt} + u_S = \tau\frac{du_E}{dt}, \quad \text{где} \quad \tau = L/R.$$

Вопрос. Исследовать отклик на скачок входного напряжения $u_E(t) = Eu(t)$ при напряжении $u_E(t) = E$ для $t > 0$. Полагается, что при $t = 0$ в реактивных элементах никакого запаса энергии не было.

Ответ. Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\tau\frac{du_S}{dt} + u_S = 0, \quad \text{так как} \quad \frac{du_E}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0.$$

1) Общее решение уравнения без второго члена: $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$.

2) Частное решение уравнения со вторым членом: $u_{S2}(t) = 0$.

3) Общее решение уравнения со вторым членом: $u_S(t) = Ke^{-t/\tau}$.

4) Постоянная интегрирования. Если при $t = 0$ в реактивных элементах не запасается никакой энергии (до ступенчатого воздействия), имеем:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{и} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.$$

И поскольку $u_S = u_E - u_C$ или $u_S = u_E - Ri_L$, получим:

$$u_S(0^+) = u_E(0^+) = E, \text{ откуда } K = E.$$

5) Общее решение уравнения со вторым членом. $u_S(t) = Ee^{-t/\tau}$ для $t > 0$.

6) График в функции времени (рис. 9.2, где $S_0 = E$ и $S_{+\infty} = 0$).

Примечание. В установившемся режиме напряжение $u_S(t) = 0$.

Вопрос. Исследовать отклик на линейно нарастающее напряжение $u_E(t) = at_u(t)$. Полагается, что при $t = 0$ в реактивных элементах никакого запаса энергии не было.

Ответ. Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\tau\frac{du_S}{dt} + u_S = a\tau, \text{ так как} \frac{du_E}{dt} = a.$$

1) Общее решение уравнения без второго члена: $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$.

2) Частное решение уравнения со вторым членом: $u_{S2}u(t) = a\tau$.

3) Общее решение уравнения со вторым членом:

$$u_S(t) = u_{S1}(t) + u_{S2}(t) = Ke^{-t/\tau} + a\tau.$$

4) Постоянная интегрирования. Если при $t = 0$ в реактивных элементах не запасено энергии (до воздействия), имеем:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{и} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.$$

И поскольку $u_S = u_E - u_C$ или $u_S = u_E - Ri_L$, получим:

$$u_S(0^+) = u_E(0^+) = 0 = K + a\tau, \text{ откуда } K = a\tau.$$

Общее решение уравнения со вторым членом. $u_S(t) = a\tau(1 - e^{-t/\tau})$ для $t > 0$.

Примечание. В установившемся режиме напряжение на выходе $u_S(t) = a\tau$ — величина постоянная равная, наклону входного сигнала с коэффициентом τ.

Однако, напряжение на входе не может повышаться бесконечно вследствие насыщения источника.

в) Заряд конденсатора постоянным током (рис. 9.6)

Вопрос. Получить дифференциальное уравнение и вывести из него интегральную форму.

Ответ.

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}i \Rightarrow u = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i dt = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i dt + u(0).$$

Вопрос. Исследовать отклик на скачок тока $i(t) = Iu(t)$. Предполагается, что при $t = 0$ конденсатор не разряжен.

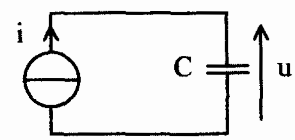


Рис. 9.6. Заряд конденсатора

Ответ. Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется как: $\frac{du}{dt} = \frac{I}{C}$. Интегрируем правую часть: $u = \frac{I}{C}t + K$. Поскольку до подачи возмущения конденсатор был не разряжен, имеем:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0.$$

Так как $u = u_C$, то $u(0^+) = U_0 = K$. Окончательно:

$$u = \frac{I}{C}t + U_0 \quad \text{для} \quad t > 0.$$

Примечание. Постоянная времени системы равна нулю, поэтому переходного процесса нет. Практически, так как источник тока не идеален, напряжение будет ограничено максимальным значением насыщения, если только конденсатор не буде пробит раньше.

г) Идеальная катушка индуктивности при постоянном напряжении (рис. 9.7)

Вопрос. Получить дифференциальное уравнение и вывести из него интегральную форму.

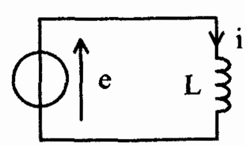


Рис. 9.7. Идеальная катушка под напряжением

Ответ.

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}e \Rightarrow i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} e\,dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} e\,dt + i(0).$$

Вопрос. Исследовать отклик на скачок напряжения $e(t) = Eu(t)$. Предполагается, что при $t = 0$ в катушке имеется запас энергии.

Ответ. Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется как: $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$. Интегрируем правую часть: $i = \frac{E}{L}t + K$. Поскольку до подачи воздействия в катушке имелся запас энергии, имеем:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0.$$

Так как $i = i_L$, то $i(0^+) = I_0 = K$. Окончательно:

$$i = \frac{E}{L}t + I_0 \quad \text{для} \quad t > 0.$$

Примечание. Постоянная времени системы равна нулю, поэтому переходного процесса нет. Практически либо сгорит катушка, либо ток будет ограничен максимальным значением из-за насыщения, так как источник напряжения, не будучи идеальным, не сможет увеличивать ток.

9.4. Линейная система второго порядка

Линейная система второго порядка имеет один вход и один выход и подчинена дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$a_2\frac{d^2s}{dt^2}+a_1\frac{ds}{dt}+a_0s=b_2\frac{d^2e}{dt^2}+b_1\frac{dt}{dt}+b_0e,\quad \text{где}\quad a_2>0,\ a_1\geqslant 0,\ a_0\geqslant 0.$$

9.4.1. Последовательность решения дифференциального уравнения

а) Первый случай: $a_0>0$ ($a_2>0$, $a_1\geqslant 0$)

• ***Канонические формы.*** Они позволяют легко идентифицировать характеристические величины.

$$\tau_0^2\frac{d^2s}{dt^2}+2m\tau_0\frac{ds}{dt}+s=C_2\frac{d^2e}{dt^2}+C_1\frac{dt}{dt}+C_0e\underset{\substack{\text{если}\\ b_0\neq 0}}{=}C_0\left(\tau_0'\frac{d^2e}{dt^2}+2m'\tau_0'\frac{de}{dt}+e\right);$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2m\omega_0\frac{ds}{dt}+\omega_0^2s=\Gamma_2\frac{d^2e}{dt^2}+\Gamma_1\frac{dt}{dt}+\Gamma_0e\underset{\substack{\text{если}\\ b_0\neq 0}}{=}\Gamma_2\left(\frac{d^2e}{dt^2}+2m'\omega_0'\frac{de}{dt}+\omega_0'^2e\right),$$

где $\tau_0=\sqrt{a_2/a_0}$ — собственная или естественная постоянная времени системы (обозначается также как τ_N); $\omega_0=1/\tau_0$ — собственная или естественная угловая частота системы (обозначается также как ω_N); $m=$ $=a_1/2\sqrt{a_0a_2}$ — коэффициент демпфирования системы. $C_0=b_0/a_0$ — статическая передаточная функция системы. C_1, C_2, Γ_0, Γ_1, Γ_2 — константы, $\Gamma_k=\omega_0^2C_k$, $\omega_0'=1/\tau_0'$ — вторая резонансная угловая частота; m' — второй коэффициент демпфирования.

Примечание. Коэффициент демпфирования m и коэффициент перенапряжения Q_0 или коэффициент сверхтока электрической цепи (см. гл. 5) связаны соотношением: $Q_0=1/2m$.

• ***Общее решение уравнения без второго члена.*** Различают четыре режима, следующих из анализа характеристического уравнения:

$$p^2+2m\omega_0p+\omega_0^2=0\quad\text{или}\quad\tau_0^2p^2+2m\tau_0p+1=0\quad\Rightarrow\quad\Delta=\omega_0^2(m^2-1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_1=-m\omega_0+\sqrt{\Delta}\quad\Rightarrow\quad p_2=-m\omega_0-\sqrt{\Delta}.$$

1) *Апериодический процесс*: $m>1$. Сумма двух спадающих экспонент. Переходный процесс сильно демпфирован, не колебательный.

$$s_1(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \frac{1}{\tau_1} = \omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2-1}), \\ \frac{1}{\tau_2} = \omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2-1}). \end{cases}$$

Чем больше демпфирование, тем больше удалены друг от друга угловые частоты $\omega 1$ и ω_2, с одной стороны, и постоянные времени τ_1 и τ_2, с другой стороны.

2) *Предельно апериодический процесс (критический):* $m = 1$. Это теоретическая граница между апериодическим и колебательным затухающим процессами.

$$s_1(t) = (K_1 t + K_2)e^{-t/\tau_0}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\tau_0} = \omega_0.$$

3) *Колебательный затухающий процесс:* $0 < m < 1$. Имеем произведение спадающей экспоненты и синусоиды. Переходный процесс демпфирован.

$$s_1(t) = e^{-m\omega_0 t} M \sin(\omega t + \varphi), \quad \text{где} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$$

или

$$s_1(t) = e^{-m\omega_0 t}(K_1 \sin\omega t + K_2 \cos\omega t), \quad \text{где} \quad K_1 = M\cos\varphi;\ K_2 = M\sin\varphi.$$

Круговая частота затухающих колебаний, *псевдочастота* и псевдопериод определяются как

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad T = \frac{1}{f}.$$

Постоянная времени затухания колебаний (огибающей затухающей синусоиды):

$$\tau = \frac{1}{m\omega_0} = \frac{\tau_0}{m} \quad \Rightarrow \quad s_1(t) = e^{-m\omega_0 t} M \sin(\omega t + \varphi).$$

4) *Колебательный незатухающий процесс*: $m = 0$. Нет демпфирования колебаний.

$$s_1(t) = M\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Примечание. Пары постоянных (K_1 и K_2) и (M, φ) определяются начальными условиями.

• ***Последовательность решения (для t > 0).***

1) Общее решение уравнения без второго члена относительно $s_1(t)$.

2) Частное решение уравнения со вторым членом относительно $s_2(t)$, которое зависит от второго члена.

3) Общее решение уравнения со вторым членом: $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.

4) Из начальных условий определение двух постоянных: $s(0^+) = S_0$ и $\frac{ds(0^+)}{dt} = S_0'$.

5) Запись общего решения уравнения со вторым членом.

б) Второй случай: $a_0 = 0$ ($a_2 > 0$ и $a_1 \geqslant 0$)

• ***Дифференциальное уравнение.***

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{a_1}{a_2}\frac{ds}{dt} = \frac{b_2}{a_2}\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{b_1}{a_2}\frac{de}{dt} + \frac{b_0}{a_2}e.$$

– Если $a_1 > 0$, выполняем замену переменной $y = ds/dt$ ($\Rightarrow dy/dt = d^2s/dt^2$). Это приводит к дифференциальному уравнению первого порядка. Затем для нахождения $s(t)$ достаточно проинтегрировать полученное выражение.

– Если $a_1 = 0$, интегрируем дважды правую часть.

– Постоянные интегрирования определяются из двух начальных условий.

9.4.2. Переходная характеристика

Рассматриваем очень распространенный случай: отклик системы второго порядка на воздействие скачком $e(t) = Eu(t)$ при $a_0 > 0$ и $a_1 > 0$, $b_2 = 0$, $b_1 = 0$ или то, что приводит к такому решению при $e(t) = E$ для $t > 0$ (в этом случае мы не уточняем $e(t)$ при $t < 0$). Начальные условия полагаем нулевыми.

Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E, \quad \text{где} \quad s(0^+) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{ds(0^+)}{dt} = S_0'.$$

1) *Апериодический процесс*: $m > 1$.

Общее решение уравнения без второго члена относительно $s_1(t)$:

$$s_1(t) = K_1e^{-t/\tau_1} + K_2e^{-t/\tau_2}.$$

Частное решение уравнения со вторым членом относительно $s_2(t) = E$.

Общее решение уравнения со вторым членом:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = K_1e^{-t/\tau_1} + K_2e^{-t/\tau_2} + E.$$

Постоянные интегрирования. Полагая начальные условия нулевыми, имеем:

$$s(0^+) = K_1 + K_2 + E = 0 \quad \text{и} \quad \frac{ds(0^+)}{dt} = \frac{-K_1}{\tau_1} + \frac{-K_2}{\tau_2} = 0,$$

откуда:

$$K_1 = \frac{E\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \quad \text{и} \quad K_2 = \frac{-E\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Общее решение уравнения со вторым членом:

$$s(t) = E\left[1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}\left(\tau_1e^{-t/\tau_1} - \tau_2e^{-t/\tau_2}\right)\right].$$

График $s(t)$ в функции времени приведен на рис. 9.8.

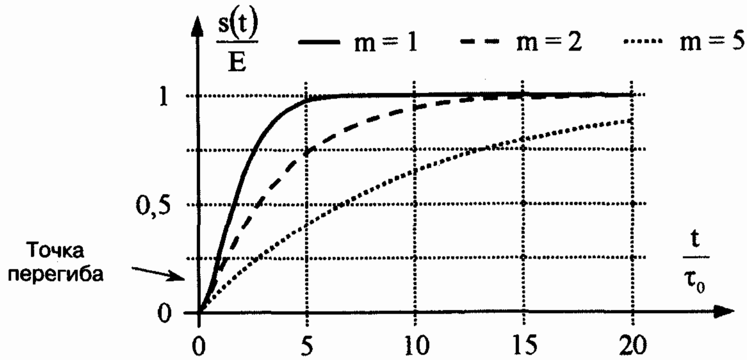


Рис. 9.8. График в функции времени при $m \geqslant 1$

Примечание. *Длительность процесса* обычно определяется достижением 5% установившегося значения: $s(t) = 0{,}95\ E$. Для $m \gg 1$ $\tau_1 \approx 2m\tau_0$ и $\tau_2 \approx \tau_0/2m$.

Тогда система ведет себя почти как система первого порядка, и только наклон в начале позволяет различить системы первого и второго порядка.

$$m \gg 1 \quad \Rightarrow \quad t_{(5\%)} \approx 3\tau_1 \approx 6m\tau_0.$$

2) *Предельно апериодический процесс*: $m = 1$.

Общее решение уравнения без второго члена относительно $s_1(t)$:

$$s_1(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2}.$$

Частное решение уравнения со вторым членом относительно $s_2(t) = E$.

Общее решение уравнения со вторым членом:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2} + E.$$

Постоянные интегрирования. Полагая начальные условия нулевыми, имеем:

$$s(0^+) = K_2 + E = 0 \quad \text{и} \quad \frac{ds(0^+)}{dt} = K_1 + \frac{-K_2}{\tau_0} = 0,$$

откуда:

$$K_1 = \frac{-E}{\tau_0} \quad \text{и} \quad K_2 = -E.$$

Общее решение уравнения со вторым членом:

$$s(t) = E\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right)e^{-t/\tau_0}\right].$$

График $s(t)$ в функции времени приведен на рис. 9.8.

3) *Колебательный затухающий процесс*: $0 < m < 1$.

Общее решение уравнения без второго члена относительно $s_1(t)$:

$$s_1(t) = M\sin\varphi + E = 0.$$

Частное решение уравнения со вторым членом относительно $s_2(t) = E$.

Общее решение уравнения со вторым членом:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = e^{-m\omega_0 t} M \sin(\omega t + \varphi) + E.$$

Постоянные интегрирования. Полагая начальные условия нулевыми, имеем:

$$s(0^+) = M \sin\varphi + E = 0$$

и

$$\frac{ds(t)}{dt} = e^{-m\omega_0 t} M(-m\omega_0 \sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ds(0^+)}{dt} = M(-m\omega_0 \sin\varphi + \omega\cos\varphi) = 0,$$

откуда:

$$M = \frac{-}{E}\sqrt{1-m^2}, \quad \sin\varphi = \sqrt{1-m^2}, \quad \cos\varphi = m, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}.$$

Общее решение уравнения со вторым членом:

$$s(t) = E\left[1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\sin(\omega t + \varphi)\right], \quad \text{где} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}.$$

График $s(t)$ в функции времени приведен на рис. 9.9.

Уравнения огибающих (см. рис. 9.10). В общем решении со вторым членом значения синуса находятся между +1 и −1. Следовательно, кривая находится между двух огибающих, уравнения которых:

$$\mathrm{Env}_1(t) = E\left[1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\right] \quad \text{и} \quad \mathrm{Env}_2(t) = E\left[1 + \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\right].$$

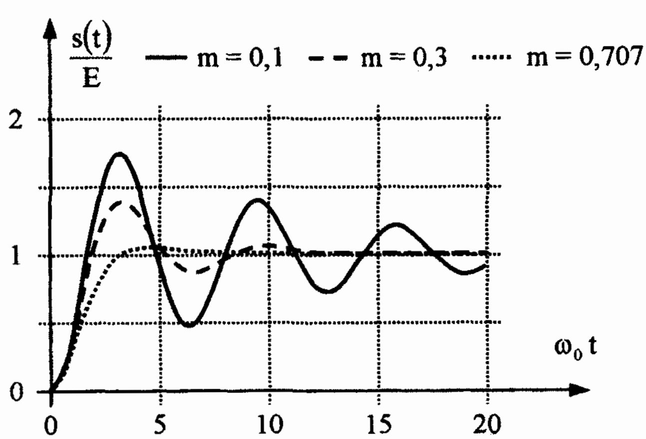


Рис. 9.9. График в функции времени для $0 < m < 1$

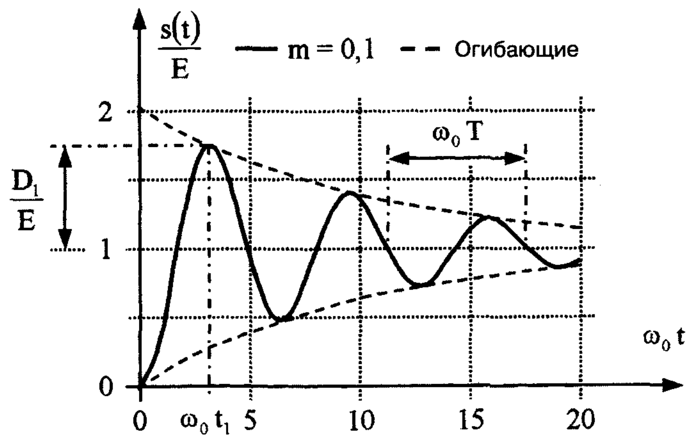
Колебательный затухающий процесс (см. рис. 9.10):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}.$$

Перерегулирование, т. е. первое превышение установившегося значения (см. рис. 9.10). Определение этого значения важно, так как это позволяет определить демпфирование при одном эксперименте. Значения времени, при которых функция максимальна или минимальна, как значения экстремальные, определяются при равенстве нулю производной функции s(t). Отсюда следуют значения времени и соответствующие им значения перерегулирования (значения первого отклонения в % по отношению к установившемуся значению):

$$t_1 = \frac{p}{w} = \frac{p}{w_0\sqrt{1-m^2}} = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{D_1}{E} = \frac{S_M - E}{E} = e^{\frac{-mp}{\sqrt{1-m^2}}}.$$

Рис. 9.10. Огибающие, перерегулирование D_1 и псевдопериод T



Примечание. Время отклика определяется при достижении 5% установившегося значения: $(0{,}95 \leqslant s(t) \leqslant 1{,}05)$ E. Приближенное решение следует при рассмотрении огибающих вместо кривой рассматриваемого процесса. Отсюда:

$$t_{(5\%)} \approx \frac{1}{m\omega_0} \ln \frac{20}{\sqrt{1-m^2}},$$

если $m = 1$, то $t_{(5\%)} \approx \frac{3}{m\omega_0}$.

4) *Незатухающий колебательный процесс*: $m = 0$. Выводы делаются из предшествующего случая:

$$M = -E \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Следует:

$$s(t) = E\left[1 - \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = E(1 - \cos\omega_0 t).$$

Это незатухающая синусоида с угловой частотой ω_0 и амплитудой E при среднем значении $E_{ср}$.

9.4.3. Элементарные электрические цепи

а) Последовательная резонансная цепь (рис. 9.11)

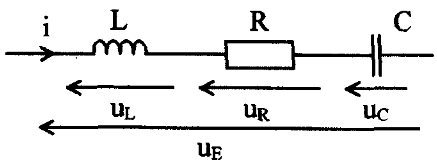


Рис. 9.11. Последовательная резонансная цепь

Вопрос. Получить дифференциальное уравнение связи напряжения u_C с напряжением u_E, напряжения u_R с напряжением u_E, напряжения u_L с напряжением u_E (см. рис. 9.11).

Ответ. Дифференциальные уравнения связи u_C с напряжением u_E имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &u_L + u_R + u_C = u_E \\ &i = C\tfrac{du_C}{dt} \\ &u_R = Ri = RC\tfrac{du_C}{dt} \\ &u_L = L\tfrac{di}{dt} = LC\tfrac{d^2u_C}{dt^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &LC\tfrac{d^2u_C}{dt^2} + RC\tfrac{du_C}{dt} + u_C = u_E \\ &\tfrac{d^2u_C}{dt^2} + \tfrac{R}{L}\tfrac{du_C}{dt} + \tfrac{1}{LC}u_C = \tfrac{1}{LC}u_E. \end{aligned}$$

Каноническая форма:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_E,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Дифференциальное уравнение связи напряжения u_R с напряжением u_E.

$$\left.\begin{aligned} &u_L + u_R + u_C = u_E \\ &u_R = Ri \\ &i = C\tfrac{du_C}{dt} = \tfrac{u_R}{R} \\ &u_L = L\tfrac{di}{dt} = \tfrac{L}{R}\tfrac{du_R}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\tfrac{du_L}{dt} + \tfrac{du_R}{dt} + \tfrac{du_C}{dt} = \tfrac{du_E}{dt} \\ &\tfrac{L}{R}\tfrac{d^2u_R}{dt^2} + \tfrac{du_R}{dt} + \tfrac{u_R}{RC} = \tfrac{du_E}{dt} \\ &\tfrac{d^2u_R}{dt^2} + \tfrac{R}{L}\tfrac{du_R}{dt} + \tfrac{1}{LC}R = \tfrac{R}{L}\tfrac{du_E}{dt}. \end{aligned}$$

Каноническая форма:

$$\frac{d^2u_R}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du_R}{dt} + \omega_0^2 u_R = 2m\omega_0\frac{du_E}{dt}.$$

Дифференциальное уравнение связи напряжения u_L с напряжением u_E. Подобно предыдущим решениям получим каноническую форму:

$$\frac{d^2u_L}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du_L}{dt} + \omega_0^2 u_L = \frac{d^2u_E}{dt^2}.$$

Вопрос. Исследовать отклик напряжения u_C на скачок напряжения $e(t) = Eu(t)$. Предполагается, что при $t = 0$ в реактивных элементах нет никакого запаса энергии.

Ответ. Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется как:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.$$

Начальные условия: $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.

$$\left.\begin{aligned} i_L(0^+) &= i_L(0^-) = 0 \\ i_L &= i = C\tfrac{du_C}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{du_C(0^+)}{dt} = 0.$$

Отклик на единичный скачок воздействия (переходная характеристика) для этого уравнения уже был рассмотрен. Он зависит от значения коэффициента демпфирования (см. § 9.4.2).

Вопрос. Исследовать отклик напряжения u_C на скачок напряжения $e(t) = Eu(t)$. Предполагается, что при $t = 0$ в реактивных элементах нет никакого запаса энергии и коэффициент демпфирования больше единицы ($m > 1$).

Ответ. Для $t > 0$ дифференциальное уравнение запишется как:

$$\frac{d^2u_R}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du_R}{dt} + \omega_0^2 u_R = 0.$$

Имеем апериодический процесс ($m > 1$), откуда:

Общее решение уравнения без второго члена:

$$u_{R1}(t) = K_1e^{-t/\tau_1} + K_2e^{-t/\tau_2}.$$

Частное решение уравнения со вторым членом $u_{R2}(t) = 0$.

Общее решение уравнения со вторым членом:

$$u_R(t) = u_{R1}(t) + u_{R2}(t) = K_1e^{-t/\tau_1} + K_2e^{-t/\tau_2} + E.$$

Начальные условия и постоянные интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} i_L(0^+) &= i_L(0^-) = 0 \\ u_R &= Ri = Ri_L \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u_R(0^+) = 0.$$

$$\frac{du_R}{dt} = R\frac{di}{dt} = \frac{R}{L}u_L = \frac{R}{L}(u_E - u_R - u_C)$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{du_R(0^+)}{dt} &= \tfrac{R}{L}(u_E(0^+) - u_C(0^+)) \\ u_C(0^+) &= u_C(0^-) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{du_R(0^+)}{dt} = \frac{RE}{L}.$$

Постоянные интегрирования:

$$u_R(0^+) = K_1 + K_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{du_R(0^+)}{dt} = \frac{-K_1}{\tau_1} + \frac{-K_2}{\tau_2} = \frac{RE}{L},$$

откуда (после решения):

$$K_1 = -K_2 = \frac{E_{Max}}{\sqrt{m^2-1}}.$$

Общее решение уравнения со вторым членом :

$$u_R(t) = \frac{mE}{\sqrt{m^2-1}}(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \quad \text{для} \quad t > 0.$$

Примечание. Напряжение $u_R(t)$ можно получить дифференцированием $u_C(t)$.

$$u_R = Ri = RC\frac{du_C}{dt}.$$

б) Параллельная резонансная цепь (рис. 9.12)

Вопрос. Получить дифференциальное уравнение связи напряжения u и тока i.

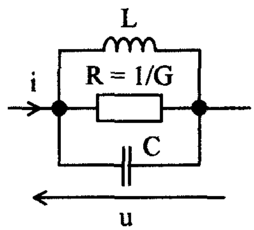


Рис. 9.12. Параллельная резонансная цепь

Ответ.

$$\left.\begin{aligned} u &= L\tfrac{di}{dt} \\ i_C &= L = C\tfrac{du}{dt} \\ u &= Ri_R \\ i &= i_L + i_R + i_C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &u = L\tfrac{di_L}{dt} = L\tfrac{d(i-i_R-i_C)}{dt} \\ &u = L\tfrac{di}{dt} - \tfrac{L}{R}\tfrac{du}{dt} - LC\tfrac{d^2u}{dt^2} \\ &\tfrac{d^2u}{dt^2} + \tfrac{1}{RC}\tfrac{du}{dt} + \tfrac{1}{LC}u = \tfrac{1}{C}\tfrac{di}{dt} \end{aligned} .$$

Каноническая форма:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = R2m\omega_0\frac{di}{dt},$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

ГЛАВА 10

СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Преобразование Лапласа позволяет заменить описывающее линейную систему дифференциальное уравнение алгебраическим, которое упрощает математическое описание электрической цепи благодаря введению понятия полного операционного сопротивления. Приводимое здесь преобразование Лапласа позволяет решить все задачи, описанные обыкновенными дифференциальными уравнениями (см. гл. 9) и, кроме того, правильно учесть возникновение возможных импульсов (например, производная в точке разрыва функции).

10.1. Функция воздействия

Функция f действительной переменной t называется *воздействием*, если: $\forall t < 0,\ f(t) = 0$, и *сбросом воздействия*, если: $\forall t \geqslant 0,\ f(t) = 0$.

> ***Метод***
> Умножая любую функцию f на функцию Хевисайда (или единичную ступень) u с возможным запаздыванием на $t_0 \geqslant 0$, получим функцию воздействия $f(t)u(t - t_0)$.

Пример 10.1.1. Синусоидальное воздействие (табл. 10.1).

Примечание. При наличии разрыва функции при $t = t_0$ фиксируется граничное значение функции $f(t_0^-)$ до точки разрыва t_0 и граничное значение $f(t_0^+)$ после точки разрыва t_0.

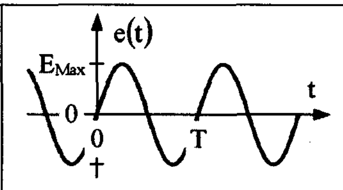
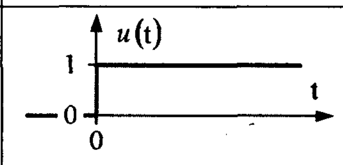
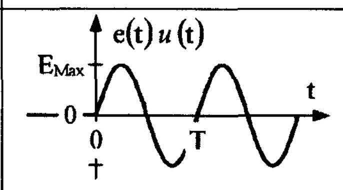
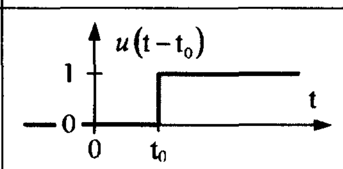
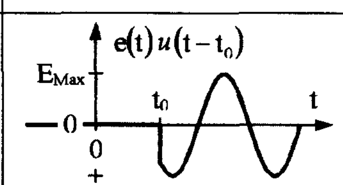
$$f(t_0^-) = \lim_{t \to t_0^-} f(t) \text{ и} f(t_0^+) = \lim_{t \to t_0^+} f(t).$$

Пример 10.1.2. Для единичной ступени имеем: $u(0^-) = 0$ и $u(0^+) = u(0) = 1$.

Примечание. Функция f действительной переменной t равна сумме функции воздействия ($t \geqslant 0$) и функции сброса воздействия ($t < 0$).

$$f(t) = f(t)u(t) + f(t)(1 - u(t)).$$

Таблица 10.1. Построение синусоид воздействия

Обычная синусоида	$e(t) = E_{Max} \sin(\omega t)$	
Единичный скачок (функция Хевисайда)	$\begin{cases} t < 0 u(t) = 0 \\ t \geqslant 0 u(t) = 1 \end{cases}$	
Синусоида воздействия	$e(t)u(t) = E_{Max} \sin(\omega t)u(t)$	
Сдвиг единичного воздействия	$\begin{cases} t < 0 u(t - t_0) = 0 \\ t \geqslant 0 u(t - t_0) = 1 \end{cases}$	
Синусоида со смещением на $t_0 \geqslant 0$	$e(t)u(t - t_0) = E_{Max} \sin(\omega t)u(t - t_0)$	

10.2. Единичные импульсы Дирака

Единичные импульсы не являются функциями в обычном понимании, а являются распределением. Посредством преобразования Лапласа это понятие позволяет нам найти «импульсный отклик» системы и найти решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Их решение содержит разрывы или импульсы. Хотя изучение распределений выходит за рамки нашей книги, здесь мы приводим несколько полезных действий, осуществляя переход к интуитивным пределам и позволяя некоторые отклонения от математической строгости.

10.2.1. Определение и понятие

Импульс Дирака, или *распределение Дирака*, или еще — *единичный импульс*, обозначаемый $\delta(t)$, является импульсом единичной площади длительностью ε, стремящейся к нулю (табл. 10.2). Его условно представляют стрелкой единичной высоты.

Таблица 10.2. Импульсы единичной площади

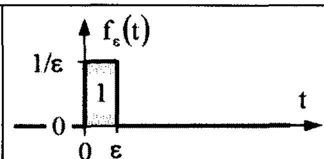
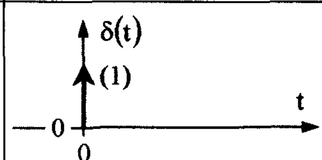
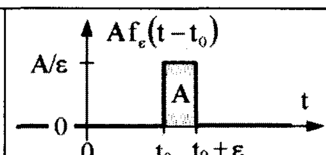
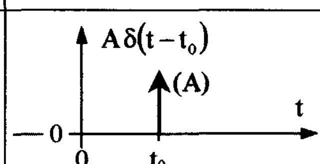
Импульс единичной площади: $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(u(t) - u(t - \varepsilon))$	
Импульс Дирака; $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$	

Таблица 10.3. Импульсы площадью A со смещением на t_0

Импульс площадью A со смещением на t_0: $Af_\varepsilon(t - t_0) = \frac{A}{\varepsilon}(u(t - t_0) - u(t - t_0 - \varepsilon))$	
Импульс Дирака площадью A *со смещением на* t_0 $A\delta(t - t_0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} Af_\varepsilon(t - t_0)$	

Аналогично: импульс Дирака площадью A, смещенный на t_0, обозначаемый как $A\delta(t - t_0)$, является импульсом площадью A длительностью ε, стремящейся к нулю (табл. 10.3). Его условно представляют стрелкой высотой A. Этот теоретический импульс практически приближен импульсу площадью с увеличенной амплитудой A и очень малой длительностью.

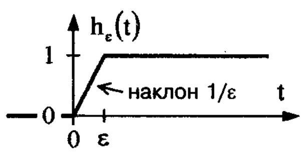
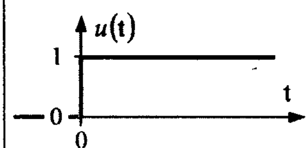
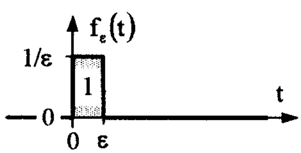
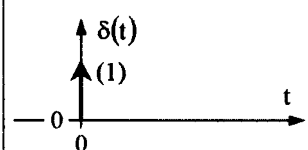
Примечание.

$$\delta(\omega t - \alpha) = \frac{1}{|\omega|}\delta\left(1 - \frac{\alpha}{\omega}\right) \qquad \text{(расширение Дирака).}$$

10.2.2. Соотношения при единичной ступени

Из табл. 10.4 интуитивно следует, что ступень Хевисайда является пределом ступени с линейным переходом $h_\varepsilon(t)$ с наклоном $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, импульс единичной площади $f_\varepsilon(t)$ — это производная ступени с линейным переходом $h_\varepsilon(t)$, а импульс Дирака представляет собой предел импульса единичной площади $f_\varepsilon(t)$. Следовательно, можно принять, что импульс Дирака — это производная ступени Хевисайда. Для распределений это доказывается строго.

Таблица 10.4. Ступень Хевисайда и импульс Дирака

Ступень с линейным переходом 	$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(t) = u(t)$ $\longrightarrow$	*Ступень Хевисайда* 
$\downarrow$ $f_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}h_\varepsilon(t)$		$\downarrow$ $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$
Импульс единичной площади 	$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t) = \delta(t)$ $\longrightarrow$	*Импульс Дирака* 

В более общей формулировке следует, что производной ступени A, сдвинутой на t_0 ($t_0 \geqslant 0$), является импульс Дирака площадью A, сдвинутый на t_0:

$$\begin{cases} t < t_0 & Au(t - t_0) = 0 \\ t \geqslant t_0 & Au(t - t_0) = A \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}[Au(t - t_0)] = A\delta(t - t_0).$$

10.2.3. Умножение функции на импульс Дирака

Имеем непрерывную функцию f, ограниченную в области $]-\infty, +\infty]$. Умножение f на импульс Дирака единичной площади при t_0 дает импульс Дирака площадью $f(t_0)$.

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0).$$

Это соотношение является основой описания дискретизации функции посредством суммы импульсов Дирака с площадями $f(t_i)$, где t_i — дискретные значения времени. Интегрируя его, получим замечательное соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0), \text{ так как } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \text{ (единичная площадь).}$$

10.2.4. Производная в точке разрыва

Имеем кусочно-непрерывную функцию f и полагаем, что производная кусочно-непрерывна за исключением конечного числа точек разрыва первого рода t_i (т. е. таких, для которых существуют $f(t_i^+)$ и $f(t_i^-)$).

Для каждой точки разрыва первого рода t_i производная функции f содержит в распределении импульс Дирака площадью, равной скачку функции f:

$$f'(t_i) = \left[f(t_i^+) - f(t_i^-)\right] \delta(t-t_1),$$

где $f(t_i^+) - f(t_i^-)$ — скачок f в точке t_i. Далее, обозначая $\{f'(t)\}$ производную функции f в обычном понимании функций, имеем:

$$f'(t0 = \{f'(t)\} + \sum_i \left[f(t_i^+) - f(t_i^-)\right] \delta(t-t_i).$$

Это значит, что производная при распределениях, обозначаемая как f', равна производной в обычном понимании функций, обозначаемой как $\{f'(t)\}$, к которой добавляется импульс Дирака площадью, равной скачку функции f в каждой точке разрыва t_i.

Вопрос. Выразить производную функции f, определяемой для $t_0 \geqslant 0$ как $f(t) = E_0 + E_м \sin(\omega t)u(t-t_0)$. Привести графики функции и ее производной в зависимости от времени.

Ответ. Графики в зависимости от времени приведены на рис. 10.1.

$$\frac{df(t)}{dt} = \left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} + \left[f(t_0^+) - f(t_0^-)\right] \delta(t-t_0) =$$

$$= \omega E_м \cos(\omega t)u(t-t_0) + E_м \sin(\omega t_0)\delta(t-t_0).$$

10.3. Преобразование Лапласа

10.3.1. Определение

Имеем действительную или комплексную функцию действительной переменной t. При условии существования (т. е. сходимости) интеграла односторонним преобразованием Лапласа (ПЛ) функции f называется функция F комплексной переменной p (называемой переменной Лапласа), определяемая как:

$$F(p) = L[f](p) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt.$$

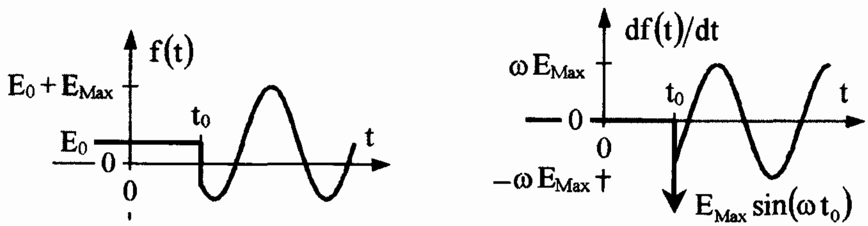


Рис. 10.1. Пример производной для распределений

Примечания.

– Это выражение означает соответствие $F(f \xrightarrow{\mathcal{L}} F)$: f — оригинал функции F, а F — изображение функции f. Очень часто для удобства записи обозначают:

$$F(p) = L[f(t)] \quad \text{и} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)].$$

– Нижним пределом интеграла является $t = 0^-$. Такой выбор позволяет корректно учитывать возможный импульс f при $t = 0$. Например, производная разрывной функции при $t = 0$ (см. § 10.2.4).

– Только часть, соответствующая $t \geqslant 0$, учитывается при расчетах преобразования. Следовательно, две идентичные функции при $t \geqslant 0$ имеют одно и то же преобразование. И соответственно, имея одно преобразование, можно определить только часть f для $t \geqslant 0$. Отсюда следует замечательное равенство:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)u(t)].$$

– Если переменная t является временем, выраженным в секундах (с), то переменная p выражается в радианах в секунду (рад/с).

Вопрос. Определить ПЛ единичной ступени (см. табл. 10.1), затем постоянной 1.

Ответ.

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} u(t)e^{-pt}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right],$$

если $p \neq 0$. Или:

$$U(p) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$$

(так как $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt} = 0$, если $\mathrm{Re}(p) > 0$). Аналогично:

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}.$$

10.3.2. Таблица ПЛ некоторых распространенных функций

Таблица 10.5.

	Оригинал f(t) при $t \geqslant 0$	Изображение F(p)	Условия Полюса и нули
Импульс Дирака	$\delta(t)$	1	$\forall p$
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 p}$	$t_0 \in \mathbf{R}^+$, $\forall p$
n-я производная импульса Дирака	$\delta^{(n)}(t)$	p^n	$n \in \mathbf{N}^{+*}$, $\forall p$. Нуль: 0
Постоянная единица	1	$\frac{1}{p}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$. Полюс: 0
Линейное возрастание	t	$\frac{1}{p^2}$	$\mathrm{Re}(p) > 0$. Двойной полюс: 0
Степень	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Re}(p) > 0$ Кратный полюс: 0
Экспонента	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$a \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(p+a) > 0$ Полюс: $-a$
Синусоида	$\sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{p^2+\omega_1^2}$	$\omega_1 \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Re}(p) > 0$. Полюса: $\pm j\omega_1$. Нуль: 0
Косинусоида	$\cos(\omega_1 t)$	$\frac{p}{p^2+\omega_1^2}$	$\omega_1 \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Re}(p) > 0$. Полюса: $\pm j\omega_1$. Нуль: 0
Степень x на экспоненту	$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(p+a) > 0$ Полюс: 0
Синусоида x на экспоненту	$e^{-at}\sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{(p+a)^2+\omega_1^2}$	$\omega_1 \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Re}(p+a) > 0$ Полюса: $-a \pm j\omega_1$
Косинусоида x на экспоненту	$e^{-at}\cos(\omega_1 t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_1^2}$	$\omega_1 \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Re}(p+a) > 0$ Полюса: $-a \pm j\omega_1$. Нуль: $-a$

Примечание. *Нулями* функции F(p) называются комплексные значения p, при которых F(p) стремится к нулю, а *полюсами* функции F(p) — комплексные значения p, при которых F(p) стремится к бесконечности.

10.3.3. Свойства и теоремы

Отметим, что

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)u(t)] = F(p) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[g(t)u(t)] = G(p)$$

(табл. 10.6).

Таблица 10.6.

1) Линейность	$\mathcal{L}\,[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$
2) Теорема подобия (изменение масштаба), $k \in \mathbf{R}^*$	$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{\lvert k\rvert} F\left(\frac{p}{k}\right)$
3) Преобразование смещения (теорема запаздывания), $t_0 \in \mathbf{R}^+$	$\mathcal{L}\,[f(t - t_0)u(t - t_0)] = e^{-t_0 p}F(p)$ (Заменить все t на $t - t_0$)
4) Преобразование производной	$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = pF(p) - f(0^-)$
5) Преобразование интеграла $t \in \mathbf{R}^*$	$\mathcal{L}\left[\int\limits_{0^-}^{t} f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}$
6) Преобразование произведения свертки	$\mathcal{L}\,[f(t)u(t) * g(t)u(t)] = F(p)G(p)$
7) Преобразование периодической функции с периодом T и функции f_0	$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}$
8) Сдвиг преобразования, $a \in \mathbf{C}$ (демпфирование во времени, если $a \in \mathbf{R}^*$)	$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right] = F(p + a)$ (Заменить все p на $p + a$)
9) Производная преобразования	$\mathcal{L}\,[-tf(t)] = \frac{d}{dp}F(p)$
10) Теорема о начальном значении ($t = 0^+$) (при условии наличия пределов)	$f(0^+) = \lim\limits_{p\to+\infty} pF(p)$
11) Теорема о конечном значении (при условии наличия пределов)	$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$

Примечания.

1) Если f(t) не является воздействием, то

$$\mathcal{L}\,[f(t - t_0)u(t - t_0)] \neq \mathcal{L}\,[f(t - t_0)]\,.$$

2) Следует

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = p^2F(p) - pf(0^-) - f'(0^-),$$

где $f'(0^-) = \frac{d}{dt}f(0^-)$.

– Если f(t) — функция воздействия, то $f'(0^-) = 0$, откуда:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = pF(p) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = p^nF(p).$$

– Для непрерывной функции за исключением, возможно при $t = 0$, имеем:

$$\mathcal{L}\left[\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}\right] = pF(p) - f(0^+)$$

(в обычном понимании функций, см. § 10.2.4).

3) $f(t)u(t) * g(t)u(t) = \int\limits_0^t f(\tau)u(\tau)g(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau.$

4) Определяющая функция $f_0(t)$ такова, что

$$\begin{cases} f_0(t) = f(t), & \text{если } t \in [0, T], \\ f_0(t) = 0, & \text{если } t \notin [0, T]. \end{cases}$$

5) Обобщение: $\mathcal{L}\left[(-t)^n f(t)\right] = \frac{d^n}{dp^n}F(p)$, $n \in \mathbf{N}$.

10.3.4. Нахождение изображения F функции f

Чтобы определить изображение F функции f на практике наиболее часто прибегают к таблицам преобразований, свойствам и теоремам (§ 10.3.2, § 10.3.3).

Метод   Обычно функцию f разлагают на сумму функций (свойство линейности), для которых можно просто установить преобразование Лапласа.

Вопрос. Дать ПЛ функции $f(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$, определенной на $[0, \infty[$.
Ответ. Функция f является суммой двух функций, приводимых в табл. 10.5, согласно которой:

$$\mathcal{L}[1]] = \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}\left[e^{-t/\tau}\right] = \frac{1}{p + 1/\tau} = \frac{\tau}{1 + p\tau},$$

откуда:

$$F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = E\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p}\right) = \frac{E}{p(1 + \tau p)}.$$

Вопрос. Имеем функцию $f(t) = e^{-t/\tau}\cos(\omega_1 t)$, определенную на $[0, \infty[$. Дать ее ПЛ.

Ответ. Функция f является произведением косинусоиды, приведенной в табл. 10.5, на $e^{-t/\tau}$, отмеченным сдвигом аргумента у изображения (табл. 10.6).

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega_1 t)\right] = \frac{p + a}{p^2 + \omega_1^2} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right] = F(p + a),$$

откуда:

$$F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega_1^2}$$

(все p заменяются на $p + a$).

Вопрос. Имеем функцию $f(t) = E_{Max}\cos(\omega_1 t)$, определенную на $[0,\infty[$. Дать ПЛ производной f' функции f.

Ответ. Функция f' является производной косинусоиды, приведенной в табл. 10.5.

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_1 t)] = \frac{p}{p^2+\omega_1^2}.$$

Согласно теореме о преобразовании производной (см. § 10.3.3) имеем:

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = pF(p) - f'(0^-) = \frac{E_M p^2}{p^2+\omega_1^2} - f(0^-),$$

где $f(0^-)$ — значение f при $t = 0^-$. Например, если f является воздействием, то $f(0^-) = 0$, а если f непрерывна, то $f(0^-) = f(0^+) = E_{Max}\cos(0) = E_{max}$. Можно этот результат получить также, начиная с дифференцирования (в области распределения, так как f может оказаться разрывной в точке $t = 0$). Затем можно найти преобразование производной.

$$f'(t) = -\omega_1 E_{Max}\sin(\omega_1 t) + \left[f(0^+) - f(0^-)\right]\delta(t), \quad \text{где} \quad f(0^+) = E_M.$$

Далее имеем (см. табл. 10.5):

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = -\omega_1 E_{Max}\frac{\omega_1}{p^2+\omega_1^2} + E_{Max} - f(0^-) = \frac{E_{Max}p^2}{p^2+\omega_1^2} - f(0^-).$$

Вопрос. Имеем функцию, называемую «синусоидальным импульсом» и изображенную на рис. 10.2. Привести ее ПЛ.

$$\begin{cases} f_0(t) = E_{Max}\sin(\omega_1 t)u(t), & \text{если } t \in [0, T/2], \\ f_0(t) = 0, & \text{если } t \notin [0, T/2]. \end{cases}$$

Ответ. Функция может быть представлена как сумма двух синусоид воздействия, одна из них запаздывает по отношению к другой на $T/2$.

$$f_0(t) = E_{Max}\left[\sin(\omega_1 t)u(t) + \sin(\omega_1(t - T/2))u(t - T/2)\right],$$

$$\text{откуда: } F_0(p) = L\left[f_0(t)\right] = \frac{\omega_1}{p^2+\omega_1^2}(1 + e^{-pT/2}), \quad \text{где} \quad \omega_1 T = 2\pi.$$

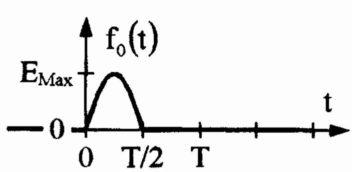


Рис. 10.2. Синусоидальный импульс

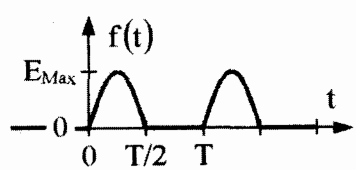


Рис. 10.3. Синусоида однополупериодного выпрямления

Вопрос. Имеем функцию «синусоида однополупериодного выпрямления» (рис. 10.3) при определяющей функции $f_0(t)$ (см. рис. 10.2). Определить ПЛ.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_0(t - nT).$$

Ответ. Используя формулу преобразования периодической функции (см. § 10.3.3), получим:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}} = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} \frac{1 + e^{-pT/2}}{1 - e^{-pT}}, \quad \text{где} \quad \omega_1 T = 2\pi.$$

10.3.5. Нахождение оригинала f по изображению F

Для нахождения оригинала функции f по ее изображению F чаще всего на практике используются таблицы преобразований, свойства и теоремы (§ 10.3.2 и § 10.3.3). По определению односторонности ПЛ (§ 10.3.1) возможным является только определение f для $t \geqslant 0$. Значение f для $t = 0^-$ может быть определено только исходя из физического смысла (воздействие или непрерывность, например).

> ***Метод***
> Обычно изображение F является рациональной дробью $N(p)/D(p)$. Тогда изображение F разлагается на сумму элементарных дробей (свойство линейности), для которых можно просто найти оригиналы.

а) Рациональная дробь, обладающая только простыми полюсами

> ***Метод***
> Изображение F рациональной дроби $N(p)/D(p)$, обладающее только простыми полюсами, причем $d°N(p) < d°D(p)$, запишется в виде:
> $$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)\cdots(p - p_n)}$$
> таково, что $\forall i \neq j,\ p_i \neq p_j$. Тогда его разложение на элементарные дроби запишется в виде:
> $$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{p - p_n},$$
> где A_i — действительные или комплексные коэффициенты, рассчитываемые по: $A_i = (p - p_i)F(p)\,|p = p_i$. Используя табл. 10.5, оригинал ПЛ запишется в виде:
> $$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}$$
> для $t \geqslant 0$.

Вопрос. Определить оригинал изображения: $F(p) = E/(p + \tau p^2)$.
Ответ. Его разложение на элементарные дроби запишется как:

$$F(p) = \frac{E}{p(1 + \tau p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau p} = \frac{A}{p} + \frac{B/\tau}{p + 1/\tau},$$

где

$$A = pF(p)\Big|_{p=0} = \frac{pE}{p(1+\tau p)}\Big|_{p=0} = E,$$

$$B = (1+\tau p)F(p)\Big|_{p=-1/\tau} = \frac{(1+\tau p)E}{p(1+\tau p)}\Big|_{p=-1/\tau} = -\tau E,$$

откуда:

$$F(p) = \frac{E}{p} + \frac{-\tau E}{1+\tau p} = \frac{E}{p} + \frac{-}{E}p + 1/\tau.$$

Можно также пойти путем идентификации после приведения к общему знаменателю, что дает:

$$E = A(1+\tau p) + Bp \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E = A, \\ 0 = A\tau + N, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = E, \\ B = -E\tau \end{cases}$$

Используя табл. 10.5, получим оригинал ПЛ:

$$f(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Вопрос. Определить оригинал изображения:

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 5}.$$

Ответ. Его разложение на элементарные дроби запишется в виде:

$$F(p) = \frac{p}{p^2+2p+5} = \frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2},$$

где $p_1 = -1 + 2j$, $p_2 = -1 - 2j$,

$$A = (p-p_1)F(p)\Big|_{p=p_1} = \frac{p}{p+1+2j}\Big|_{p=-1+2j} = \frac{1}{2}(1 + j/2),$$

$$B = (p-p_2)F(p)\Big|_{p=p_2} = \frac{p}{p+1-2j}\Big|_{p=-1-2j} = \frac{1}{2}(1 - j/2).$$

Используя табл. 10.5, получим оригинал:

$$f(t) = \frac{1}{2}(1+j/2)e^{(-1+2j)t} + \frac{1}{2}(1-j/2)e^{(-1-2j)t} = e^{-t}\left(\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)$$

для $t \geqslant 0$.

Вопрос. Определить оригинал изображения:

$$F(p) = \frac{-5}{(p+2)(p^2+2p+5)}.$$

Ответ. Его разложение на элементарные дроби запишется в виде:

$$F(p) = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+5}, \quad \text{где}$$

$$A = (p+2)F(p)\Big|_{p=-2} = -1, \quad \lim_{p\to+\infty} pF(p) = 0 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = 1,$$

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad F(0) = \frac{-5}{10} = \frac{A}{2} + \frac{C}{5} \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Метод

В случае двух комплексных сопряженных полюсов функции F можно предпочесть сохранить в знаменателе изображения многочлен второго порядка, записав его в канонической форме для прямого получения изображения известной функции. Разложение функции F на элементарные дроби запишется тогда для каждого из многочленов:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \cdots + \frac{Ap + B}{p^2 + up + v} + \cdots$$

при

$$p^2 + up + v = (p - p_i)(p - \overline{p}_i),$$

где $\overline{p}_i$ и p_i — два комплексно сопряженных полюса.

Для расчета B и C можно использовать другие методы (например, идентификацию или расчет комплексных сопряженных полюсов методом, приведенным в предыдущем примере).

Знаменатель второй дроби представляем в канонической форме:

$$F(p) = \frac{-1}{p+2} + \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}.$$

Подстановка $(p + 1)$ в числитель приводит к появлению косинусоиды, умноженной на экспоненциальную функцию, откуда:

$$F(p) = \frac{-1}{p+2} + \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} - \frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2 + 4}.$$

Используя табл. 10.5, получаем оригинал:

$$f(t) = -e^{-2t} + e^{-t}(\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)) \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

б) Рациональная дробь с двойными полюсами

Метод

Изображение F рациональной дроби $N(p)/D(p)$, обладающее двойными полюсами, такое, что $d^\circ N(p) < d^\circ D(p)$ запишется для каждого из них как:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\cdots (p - p_i)^2 \cdots},$$

где p_i — двойной полюс. Его разложение на элементарные дроби запишется тогда для каждого двойного полюса:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \cdots + \frac{A_{i2}}{(p - p_i)^2} + \frac{A_{i1}}{p - p_i} + \cdots,$$

где A_{i2} и A_{i1} — действительные или комплексные коэффициенты, рассчитываемые по формулам:

$$A_{i2} = (p - p_i)^2 F(p)\Big|_{p=p_i} \quad \text{и} \quad A_{i1} = \frac{d}{dp}\left[(p - p_i)^2 F(p)\right]\Big|_{p=p_i}.$$

Согласно табл. 10.5 вклад в оригинал для каждого двойного полюса запишется как:

$$f(t) = \cdots + A_{i2} t e^{p_i t} + A_{i1} e^{p_i t} + \cdots \quad \text{для } t \geqslant 0.$$

Вопрос. Определить оригинал изображения:

$$F(p) = \frac{k}{p^2(1 + \tau p)}.$$

Ответ. Его разложение на элементарные дроби запишется в виде:

$$F(p) = \frac{k}{p^2(1+\tau p)} = \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_1}{p} + \frac{B}{1+\tau p},$$

где

$$A_2 = p^2 F(p)\Big|_{p=0} = \frac{p^2 k}{p^2(1+\tau p)}\Bigg|_{p=0} = k;$$

$$A_1 = \frac{d}{dp}\left[p^2 F(p)\right]\Bigg|_{p=0} = \frac{d}{dp}\left[\frac{p^2 k}{p^2(1+\tau p)}\right]\Bigg|_{p=0} = -k\tau;$$

$$B = (1+\tau p)F(p)\Bigg|_{p=-1/\tau} = \frac{d}{dp}\left[\frac{(1+\tau p)k^2}{p}(1+\tau p)\right]\Bigg|_{p=-1/\tau} = k\tau^2,$$

откуда:

$$F(p) = \frac{k}{p^2} - \frac{k\tau}{p} + \frac{k\tau^2}{1+\tau p} = \frac{k}{p^2} - \frac{k\tau}{p} + \frac{k\tau}{p + 1/\tau}.$$

Возможны другие способы, например, идентификация после приведения к общему знаменателю. Используя табл. 10.5, получим оригинал:

$$f(t) = k(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

в) Общий случай рациональной дроби

• ***Полюса порядка больше двух.*** Метод, примененный для двойных полюсов, обобщается, а последовательности и «находки» расчетов коэффициентов различны (см. курс математики). Разложение на элементарные дроби для полюса порядка M запишется в виде:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \cdots \frac{A_{iM}}{(p - p_i)^M} + \cdots + \frac{A_{i2}}{(p - p_i)^2} + \frac{A_{i1}}{p - p_i} + \cdots$$

• ***Рациональные дроби* $N(p)/D(p)$, *для которых* $d^\circ N(p) < d^\circ D(p)$.** В этом случае следует начинать полиномиальным делением $N(p)$ на $D(p)$, что дает:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = Q(p) + \frac{R(p)}{D(p)} = \cdots + q_2 p^2 + q_1 p + q_0 + \frac{R(p)}{D(p)}.$$

– Поиск оригинала рациональной дроби $R(p)/D(p)$ осуществляется соответственно выше изложенным методам, так как $d^\circ R(p) < d^\circ D(p)$.

– Поиски оригинала многочлена $Q(p)$ осуществляются с использованием табл. 10.5, согласно которой:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Q(p)\right] = \cdots + q_2\delta''(t) + q_1\delta'(t) + q_0\delta(t).$$

Мы получили импульс Дирака и его производные при $t = 0$.

Вопрос. Определить оригинал изображения:

$$F(p) = \frac{p^3}{p^2 + 3p + 2}.$$

Ответ. Изображение F после полиномиального деления и разложения остатка на элементарные дроби запишется в виде:

$$F(p) = p - 3 - \frac{1}{p+1} + \frac{8}{p+2}.$$

Используя табл. 10.5, получим оригинал:

$$f(t) = \delta'(t) - 3\delta(t) - e^{-t} + 8e^{-2t} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

10.4. Исследование линейной системы

10.4.1. Использование ПЛ при исследовании линейной системы

Линейная система с одним входом и одним выходом подчинена линейному дифференциальному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами (см. гл. 9), записанному в виде:

Рис. 10.4. Линейная система

$$a_n\frac{d^n s}{dt^n} + \cdots + a_2\frac{d^2 s}{dt^2} + a_1\frac{ds}{dt} + a_0 s =$$
$$= b_m\frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_2\frac{d^2 e}{dt^2} + b_1\frac{de}{dt} + b_0 e \quad (m \leqslant 0).$$

Функция выхода $s = s(t)$ является суммой решений уравнения без второго члена и частного решения уравнения со вторым членом. Постоянные определяются из физического смысла при $t = 0^-$ и $t = 0^+$ с учетом начальных условий:

$$\frac{d^i s}{dt^i}(0^-) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \quad \text{и} \quad \frac{d^j e}{dt^j}(0^-) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

Примечание. Дифференциальное уравнение не содержит постоянных членов (вследствие, например, поляризации), так как их, в принципе, можно исключить заменой переменной. В общем случае, если выход зависит от нескольких входных воздействий, мы будем использовать принцип линейности (см. гл. 2).

Использование ПЛ позволяет заменить это дифференциальное уравнение алгебраическим:

$$(a_n p^n + \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \cdots + b_2 p^2 + d_1 p + b_0) E(p) + \gamma(p),$$

где $\gamma(p)$ — результирующий полином начальных условий. Отсюда:

$$S(p) = \frac{b_m p^m}{a_n p^n} + \cdots + \frac{b_2 p^2}{a_2 p^2} + \frac{b_1 p}{a_1 p} \frac{b_0}{a_0} E(p) + \frac{\gamma(p)}{a_n p^n + \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Полагаем:

$$\begin{cases} N(p) = b_m p^m + \cdots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0, \\ D(p) = a_n p^n + \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0. \end{cases}$$

Обобщенная функциональная диаграмма (блок-схема) линейной системы с одним входом и одним выходом приведена на рис. 10.5.

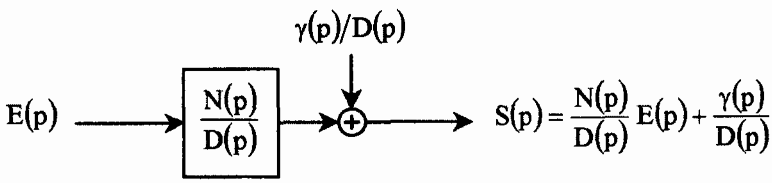


Рис. 10.5. Обобщенная блок-схема линейной системы

Примечание. Многочлен $D(p)$ является характеристическим уравнением дифференциального уравнения. Его степень равна порядку дифференциального уравнения и необходимому числу независимых начальных условий на выходе и их производных, чтобы решение было единственным.

Вопрос. Выразить преобразование Лапласа дифференциального уравнения функции выхода, описывающего линейную систему:

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = K \left(\tau' \frac{de}{dt} + e \right).$$

Ответ. ПЛ позволяет заменить дифференциальное уравнение алгебраическим:

$$\tau \left[pS(p) - s(0^-) \right] + S(p) = K(\tau' \left[pE(p) - e(0^-) \right] + e(p)),$$

откуда:

$$S(p) = \frac{K(1+\tau' p)}{1+\tau p} E(p) + \frac{\tau s(0^-) - K\tau' e(0^-)}{1+\tau p}.$$

10.4.2. Передаточная функция Лапласа

Передаточная функция Лапласа линейной системы с одним входом и одним выходом есть отношение изображений выходной $S(p)$ ко входной $E(p)$ величине при нулевых начальных условиях ($\Rightarrow \gamma(p) = 0$). Часто ее обозначают как $H(p)$ или $T(p)$.

$$H(p) = \left.\frac{S(p)}{E(p)}\right|_{\substack{\text{нулевые}\\ \text{начальные}\\ \text{условия}}} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

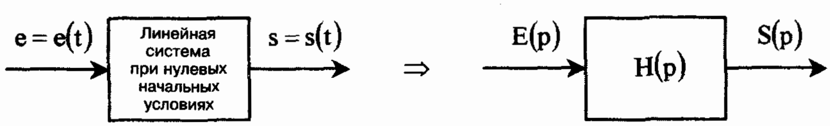


Рис. 10.6. Передаточная функция Лапласа линейной системы

Вопрос. Определить передаточную функцию Лапласа линейной системы первого порядка, описываемой дифференциальным уравнением:

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = K(\tau' \frac{de}{dt} + e).$$

Ответ. Полагая все начальные условия нулевыми, можно записать:

$$\tau p S(p) + S(p) = K(\tau' p E(p) + E(p)),$$

откуда:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K(1+\tau' p)}{1+\tau p}.$$

10.4.3. Импульсный отклик. Воздействие

Импульсный отклик, обозначаемый как $h(t)$, является откликом линейной системы на импульс Дирака единичной площади, полагая все начальные условия нулевыми (рис. 10.7).

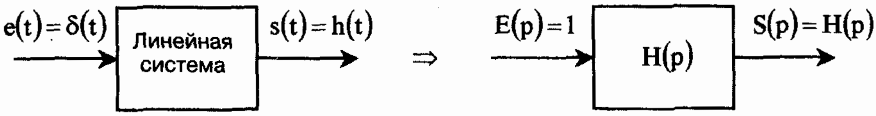


Рис. 10.7. Импульсный отклик линейной системы

Преобразование Лапласа этого отклика приводит к замечательному свойству: импульсный отклик $\mathrm{h}(\mathrm{t})$ линейной системы является оригиналом передаточной функции $\mathrm{H}(\mathrm{p})$.

$$\mathrm{h}(\mathrm{t}) = \mathcal{L}^{-1}[\mathrm{H}(\mathrm{p})].$$

Примечание. Реальная физическая система имеет реальный импульсный отклик на воздействие. Воздействие означает, что нельзя что-либо иметь на выходе, если нет ничего на входе, что записывается как: $\mathrm{h}(\mathrm{t}) = 0$ для всех $\mathrm{t} < 0$.

Вопрос. Определить импульсный отклик линейной системы первого порядка с передаточной функцией:

$$\mathrm{H}(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{S}(\mathrm{p})}{\mathrm{E}(\mathrm{p})} = \frac{\mathrm{K}(1+\tau'\mathrm{p})}{1+\tau\mathrm{p}}.$$

Ответ. Передаточная функция запишется также (например, полиномиальным делением) как:

$$\mathrm{H}(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{K}(1+\tau'\mathrm{p})}{1+\tau\mathrm{p}} = \mathrm{K}\left(\frac{\tau'}{\tau} + \frac{1-\tau'/\tau}{1+\tau\mathrm{p}}\right) = \mathrm{K}\left(\frac{\tau'}{\tau} + \frac{1/\tau - \tau'/\tau^2}{1/\tau + \mathrm{p}}\right),$$

откуда:

$$\mathrm{h}(\mathrm{t}) = \mathcal{L}^{-1}[\mathrm{H}(\mathrm{p})] = \mathrm{K}\left(\frac{\tau'}{\tau}\delta(\mathrm{t}) + \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{\tau'}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{t}/\tau}\right).$$

Если $\tau' = \tau$, то $\mathrm{h}(\mathrm{t}) = \mathrm{K}\delta(\mathrm{t})$. Импульс отлично передается системой.

10.4.4. Соответствие передаточной функции дифференциальному уравнению

Передаточная функция и дифференциальные уравнения являются двумя эквивалентными способами описания свойств линейной системы. В частности, полюсы передаточной функции (нули знаменателя $\mathrm{D}(\mathrm{p})$) являются корнями характеристического уравнения дифференциального уравнения.

Метод

Мы переходим от дифференциального уравнения к передаточной функции, используя преобразование Лапласа, полагая все начальные условия нулевыми. В частности: если

$$\mathcal{L}[x(\mathrm{t})] = X(\mathrm{p}), \quad \text{то} \quad \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^\mathrm{k}}{\mathrm{dt}^\mathrm{k}}x(\mathrm{t})\right]\Bigg|_{\substack{\text{нулевые}\\ \text{начальные}\\ \text{условия}}} = \mathrm{p}^\mathrm{k}X(\mathrm{p}).$$

Это возвращает к замене $x(\mathrm{t})$ на $X(\mathrm{p})$ и $\frac{\mathrm{d}^\mathrm{k}}{\mathrm{dt}^\mathrm{k}}$ на оператор p^k. Обратная операция позволяет перейти от передаточной функции к дифференциальному уравнению.

Пример 10.4.3.

Переход от дифференциального уравнения к передаточной функции

$$\tau\frac{ds}{dt} + s = K\left(\tau'\frac{de}{dt} + e\right)$$

$$\tau p S(p) + S(p) = K(\tau' p E(p) + E(p))$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K(1+\tau' p)}{1+\tau p}$$

Переход от передаточной функции к дифференциальному уравнению

10.4.5. Описание электрической цепи

а) Полное операционное (или Лапласа) сопротивление

Имеем линейный двухполюсник (рис. 10.8). Принята концепция потребителя.

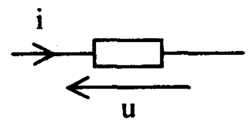


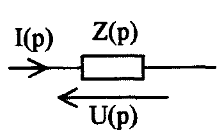
Рис. 10.8. Линейный двухполюсник

• ***Определения.*** Полное операционное сопротивление или сопротивление Лапласа Z(p) двухполюсника является передаточной функцией (начальные условия приняты равными нулю) и определяется отношением U(p) к I(p). Операционная проводимость Y(p) есть величина обратная.

$$Z(p) = \left.\frac{U(p)}{I(p)}\right|_{\substack{\text{нулевые}\\ \text{начальные}\\ \text{условия}}} \quad \text{и} \quad Y(p) = \frac{1}{Z(p)}.$$

• ***Электрическая схема с обозначениями по Лапласу. Закон Ома.*** (рис. 10.9)

Рис. 10.9. К закону Ома. Обозначения по Лапласу



$$U(p) = Z(p)I(p),$$
$$I(p) = Y(p)U(p).$$

• ***Простейшие линейные двухполюсники*** (табл. 10.7).

• ***Соединение полных сопротивлений*** (табл. 10.8).

Таблица 10.7. Простейшие линейные двухполюсники

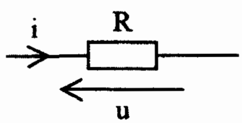
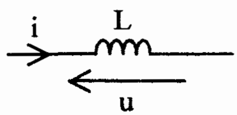
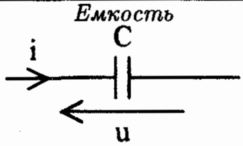
	Уравнение	Преобразование Лапласа с начальными условиями	Полное операционное сопротивление
Сопротивление 	$u = Ri$	$U(p) = RI(p)$	$Z_R(p) = R$
Индуктивность 	$u = L\frac{di}{dt}$	$U(p) = L\left[pI(p) - i(0^-)\right]$	$Z_L(p) = Lp$
Емкость 	$i = C\frac{du}{dt}$	$I(p) = C\left[pU(p) - u(0^-)\right]$	$Z_C(p) = \frac{1}{Cp}$

Таблица 10.8.

n полных сопротивлений последовательно	n полных сопротивлений параллельно
$Z_{экв}(p) = \sum_{k=1}^{n} Z_k(p)$	$\frac{1}{Z_{экв}(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z_k(p)}$ или $Y_{экв}(p) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(p)$

б) Уравнения. Расчет передаточной функции

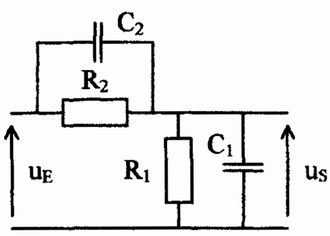


Рис. 10.10. Аттенюатор с компенсацией

Математическое описание электрической цепи осуществляется по законам и теоремам электротехники (см. гл. 2), справедливым при символическом расчете в преобразованиях Лапласа. Практически переход к уравнениям Лапласа осуществляется простой заменой в законах и теоремах сопротивлений полными операционными сопротивлениями, а проводимостей — полными операционными проводимостями.

Вопрос. Имеем *аттенюатор* с компенсацией (рис. 10.10). Дать передаточную функцию в виде $H(p) = U_S(p)/U_E(p)$.

Ответ. Используя формулу делителя напряжения, получим:

$$H(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{Z_1(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}$$

где

$$Z_1(p) = \frac{R_1}{1 + R_1C_1p} \quad \text{и} \quad Z_2(p) = \frac{R_2}{1 + R_2C_2p2}.$$

Подставляя в выражение H(p) выражения полных операционных сопротивлений, получим:

$$H(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{K(1 + \tau' p)}{1 + \tau p},$$

где

$$K = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad \tau = \frac{R_1R_2(C_1 + C_2)}{R_1 + R_2}, \quad \tau' = R_2C_2.$$

Если $\tau = \tau'$ ($\Rightarrow R_1C_1 = R_2C_2$), то $H(p) = K$.

Примечание. Можно получить математическое описание в дифференциальных уравнениях, затем перейти к преобразованиям Лапласа при нулевых начальных условиях для получения передаточной функции (см. § 10.4.2). Но это нецелесообразно, так как преобразование Лапласа также позволяет упростить математическое описание.

10.4.6. Временна́я характеристика

Метод

1. Устанавливается передаточная функция (см. § 10.4.5).
2. От передаточной функции переходим к дифференциальному уравнению (см. § 10.4.4).
3. Возможны два способа:
   - К дифференциальному уравнению применяют преобразование Лапласа, учитывая начальные условия и возмущение (см. § 10.4.1), затем отсюда выводится зависимость в функции времени путем расчета оригинала.
   - Решается дифференциальное уравнение (см. гл. 9).

Внимание! Знание начальных условий всегда необходимо при расчете отклика системы на заданное воздействие. При нулевых начальных условиях нет необходимости переходить к дифференциальному уравнению, но это только частный случай.

Вопрос. Для аттенюатора с компенсацией (см. рис. 10.10) выразить отклик, начиная от $t = 0$, при входном напряжении, заданном формулой $u_E(t) = E_2u(t) + E_1(1 - u(t))$.

Ответ. 1) Передаточная функция:

$$H(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{K(1 + \tau' p)}{1 + \tau p} \quad (\text{см. § 10.4.4}).$$

2) Дифференциальное уравнение. Из передаточной функции получим:

$$\tau p U_S(p) + U_S(p) = K(\tau' p U_E(p) + U_E(p)),$$

откуда (см. § 10.4.4):

$$\tau \frac{du_S}{dt} + u_S = K(\tau' \frac{du_E}{dt} + u_E).$$

3) Отклик в функции времени. Применение преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению с учетом начальных условий дает (см. § 10.4.1):

$$\tau \left[pU_S(p) - u_S(0^-)\right] + U_S(p) = K(\tau' \left[pU_E(p) - u_E(0^-)\right] + U_E(p),$$

откуда:

$$U_S(p) = \frac{K(1+\tau' p)}{1+\tau p} U_E(p) + \frac{\tau u_S(0^-) - K\tau' u_E(0^-)}{1+\tau p}.$$

Входное напряжение:

$$u_E(t) = E_2 u(t) + E_1(1-u(t)) \Rightarrow u_E(0^-) = E_1 \quad \text{и} \quad U_E(p) = \frac{E_2}{p} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0,$$

откуда:

$$U_S(p) = \frac{K(1+\tau' p)}{1+\tau p}\frac{E_2}{p} + \frac{\tau u_S(0^-) - K\tau' E_1}{1+\tau p}.$$

Разложением на элементарные дроби получим:

$$U_S(p) = KE_2\left(\frac{1}{p} + \frac{\tau' - \tau}{1+\tau p}\right) + \frac{\tau u_S(0^-) - K\tau' E_1}{1+\tau p}.$$

Переход к оригиналу дает отклик в функции времени:

$$u_S(t) = KE_2\left(1 + \frac{\tau' - \tau}{\tau} e^{-t/\tau}\right) + \left(u_S(0^-) - K\frac{\tau'}{\tau}E_1\right)e^{-t/\tau} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Если напряжение на выходе было постоянным при $t < 0$, то $u_S(0^-) = KE_1$, откуда:

$$u_S(t) = KE_2 + K(E_2 - E_1)\frac{\tau' - \tau}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Наконец, если $\tau = \tau'$, то $u_S(t) = KE_2$ для $t \geqslant 0$.

10.4.7. Частотные свойства или гармоники

Отклик по частоте рассматривается при воздействии на систему синусоидальной переменной на входе $e(t)$ после затухания переходного процесса. В линейной системе переменная на выходе $s(t)$ будет также синусоидальной той же частоты.

Метод
От передаточной функции по Лапласу H(p) к комплексной передаточной функции $\underline{H}$ (называется также изохронной и справедливой только для синусоидального установившегося процесса) переходят путем замены оператора p на jω. Обратный переход позволяет перейти от комплексной передаточной функции к передаточной функции по Лапласу.

Примечание. Заменить p на jω можно, если полюса H(p) имеют строго отрицательной действительную часть, что необходимо для затухающего переходного процесса отклика. О комплексной передаточной функции и частотных свойствах см. также гл. 5 и гл. 24.

Вопрос. Имеем аттенюатор с компенсацией (рис. 10.10). Дать выражение его комплексной передаточной функции.

Ответ.

$$H(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{K(1+\tau' p)}{1+\tau p} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = H(j\omega) = \frac{K(1+j\omega\tau')}{1+j\omega\tau}.$$

10.5. Линейная система первого порядка

Линейная система первого порядка с одним входом и одним выходом, описываемая дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами, записывается в виде:

$$a_1\frac{ds}{dt} + a_0 s = b_1\frac{de}{dt} + b_0 e, \quad \text{где} \quad a_1 > 0 \quad \text{и} \quad a_0 \geqslant 0.$$

Она идентично описывается передаточной функцией, получаемой через преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$H(p) = \left.\frac{S(p)}{E(p)}\right|_{\substack{\text{нулевые}\\ \text{начальные}\\ \text{условия}}} = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 + a_0}, \quad \text{где} \quad a_1 > 0 \quad \text{и} \quad a_0 \geqslant 0.$$

Чтобы рассмотреть отклик системы на заданное воздействие нужно учесть начальные условия: $s(0^-)$ и $e(0^-)$. Применение преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению позволяет записать:

$$a_1\left[pS(p) - s(0^-)\right] + a_0 S(p) = b_1\left[pE(p) - e(0^-)\right] + b_0 E(p),$$

откуда:

$$S(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + a_0} E(p) + \frac{a_1 s(0^-) - b_1 e(0^-)}{a_1 p + a_0}.$$

10.5.1. Простейшие передаточные функции 0-го и 1-го порядка

Таблица 10.9.

Тип	Передаточная функция (каноническая форма)	Импульсная характеристика
Пропорциональный	$H(p) = k$	$h(t) = k\delta(t)$
Дифференциальный	$H(p) = p$	$h(t) = \delta'(t)$
Интегральный	$H(p) = 1/p$	$h(t) = 1$
НЧ фильтр 1-го порядка	$H_{LP1}(p) = \frac{1}{1+\tau p} = \frac{1}{1+p/\omega_0}$	$h_{LP1}(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$
ВЧ фильтр 1-го порядка	$H_{LP1}(p) = \frac{\tau p}{1+\tau p} = \frac{p/\omega_0}{1+p/\omega_0}$	$h_{LP1}(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$

10.5.2. Простейшие электрические цепи

а) Пассивный фильтр низких частот RC и LR первого порядка (рис. 10.11)

Вопрос. Определить передаточные функции $U_S(p)/U_E(p)$ для цепей RC и LR.

Ответ. Используем формулу делителя напряжения.

$$\text{Цепь RC:} H_{LP1}(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{1}{1+RCp} = \frac{1}{1+\tau p}, \quad \text{где} \quad \tau = RC.$$

$$\text{Цепь LR:} H_{LP1}(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{R}{R+Lp} = \frac{1}{1+\tau p}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

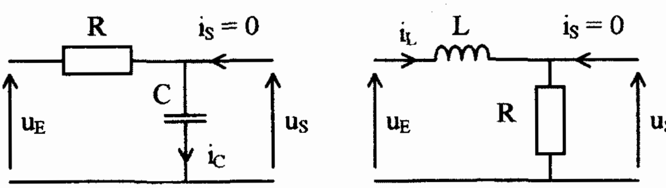


Рис. 10.11. Низкочастотный фильтр первого порядка

Вопрос. Получить импульсные характеристики цепей RC и LR.

Ответ. Это будет оригинал передаточной функции (см. § 10.3.2), который запишется в виде:

$$h_{LP1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H_{LP1}(t)\right] = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Вопрос. Получить отклик на входное напряжение $u_E(t) = E$ для $t \geqslant 0$.

Ответ. Из передаточной функции получим:

$$\tau p U_S(p) + U_S(p) = U_E(p),$$

откуда (см. § 10.4.4): $\tau\frac{du_S}{dt} + u_S = u_E$.

Применив к дифференциальному уравнению преобразование Лапласа с учетом начальных условий, получим (см. § 10.4.1):

$$\tau\left[pU_S(p) - u_S(0^-)\right] + U_S(p) = U_E(p),$$

откуда:

$$U_S(p) = \frac{1}{1+\tau p}\frac{E}{p} + \frac{\tau u_S(0^-)}{1+\tau p}.$$

Разложение на элементарные дроби приведет к:

$$U_S(p) = E\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p}\right) + \frac{\tau u_S(0^-)}{1+\tau p}.$$

Переход к оригиналу (см. табл. § 10.3.2) дает отклик в функции времени:

$$u_S(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) + u_S(0^-)e^{-t/\tau} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Можно проверить, что:

$$u_S(0^+) = \lim_{p\to+\infty} pU_S(p) = u_S(0^-) \quad \text{и} \quad \lim_{p\to+\infty} u_S(t) = \lim_{p\to 0} pU_S(p) = E.$$

Вопрос. Получить отклик на синусоидальное напряжение

$$u_E(t) = E_{Max}\sin(\omega t) \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Предполагается, что в реактивных элементах не было запасено никакой энергии.

Ответ. Для обеих цепей начальные условия нулевые.

Цепь RC:$u_S(0^-) = u_S(0^+) = 0.$

Цепь LR:$i_L(0^-) = 0 \Rightarrow u_S(0^-) = 0,$ так как $u_S = Ri_L$.

Следовательно, к дифференциальному уравнению переходить не нужно.

Записываем прямо:

$$U_S(p) = \frac{1}{1+\tau p}U_E(p) = \frac{E_{Max}\omega}{(1+\tau p)(p^2+\omega^2)}, \quad \text{так как } U_E(p) = \frac{E_{Max}\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Разложением на элементарные дроби получим:

$$U_S(p) = E_м\omega\left(\frac{A}{1+\tau p} + \frac{Bp+C}{p^2+\omega^2}\right),$$

где

$$A = \frac{\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}, \quad B = \frac{-\tau}{1+\omega^2\tau^2}, \quad C = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2},$$

откуда:

$$U_S(p) = \frac{E_{Max}\omega}{1+\omega^2\tau^2}\left(\frac{\tau}{1/\tau+p} + \frac{-\tau p+1}{p^2+\omega^2}\right).$$

Переход к оригиналу (см. табл. § 10.3.2) дает отклик в функции времени:

$$u_S(t) = \frac{E_{Max}}{1+\omega^2\tau^2}\left(\omega\tau e^{-t/\tau} - \omega\tau\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right) \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Сумму косинуса и синуса можно записать в виде:

$$-\omega\tau\cos(\omega t) + \sin(\omega t) = K\sin(\omega t + \varphi) = K(\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\sin(\varphi),$$

откуда получим систему:

$$\begin{cases} K\cos\varphi = 1 \\ K\sin\varphi = -\omega\tau \end{cases} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{-\omega t}{K},\ \operatorname{tg}\varphi = -\omega\tau,\ K = \sqrt{1+\omega^2\tau^2}.$$

Отсюда следует новая запись временно́й характеристики:

$$u_S(t) = \frac{E_{Max}}{1+\omega^2\tau^2}\left(-\sin(\varphi)e^{-t/\tau} + \sin(\omega t + \varphi)\right) \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Вопрос. Рассмотреть гармонический отклик.

Ответ. Гармонический отклик рассматривается при воздействии на систему синусоидальным сигналом и после затухания переходного процесса (см. § 10.4.7). Полюс передаточной функции действительный и отрица́тельный $(-t/\tau)$. Поэтому в передаточной функции Лапласа можно заменить p на $j\omega$.

$$\underline{H} = H(j\omega) = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1+j\omega\tau} \Rightarrow |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad \text{и} \quad \varphi = -\operatorname{Arctg}(\omega\tau).$$

Таким образом, при непрерывном входе $u_E(t) = E_м \sin(\omega t)$ на выходе имеем:

$$u_S(t) = \frac{E_{Max}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\sin(\omega t + \varphi),$$

что является выходным напряжением в предыдущем вопросе после затухания переходного процесса.

Диаграмму Боде (частотные характеристики) см. гл. 24.

б) Высокочастотный RC-фильтр и RL-фильтр (рис. 10.12)

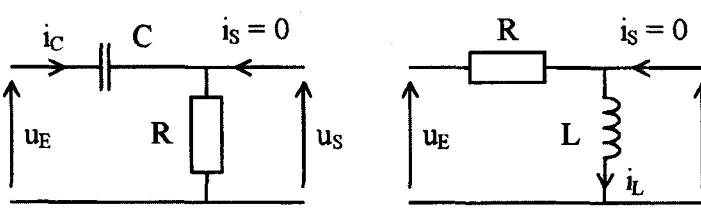


Рис. 10.12. Пассивные высокочастотные RC- и RL-фильтры

Вопрос. Привести передаточные функции цепей RC и RL.

Ответ. Используем формулу делителя напряжения.

$$\text{Цепь RC: } H_{LP1}(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{RCp}{1+RCp} = \frac{\tau p}{1+\tau p}, \quad \text{где} \quad \tau = RC.$$

$$\text{Цепь LR: } H_{LP1}(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{Lp}{R+Lp} = \frac{\tau p}{1+\tau p}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

$$h_{HP1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H_{HP1}(p)\right] = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}.$$

Вопрос. Рассмотреть импульсный отклик RC- и RL-цепей.
Ответ. Разложением на элементарные дроби получим:

$$H_{HP1}(p) = \frac{\tau p}{1+\tau p} = 1 - \frac{1}{1+\tau p} = 1 - \frac{1/\tau}{p+1/\tau}.$$

Импульсный отклик является оригиналом передаточной функции. Используя табл. 10.5, получим оригинал:

$$h_{HP1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H_{HP1}(p)\right] = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Вопрос. Рассмотреть отклик на входное напряжение $u_E(t) = E$ для $t \geqslant 0$.
Ответ. Из передаточной функции получим:

$$\tau p U_S(p) + U_S(p) = \tau p U_E(p),$$

откуда (см. § 10.4.4):

$$\tau\frac{du_S}{dt} + u_S = \tau\frac{du_E}{dt}.$$

Используя преобразование Лапласа с учетом начальных условий, из дифференциального уравнения получим (см. § 10.4.1):

$$\tau\left[pU_S(p) - u_S(0^-)\right] + U_S(p) = \tau\left[pU_E(p) - u_E(0^-)\right],$$

откуда:

$$U_S(p) = \frac{\tau p}{1+\tau p}U_E(p) + \frac{\tau u_S(0^-) - \tau u_E(0^-)}{1+\tau p}.$$

Входное напряжение: $u_E(t) = E$ для $t \geqslant 0 \Rightarrow U_E(p) = \frac{E}{p}$, откуда:

$$U_S(p) = \frac{\tau E}{1+\tau p} + \frac{\tau u_S(0^-) - \tau u_E(0^-)}{1+\tau p}.$$

Переходя к оригиналу, используя табл. 10.5, получим:

$$u_S(t) = \left[E - u_E(0^-) + u_S(0^-)\right]e^{-t/\tau} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Проверка показывает, что:

$$u_S(0^+) = \lim_{p\to+\infty} pU_S(p) = E - u_E(0^-) + u_S(0^-)$$

$$\lim_{p\to+\infty} u_S(t) = \lim_{p\to 0} pU_S(p) = 0.$$

Примечание. При входном напряжении $u_E(t) = E$ для $t \geqslant 0$ следует:

$$\frac{du_E}{dt} = \left[u_E(0^+) - u_E(0^-)\right]\delta(t) = \left[E - u_E(0^-)\right]\delta(t)$$

(для распределений).

Можно было бы затем решить дифференциальное уравнение, которое привело бы к тому же напряжению в символической форме $U_S(p)$.

$$\tau\frac{du_S}{dt} + u_S = \tau\left[E - u_E(0^-)\right]\delta(t) \quad (\text{справедливо для } t \geqslant 0).$$

10.6. Линейная система второго порядка

Линейная система второго порядка с одним входом и одним выходом, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, записывается в виде:

$$a_2\frac{d^2s}{dt^2} = a_1\frac{ds}{dt} + a_0 s = b_2\frac{d^2e}{dt^2}b_1\frac{de}{dt} + b_0 e, \quad \text{где} \quad a_2 > 0,\ a_1 > 0 \text{ и } a_0 \geqslant 0.$$

Она идентично описывается своей передаточной функцией, полученной путем преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$H(p) = \left.\frac{S(p)}{E(p)}\right|_{\substack{\text{нулевые}\\ \text{начальные}\\ \text{условия}}} = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0}, \quad \text{где} \quad a_2 > 0,\ a_1 > 0 \text{ и } a_0 \geqslant 0.$$

Для определения отклика системы на заданное воздействие следует учесть начальные условия: $s(0^-)$, $s'(0^-)$, $e(0^-)$, $e'(0^-)$. Переходя от дифференциального уравнения к преобразованию Лапласа, запишем:

$$a_2\left[p^2S(p) - ps(0^-) - s'(0^-)\right] + a_1\left[pS(p) - s(0^-)\right] + a_0S(p) =$$
$$= b_2\left[p^2E(p) - pe(0^-) - e'(0^-)\right] + b_1\left[pE(p) - e(0^-)\right] + b_0E(p),$$

откуда:

$$S(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0}E(p) +$$
$$+ \frac{a_2ps(0^-) + a_2s'(0^-) - b_2pe(0^-) - b_2e'(0^-) - b_1e(0^-)}{a_2p^2 + a_1p + a_0}.$$

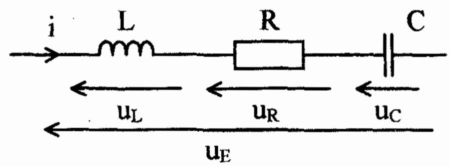
10.6.1. Простейшие передаточные функции второго порядка (табл. 10.10)

Таблица 10.10.

Тип цепи	Преобразование Лапласа (каноническая форма)
Низкочастотный фильтр ($m > 0$)	$H_{LP2}(p) = \dfrac{1}{1 + 2mp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2} = \dfrac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0p + \omega_0^2}$
Высокочастотный фильтр ($m > 0$)	$H_{LP2}(p) = \dfrac{p^2/\omega_0^2}{1 + 2mp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2} = \dfrac{p^2}{p^2 + 2m\omega_0p + \omega_0^2}$
Полосовой фильтр ($m > 0$)	$H_{LP2}(p) = \dfrac{2m/\omega_0}{1 + 2mp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2} = \dfrac{2m\omega_0p}{p^2 + 2m\omega_0p + \omega_0^2}$

10.6.2. Последовательная резонансная цепь (рис. 10.13)

Рис. 10.13. Последовательная резонансная цепь



Вопрос. Привести передаточные функции $U_C(p)/U_E(p)$, $U_L(p)/U_E(p)$, $U_R(p)/U_E(p)$.

Ответ. Используем формулу делителя напряжения:

$$H_{LP2}(p) = \frac{U_C(p)}{U_E(p)} = \frac{1}{1+RCp+LCp^2} = \frac{1}{1+2mp/\omega_0+p^2/\omega_0^2};$$

$$H_{LP2}(p) = \frac{U_L(p)}{U_E(p)} = \frac{LCp^2}{1+RCp+LCp^2} = \frac{p^2/\omega_0^2}{1+2mp/\omega_0+p^2/\omega_0^2};$$

$$H_{LP2}(p) = \frac{U_R(p)}{U_E(p)} = \frac{RCp}{1+RCp+LCp^2} = \frac{2mp/\omega_0}{1+2mp/\omega_0+p^2/\omega_0^2},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Вопрос. Рассмотреть импульсный отклик низкочастотного фильтра второго порядка.

Ответ. Импульсный отклик является оригиналом передаточной функции. Анализ знаменателя (характеристического уравнения дифференциального уравнения) передаточной функции показывает возможность четырех режимов.

$$p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = \omega_0^2(m^2-1) \Rightarrow p_1 = -m\omega_0 + \sqrt{\Delta}$$
$$\text{и} \quad p_2 = -m\omega_0 - \sqrt{\Delta}.$$

Апериодический процесс: $m > 1$. Оба полюса действительные, отрицательные.

$$p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1} \quad \text{и} \quad p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1}.$$

Тогда передаточная функция запишется в виде:

$$H_{LP2}(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2+2m\omega_0 p+\omega 2_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)}.$$

Разложением на элементарные дроби получим:

$$H_{LP2}(p) = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2},$$

где

$$A = (p - p_1)H_{LP2}(p)\Big|_{p=p_1} = \frac{\omega_0^2}{p_1 - p_2} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}};$$

$$B = (p - p_2)H_{LP2}(p)\Big|_{p=p_2} = \frac{\omega_0^2}{p_2 - p_1} = \frac{-\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}.$$

Используя табл. 10.5, получим оригинал:

$$h_{LP2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H_{LP2}(p)\right] = \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right) \quad \text{для} \quad t \geqslant 0,$$

где $\tau_1 = -1/p_1$ и $\tau_2 = -1/p_2$.

Предельно апериодический процесс: $m = 1$. Двойной полюс действительный отрицательный: $p_0 = -\omega_0$. Тогда передаточная функция запишется в виде:

$$H_{LP2}(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega 2_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(p - p_0)^2}.$$

Используя табл. 10.5, получим оригинал:

$$h_{LP2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H_{LP2}(p)\right] = \frac{1}{\tau_0^2} t e^{-t/\tau_0} \quad \text{для} \quad t \geqslant 0,$$

где $\tau_0 = -1/p_0$.

Затухающий периодический процесс: $0 < m < 1$. Два комплексных сопряженных полюса с отрицательной действительной частью.

$$p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \quad \text{и} \quad p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}.$$

Каноническая форма передаточной функции запишется в виде:

$$H_{LP2}(p) = \frac{\omega_0^2}{(p + m\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - m^2)} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \frac{\omega_0\sqrt{1-m^2}}{(p + m\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - m^2)}.$$

Используя табл. 10.5, получим оригинал:

$$h_{LP2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H_{LP2}(p)\right] = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\sqrt{1-m^2}\,\omega_0 t\right) \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Незатухающий периодический процесс: $m = 0$ ($R = 0$). Два чисто мнимых сопряженных корня.

$$p_1 = j\omega_0 \quad \text{и} \quad p_2 = -j\omega_0.$$

Тогда передаточная функция запишется в виде:

$$H_{LP2}(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2} = \omega_0 \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}.$$

Используя табл. 10.5, получим оригинал:

$$h_{LP2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H_{LP2}(p)\right] = \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Примечание. Импульсным откликом низкочастотного фильтра второго порядка является решение дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2\delta(t).$$

Вопрос. Рассмотреть гармонический отклик низкочастотного фильтра второго порядка.

Ответ. Для всех $m > 0$ (если $m = 0$, то это уже будет колебательное звено, а не фильтр) следует заменить в преобразовании Лапласа p на $j\omega$.

$$\underline{H_{LP2}} = H_{LP2}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Частотные характеристики см. гл. 24.

ЧАСТЬ II

ЭЛЕКТРОННЫЕ КОМПОНЕНТЫ

ГЛАВА 11

СОПРОТИВЛЕНИЯ

11.1. Основная модель

11.1.1. Закон Ома. Сопротивление. Проводимость.

• ***Обозначение (рис. 11.1).*** Направления напряжения u и тока i приняты условно для потребителя.

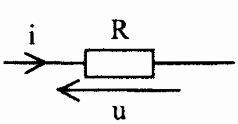


Рис. 11.1.
Обозначение

• ***Закон Ома.*** (см также гл. 1):

$$U = Ri \text{ с единицами измерения: В} = \text{Ом} \cdot \text{А}.$$

• ***Удельное сопротивление некоторых проводников.*** (табл. 11.1).

• ***Сопротивление однородного проволочного проводника.*** При длине ℓ, сечении S и удельном сопротивлении материала ρ получим:

$$R = \rho\frac{\ell}{S} \text{ с единицами измерения Ом} = \text{Ом} \cdot \text{м}\frac{\text{м}}{\text{м}^2}.$$

Таблица 11.1. Удельное сопротивление металлов

Металлы	ρ(Ом · м)
Серебро (Ag)	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$
Медь (Cu)	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$
Золото (Au)	$2{,}3 \cdot 10^{-8}$
Алюминий (Al)	$2{,}6 \cdot 10^{-8}$
Железо (Fe)	$9{,}7 \cdot 10^{-8}$

Вопрос. Зная удельное сопротивление меди при 20 °C$\rho_{20} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-8}$Ом·м, рассчитать сопротивление цилиндрического провода длиной 1 км и диаметром 1 мм.

Ответ. При 20 °C$R_{20} \approx 21{,}6$ Ом.

• ***Удельная проводимость*** γ (обозначается также как σ):

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \text{ с единицами измерения: См/м} = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}.$$

• ***Проводимость*** (измеряется в сименсах):

$$G = \frac{1}{R} \text{ с единицами измерения: См} = \frac{1}{\text{Ом}}.$$

11.1.2. Соединение сопротивлений

• ***Последовательное соединение*** (рис. 11.2). Для двух сопротивлений: полное напряжение

$$u_{Tot} = u_1 + u_2 = R_{экв} i,$$

где: $R_{экв} i = R_1 + R_2$.

Для n сопротивлений:

$$u_{Tot} = \sum_{k=1}^{n} u_k = R_{экв} i,$$

где $R_{экв} = \sum_{k=1}^{n} R_k$.

• ***Параллельное соединение*** (рис. 11.3). Для двух сопротивлений (обозначается как //) общий ток:

$$i_{Tot} = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_{экв}},$$

где:

$$R_{экв} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{или} \quad G_{экв} = G_1 + G_2.$$

Для n сопротивлений:

$$i_{Tot} = \sum_{k=1}^{n} i_k = \frac{u}{R_{экв}}, \quad где \quad \frac{1}{R_{экв}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \quad или \quad G_{экв} = \sum_{k=1}^{n} G_k.$$

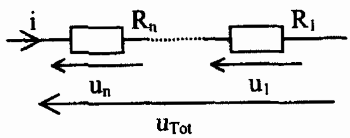


Рис. 11.2. Соединение последовательно

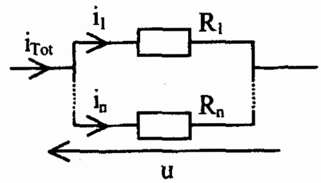


Рис. 11.3. Соединение параллельно

11.1.3. Мощность рассеяния

- ***Мгновенная мощность (p = ui).***

$$p = Ri^2 = \frac{u^2}{R} \text{ с единицами Вт} = \text{Ом} \cdot \text{А}^2 = \frac{\text{В}^2}{\text{Ом}}.$$

- ***Средняя мощность рассеяния в форме тепла (тепловые потери).***

$$P_{ср} = RI^2 = \frac{U^2}{R} \text{ с единицами Вт} = \text{Ом} \cdot \text{А}^2 = \frac{\text{В}^2}{\text{Ом}}.$$

Вопрос. Электрический нагреватель питается напрямую от однофазного источника (230 В, 50 Гц). Электрическое сопротивление составляет 52,9 Ом. Дать выражение мгновенной мощности и рассчитать среднюю мощность нагрева.

$$p = \frac{U_м^2}{R} \sin^2(\omega t) \approx 2000 \cdot \sin^2(100\pi t).$$

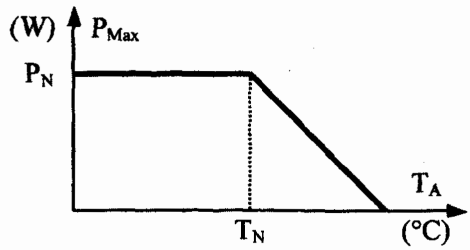
11.2. Ограничения и допущения

11.2.1. Максимальная мощность

- ***Максимальная мощность рассеяния.*** Максимальная мощность $P_{Макс}$, рассеиваемая в сопротивлении, является функцией наибольшей допустимой температуры заданного элемента сопротивления и его теплового сопротивления $R_т$.

- ***Снижение максимальной мощности рассеяния в функции температуры окружающей среды*** (рис. 11.4). Номинальной мощностью рассеяния $P_{\text{ном}}$ согласно рекомендациям МЭК (Международная электротехническая комиссия) является наибольшая длительно используемая мощность при номинальной окружающей температуре $T_{\text{ном}} = 70$ °C.

Рис. 11.4. Снижение максимальной мощности



• ***«Тепловой закон Ома».*** В приложении к элементу сопротивления:

$$\Delta T = R_T P_{\text{ср}} \text{ с единицами измерения: } ^\circ C = \frac{^\circ C}{\text{Вт}} \text{Вт}.$$

Вопрос. Поверхностный элемент сопротивления имеет тепловое сопротивление 320 °C/Вт. Его наибольшая рабочая температура составляет 150 °C, а наибольшая мощность при температуре 70 °C — 1/4 Вт. Рассчитать наибольшую мощность рассеяния при температуре 50 °C, затем — при 100 °C.

Ответ. $P_{\text{макс}50\ ^\circ C} = P_{\text{макс}70\ ^\circ C} = 0{,}25$ Вт (см. рис. 11.4).

$$P_{\text{макс}100\ ^\circ C} = \frac{\Delta T}{R_T} = \frac{150 - 100}{320} = 0{,}15 \text{ Вт}.$$

• ***Наибольшие действующие значения тока, напряжения.***

$$I_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{P_{\text{макс}}}{R}} U_{\text{макс}} = \sqrt{P_{\text{макс}} R}.$$

• ***Наибольшее напряжение.*** Наибольшее значение напряжения, прикладываемого на зажимы сопротивления, определяется из соотношений, приводящих к $U_{\text{Макс}}$, ограничивается максимальным технологическим напряжением, задаваемым конструктором.

11.2.2. Температурный коэффициент

• ***Линейная зависимость.*** Полагая зависимость линейной, сопротивление R при температуре T определится из соотношения:

$$R = R_{\text{ном}} \left[1 + T_{C1}(T - T_{\text{ном}})\right],$$

где $R_{ном}$ — сопротивление, измеренное при номинальной температуре $T_{ном}$, а T_{C1} — линейный температурный коэффициент (константа).

$$T_{C1} = \frac{1}{R_{ном}}\frac{dR}{dT} \text{ с единицами измерения: } °C^{-1} = \frac{1}{Ом}\frac{Ом}{°C}.$$

Вопрос. Удельное сопротивление меди $\rho_{20} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м при 20 °С. Полагая температурный коэффициент меди $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} 1/°C$, рассчитать сопротивление цилиндрического проводника длиной 1 км и диаметром 1 мм при 100 °С.

Ответ. $R_{100\,°C} = R_{20\,°C}\,[1 + \alpha(100 - 20)] \approx 28{,}6$ Ом.

Примечание. В конструкторской документации температурный коэффициент выбирается максимальным из измеренных по отношению к $T_{ном}$.

$$T_C = \max_{Tмин \leqslant T \leqslant Tмакс}\left[\frac{1}{R_{ном}}\frac{R - R_{ном}}{T - T_{ном}}\right].$$

• ***Квадратичная зависимость.*** Полагая зависимость квадратичной, значение сопротивления в функции температуры определим как:

$$R = R_{ном}\left[1 + T_{C1}(T - T_{ном}) + T_{C2}(T - T_{ном})^2\right],$$

где $R_{ном}$ — сопротивление, измеренное при номинальной температуре $T_{ном}$, T_{C1} — линейный температурный коэффициент, T_{C2} — квадратичный температурный коэффициент.

$$T_{C1} = \frac{1}{R_{ном}}\frac{dR}{dT} \text{ с единицами измерения: } °C^{-1} = \frac{1}{Ом}\frac{Ом}{°C};$$

$$T_{C2} = \frac{2}{R_{ном}}\frac{d^2R}{dT^2} \text{ с единицами измерения: } °C^{-2} = \frac{1}{Ом}\frac{Ом}{°C^2}.$$

• ***Экспоненциальная зависимость.*** Полагая зависимость экспоненциальной, значение сопротивления в функции температуры определим как:

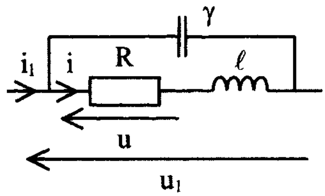
$$R = R_{ном} 1{,}01^{T_{сэ}(T - T_{ном})},$$

где: $R_{ном}$ — сопротивление, измеренное при номинальной температуре $T_{ном}$, $T_{сэ}$ — экспоненциальный температурный коэффициент.

$$T_{сэ} = \frac{1}{\ln(1{,}01)}\frac{1}{R}\frac{dR}{dT} \approx \frac{100}{R}\frac{dR}{dT} \text{ с единицами измерения: } °C^{-1} = \frac{1}{Ом}\frac{Ом}{°C}.$$

11.2.3. Свойства при высоких частотах

• ***Эквивалентная схема при высоких частотах. Полное комплексное сопротивление.*** (рис. 11.5). Здесь ℓ — индуктивность соединений и внутренняя, γ — емкость соединений и внутренняя.



$$\underline{Z}_{ВЧ} = \frac{R + j\ell\omega}{1 + jR\gamma\omega + j^2\ell\gamma\omega^2}$$

Рис. 11.5. Эквивалентная схема полного сопротивления

11.3. Переменные и подстроечные сопротивления. Потенциометры

• ***Обозначение*** (рис. 11.6). Стрелка означает ползунок.

• ***Устройство.*** Изменение сопротивления и настройка нужного значения получаются перемещением ползунка по проводящей дорожке из прочного материала.

Механический курс может быть однооборотный, многооборотный (3, 5, 10, 25 оборотов) или линейный.

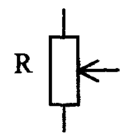


Рис. 11.6. Обозначение переменного и подстроечного сопротивления

• ***Значения.*** Принято обозначать R — полное сопротивление между двумя конечными зажимами сопротивления, x — относительное перемещение ползунка ($0 \leqslant x \leqslant 1$), $f(x)$ — закон относительного перемещения.

$$0 \leqslant f(x) = \frac{R(x)}{R} \leqslant 1.$$

• ***Закон изменения.*** Это соотношение, существующее между значением измеренного сопротивления в промежутке ползунок–опорный зажим элемента и механическим положением ползунка. Наиболее распространенными являются законы:

- линейный (A) с функцией $f(x) = x$ для всех x между нулем и единицей;
- логарифмический (B) с $f(0{,}5) = 0{,}1$;
- обратно логарифмический (C) с $f(0{,}5) = 0{,}9$.

• ***Реостатная схема*** (рис. 11.7). Переменное сопротивление включено на понижение тока как простое сопротивление.

$$u_{32} = 0 \Rightarrow i_3 \Rightarrow i_1 = i_2 = \frac{u_{31}}{R_{31}} = \frac{u}{R_{21}}.$$

Случай закона линейного изменения: $R_{21} = xR$.

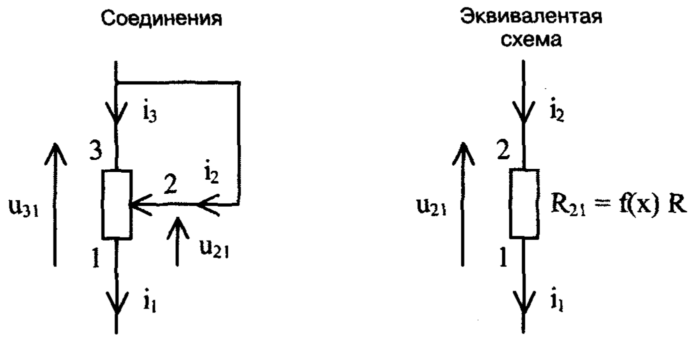


Рис. 11.7. Реостатная схема ($i_1 \leqslant I_{Макс}$)

• ***Потенциометрическая схема*** (рис. 11.8). Переменное сопротивление включено как делитель напряжения или *потенциометр* (производное слово от потенциала).

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \text{и} \quad u_{31} = u_{32} + u_{21}.$$

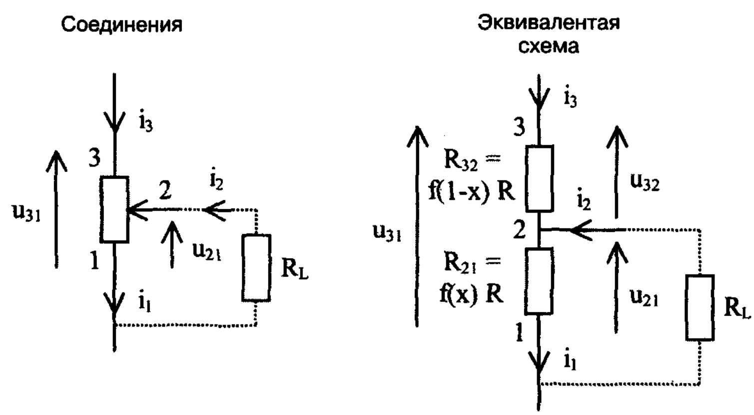


Рис. 11.8. Потенциометрическая схема

Случай закона линейного изменения:

$$R_{21} = xR \quad \text{и} \quad R_{32} = (1 - x)R.$$

Первый случай:

$$i_2 = 0 \Rightarrow \frac{u_{21}}{u_{31}} = \frac{R_{21}}{R_{21} + R_{32}} = x.$$

Второй случай:

$$i_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{u_{21}}{u_{31}} = \frac{R_{21}//R_L}{R_{21}//R_L + R_{32}} = \frac{xR_L}{R_L + x(1 - x)R}.$$

(Знак // означает параллельное соединение. См. § 11.1.2.)

Внимание! В потенциометрической схеме измеряемое между курсором и зажимом напряжение соответствует закону изменения сопротивления потенциометра только при условии очень большого сопротивления нагрузки по сравнению с сопротивлением потенциометра.

• ***Максимальный ток.*** Номинальная мощность рассеяния переменным сопротивлением $\mathrm{P}_{\text{ном}}$ относится ко всему элементу (сопротивление). Следовательно:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{Ma}x} = \sqrt{\frac{\mathrm{P}_{\text{ном}}}{\mathrm{R}}}.$$

7-3927

ГЛАВА 12

КОНДЕНСАТОРЫ

Конденсатор состоит из двух проводящих поверхностей, называемых обкладками, разделенными тонким электрическим изоляционным слоем, называемым диэлектриком (см. гл. 3).

12.1. Основная модель

12.1.1. Соотношение между q, u и i. Емкость

• ***Обозначение*** (рис. 12.1). Здесь u — напряжение, i — ток, q — заряд в режиме потребителя.

• ***Соотношения между электрическим зарядом и напряжением.*** Физически (рис. 12.2) заряд q является абсолютным значением зарядов q_A и q_B на внутренних пластинах A и B.

$$q = q_A = -q_B = C(v_A - v_B) = Cu \Rightarrow q = CU \quad \text{Кл} = \Phi \times \text{В}.$$

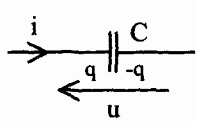


Рис. 12.1. Обозначение

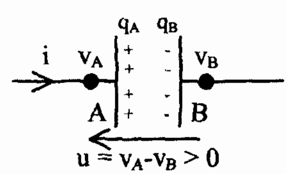


Рис. 12.2. Электрические заряды

• ***Соотношение между электрическим зарядом (количеством электричества) и током.***

$$dq = idt \text{ с единицами измерения Кл} = \text{А} \cdot \text{с}.$$

Выражение, что ток «проходит» через конденсатор не точно, так как физически электроны не могут пройти через диэлектрик (в нормальном режиме — это изолятор). В действительности электроны перемещаются (совместное движение) в проводниках, соединенных с обкладками конденсатора, изменяя заряд на обкладках конденсатора.

• ***Соотношение между током и напряжением.***

$$i = C\frac{du}{dt} \text{ с единицами измерения А} = \Phi\frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

- ***Абсолютная проницаемость вакуума:*** $\varepsilon_0 \approx 8{,}8541878 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

- ***Относительная проницаемость*** ε_r ***некоторых изоляторов.***

Таблица 12.1.

Материал	$\varepsilon_r \approx$
Сухой воздух	1
Сухая бумага	2,5
Тефлон	2
Стекло	3–12
Титанат бария	> 1000

Смесь титаната бария с другими материалами предназначена для создания керамических конденсаторов. Ее относительная проницаемость зависит от состава компонентов.

- ***Абсолютная проницаемость.***

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \text{ с единицами измерения Ф/м.}$$

- ***Емкость конденсаторов специальных конфигураций.***

Таблица 12.2.

Конфигурация	Формула	Комментарии
Плоский	$C = \varepsilon \frac{S}{d}$	S — общая площадь обкладок d — промежуток между обкладками
Из двух сфер	$C = 4\pi\varepsilon r$	r — радиус сферы
Из двух концентрических сфер	$C = \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$	r_1 и r_2 — радиусы сфер ($r_2 > r_1$)
Из двух концентрических цилиндров	$C = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln(r_2/r_1)}$	r_1 и r_2 — радиусы цилиндров ($r_2 > r_1$) ℓ — длина цилиндров

Вопрос. Печатная схема содержит два медных элемента толщиной 70 мкм на изолирующей подкладке толщиной 1,2 мм и проницаемостью $\varepsilon_r = 6$.

1) Имея 2 параллельные полоски, отстоящие на 1 мм и расположенные с той же стороны платы, привести выражение и рассчитать линейную емкость реализованного таким образом конденсатора.

2) Имеем две полоски шириной 2 мм, расположенные с каждой стороны платы, привести выражение и рассчитать линейную емкость реализованного таким образом конденсатора.

Ответ. 1) $C = \varepsilon_0 \frac{70 \cdot 10^{-6}\ell}{10^{-3}}$, откуда $\frac{C}{\ell} \approx 0{,}62$ пФ/м;

2) $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{2 \cdot 10^{-3}\ell}{1{,}2 \cdot 10^{-3}}$, откуда $\frac{C}{l} \approx 88{,}4$ пФ/м.

Вопрос. Коаксиальный кабель состоит из внутреннего проводника радиусом $r_1 = 0{,}5$ мм и из внешнего проводника внутренним радиусом $r_2 = 2{,}5$ мм и наружным радиусом $r_3 = 2{,}6$ мм. Оба проводника разделены диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon_r = 4$. Привести выражение и рассчитать линейную емкость конденсатора из двух таких проводников.

Ответ. $\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\ln(r_2/r_1)} \approx 138$ пФ/м.

12.1.2. Соединения конденсаторов

- ***Последовательное соединение*** (рис. 12.3).

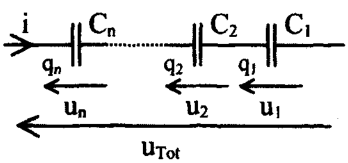


Рис. 12.3. Последовательное соединение

Для двух конденсаторов:

$$i = C_{экв}\left(\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt}\right),$$

где

$$\frac{1}{C_{экв}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Для n конденсаторов:

$$i = C_{экв}\frac{du_{Tot}}{dt} = C_{экв}\sum_{k=1}^{n}\frac{du_k}{dt},$$

где $$\frac{1}{C_{экв}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}.$$

Примечания.

- Эквивалентная емкость $C_{экв}$ меньше любой из включенных последовательно.
- Изменения зарядов каждого из последовательно включенных конденсаторов равно изменению заряда эквивалентного конденсатора:

$$\forall k \in [1, \ldots, n] \quad dq_k = dq_{экв}.$$

- Изменения напряжения на зажимах конденсаторов обратно пропорционально их емкостям:

$$\forall k \in [1, \ldots, n] \quad C_k du_k = C_{экв} du_{Tot}.$$

- При постоянном токе напряжения U_k (и, следовательно, заряды Q_k) в действительности зависят от сопротивления изоляции конденсатора R_k (см. § 12.2.4). Это может быть использовано для определения средних напряжений $U_{k\,ср}$ (и, следовательно, средних зарядов $Q_{k\,ср}$) в случае периодических сигналов.

• ***Параллельное соединение*** (рис. 12.4).

Для 2-х конденсаторов (// означает параллельное соединение):

$$i_{Tot} = i_1 + i_2 = C_{экв}\frac{du}{dt}, \text{ где } C_{экв} = C_1 // C_2 = C_1 + C_2.$$

Для n конденсаторов:

$$i_{Tot} = \sum_{k=1}^{n} i_k = C_{экв}\frac{du}{dt}, \text{ где } C_{экв} = \sum_{k=1}^{n} C_k.$$

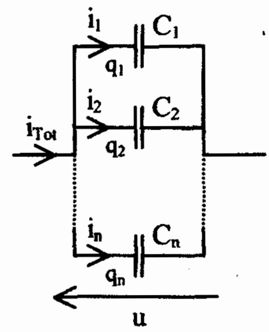


Рис. 12.4. Параллельное соединение

Вопрос. Конденсатор $C_1 = 1000$ мкФ подключен на напряжение $U_1 = 10$ В, а конденсатор $C_2 = 2000$ мкФ подключен на напряжение $U_2 = 5$ В. После отключения от источников питания конденсаторы соединяются параллельно. Дать выражение и рассчитать напряжение на зажимах параллельно соединенных конденсаторов.

> ***Метод***
> Сохранен полный заряд $q_{Tot} = q_1 + q_2$. Внимание, это не относится к энергии.

Ответ.

$$q_{Tot} = C_1U_1 + C_2U_2 = (C_1 + C_2)U \Rightarrow U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67 \text{ В}.$$

12.1.3. Электрическое поле. Электростатическая сила

• ***Электрическое поле.*** Вектор электрического поля $\vec{E}$ ориентирован в направлении повышающихся потенциалов. В плоском конденсаторе только составляющая по оси x не равна нулю (рис. 12.5).

$$E_x = -\frac{v_A - v_B}{d} = -\frac{u}{d}$$

с единицами измерения В/м.

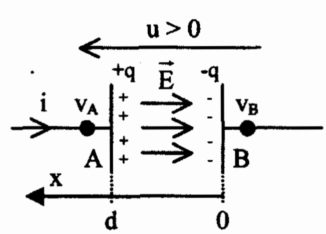


Рис. 12.5. Электрическое поле плоского конденсатора

• ***Электростатическая сила.*** На заряд q, помещенный в электрическое поле $\vec{E}$, действует электростатическая сила $\vec{F}$ того же направления:

$$\vec{F} = q\vec{E} \text{ с единицами измерения Н} = \text{Кл} \cdot \text{В/м}.$$

В плоском конденсаторе (рис. 12.5) электрон испытывает действие силы F_x в направлении оси x, так как заряд электрона e^- отрицателен.

$$F_x = -e^- \frac{u}{d} = |e^-| \frac{u}{d}, \quad \text{где} \quad e^- = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

12.1.4. Запасенная энергия

$$w = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} q u = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

с единицами измерения Дж $= \Phi \cdot B^2 =$ Кл $\times$ В $= \frac{\text{Кл}^2}{\Phi}$.

Вопрос. Конденсатор подключен на синусоидальное напряжение $u = U_м \sin(\omega t)$. Привести выражение мгновенных значений электрического заряда и запасенной энергии.

Ответ. $q = CU_м \sin(\omega t)$ и $w = \frac{1}{2} CU_м^2 \sin^2(\omega t)$.

12.1.5. Непрерывность и стабильность электрических напряжения и заряда

• ***Непрерывность.*** Поскольку энергия непрерывна, то напряжение и электрический заряд не могут испытывать разрывы.

$$\forall t, \quad u(t^-) = u(t^+) \forall t, \quad q(t^-) = q(t^+).$$

• ***Стабильность.*** Напряжение и электрический заряд на зажимах конденсатора постоянны, если, и только если, ток равен нулю.

$$\left.\begin{aligned} u &= \text{const}, \\ q &= \text{const}, \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad i = 0.$$

12.1.6. Синусоидальный процесс

Закон Ома	$\underline{U} = \underline{Z_C}\,\underline{I}$
Полное комплексное сопротивление	$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$
Модуль	$Z_C = \lvert\underline{Z_C}\rvert = \frac{\lvert\underline{U}\rvert}{\lvert\underline{I}\rvert} = \frac{U_м}{I_м} = \frac{U}{I} = \frac{1}{C\omega}$
Реактивное сопротивление	$X_C = -\frac{1}{C\omega}$
Фазовый сдвиг u по отношению к i	$\varphi_C = \operatorname{Arg}(\underline{Z_C}) = \theta_U - \theta_I = -\frac{\pi}{2}$
Активная или средняя мощность	$P = 0$
Реактивная мощность	$Q = -C\omega U^2 = -\frac{I^2}{C\omega} = X_C I^2$

Примечание. Напряжение отстает от тока на $\pi/2$.

$$u = U_{Max} \sin(\omega e + \theta_U),$$

где

$$U_{Max} = \sqrt{2} U \Rightarrow i = I_{Max} \sin(\omega t + \theta_I) = C\omega U_{Max} \sin\left(\omega t + \theta_U + \frac{\pi}{2}\right).$$

12.2. Ограничения и допущения

12.2.1. Разрушающее поле. Номинальное напряжение

• ***Пробивная напряженность поля*** (табл. 12.3). Значение напряженности поля разрушения (или пробоя) диэлектрических материалов называется *пробивной напряженностью поля* или *диэлектрической прочностью.* С повышением температуры или частоты она снижается. Обычно диэлектрическая прочность (в кВ/мм) снижается с повышением толщины диэлектрика.

Таблица 12.3. Значения разрушающего поля

Материал	E_d(кВ/мм) ≈
Сухой воздух	2,5–5,5
Полипропилен	350
Миканит	40–200
Тефлон	80

• ***Номинальное или рабочее напряжение.*** Номинальное $U_{ном}$ или наибольшее рабочее напряжение такое, которое можно использовать непрерывно без риска пробоя диэлектрика.

12.2.2. Температурный коэффициент

• ***Линейная зависимость.*** Полагая изменение линейным, значение емкости C в зависимости от температуры определяется как:

$$C = C_{ном}\left[1 + T_{C1}(T - T_{ном})\right],$$

где $C_{ном}$ — емкость, измеренная при номинальной температуре $T_{ном}$, T_{C1} — линейный температурный коэффициент (константа).

$$T_{C1} = \frac{1}{C_{ном}}\frac{dC}{dT} \text{ с единицами измерения } {}^\circ C^{-1} = \frac{1}{\Phi}\frac{\Phi}{{}^\circ C}.$$

• ***Квадратичная зависимость.*** Полагая изменение квадратичным, значение емкости C в зависимости от температуры определяется как:

$$C = C_{ном}\left[1 + T_{C1}(T - T_{ном}) + T_{C2}(T - T_{ном})^2\right],$$

где $C_{ном}$ — емкость, измеренная при номинальной температуре $T_{ном}$, T_{C1} — линейный температурный коэффициент, T_{C2} — квадратичный температурный коэффициент.

$$T_{C1} = \frac{1}{C_{ном}}\frac{dC}{dT}\bigg|_{T=T_{ном}} \text{ с единицами измерения } {}^\circ C^{-1} = \frac{1}{\Phi}\frac{\Phi}{{}^\circ C};$$

$$T_{C2} = 2\frac{1}{C_{ном}}\frac{d^2C}{dT^2} \text{ с единицами измерения } {}^\circ C^{-2} = \frac{1}{\Phi}\frac{\Phi}{{}^\circ C^2}.$$

12.2.3. Коэффициент напряжения

• ***Линейная зависимость.*** Полагая изменение линейным, значение емкости C в зависимости от напряжения U определяется как:

$$C = C_0\left[1 + V_{C1}(U - U_0)\right],$$

где C_0 — емкость, измеренная при напряжении U_0 (обычно $U_0 = 0$), а V_{C1} — линейный коэффициент напряжения (константа).

$$V_{C1} = \frac{1}{C_0}\frac{dC}{dU} \text{ с единицами измерения } B^{-1} = \frac{1}{\Phi}\frac{\Phi}{B}.$$

• ***Квадратичная зависимость.*** Полагая изменение квадратичным, значение емкости Св зависимости от напряжения определяется как:

$$C = C_0\left[1 + V_{C1}U + V_{C2}U^2\right],$$

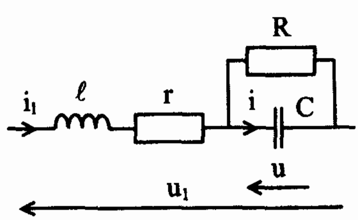
где C_0 — емкость, измеренная при $U = 0$, V_{C1} — линейный коэффициент напряжения, V_{C2} — квадратичный коэффициент напряжения.

$$V_{C1} = \frac{1}{C_0}\frac{dC}{dU}\Big|_{U=0} \text{ с единицами измерения } B^{-1} = \frac{1}{\Phi}\frac{\Phi}{B};$$

$$V_{C2} = 2\frac{1}{C_0}\frac{d^2C}{dU^2} \text{ с единицами измерения } B^{-2} = \frac{1}{\Phi}\frac{\Phi}{B^2}.$$

12.2.4. Частотные свойства

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 12.6). Здесь ℓ — внутренняя индуктивность элемента и соединений, r — сопротивление соединений и обкладок, R — сопротивление изоляции диэлектрика и корпуса.



$$\underline{Z} = r + j\ell\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Рис. 12.6. Эквивалентная схема полного комплексного сопротивления

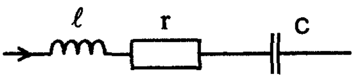
Добротность f_Q двухполюсника — величина, обратная *тангенсу угла потерь* $tg(\delta)$ и являющаяся функцией частоты.

$$f_Q = \frac{1}{tg(\delta)} = \frac{|Q|}{P} = \frac{\left|\operatorname{Im}[\underline{Z}]\, I_1^2\right|}{\operatorname{Re}[\underline{Z}]\, I_1^2} = \frac{\left|l\omega(1 + R^2C^2\omega^2) - R^2C\omega\right|}{R + r(1 + R^2C^2\omega^2)}.$$

• ***Работа при повышенных частотах*** (рис. 12.7). $R \gg 1/C\omega$

Круговая резонансная частота: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{lC}}$.

Добротность: $f_Q = \dfrac{1}{tg(\delta)} = \dfrac{|lC\omega^2 - 1|}{rC\omega}$.



$$\underline{Z}_{(ВЧ)} = r + j\left(\ell\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Рис. 12.7. Схема при повышенных частотах

Вопрос. Элементы модели конденсатора C = 22 пФ, r = 30 Ом, ℓ = 5 нГн (см. рис. 12.7). Рассмотреть характер его работы.
Ответ. Запишем выражение для $\underline{Z}_{(ВЧ)}$:

$$\underline{Z}_{(ВЧ)} = \frac{1 + jrC\omega + j^2lC\omega^2}{jC\omega} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2mj\frac{\omega}{\omega_0}}{jC\omega}.$$

Резонансная частота: $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{lC}} \approx 15,2$ МГц.

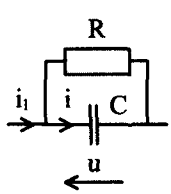
Демпфирование: $m = \dfrac{r}{2}\sqrt{\dfrac{C}{\ell}} \approx 0{,}03$.

Результаты анализа приведены в табл. 12.4.

Таблица 12.4. Характер нагрузок при различных частотах

	$\underline{Z}_{(ВЧ)}$	**Характер**
$f \ll f_0$	$\approx r + \frac{1}{jC\omega}$	емкостной
$f = f_0$	$= r$	активная нагрузка
$f \gg f_0$	$\approx r + j\ell\omega$	индуктивный

• ***Особенности при низких частотах*** (рис. 12.8) $\dfrac{1}{C\omega} \gg R \gg r \gg \ell\omega$.



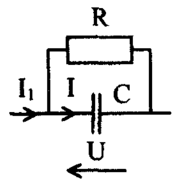
$$\underline{Z}_{(BF)} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Рис. 12.8. Схема на низких частотах

Добротность:

$$f_Q = \frac{1}{\mathrm{tg}(\delta)} = RC\omega.$$

- ***Особенности при постоянном токе*** (рис. 12.9) $\frac{1}{C\omega} \gg R \gg r \gg \ell\omega.$



$$\begin{cases} I = 0 \\ U = R I_1 \\ Q = C U \end{cases}$$

Рис. 12.9. Схема на постоянном токе

Внимание! Можно ли сказать, что конденсатор C на постоянном токе эквивалентен разрыву цепи? В общем, нет, потому что это значило бы, что мы забыли, что на обкладках конденсатора накапливается заряд. Но возможно и да, если мы интересуемся только постоянным током ($I = 0$).

ГЛАВА 13

ИНДУКТИВНО НЕСВЯЗАННЫЕ КАТУШКИ

Катушка представляет собой изолированный проводник, намотанный на каркас, с магнитным сердечником или без него. Без магнитного сердечника значения индуктивности малы и постоянны. У катушек с магнитным сердечником значение индуктивности больше, но оно не постоянно. Принятые обозначения: φ — мгновенное значение потока на один виток; Φ — непрерывный поток на один виток; ψ — мгновенное значение полного потока (потокосцепление); Ψ — непрерывный полный поток (потокосцепление). См. также гл. 4.

13.1. Основная модель

13.1.1. Соотношения между φ, i и u. Индуктивность

• ***Условное обозначение*** (рис. 13.1). Напряжение u, ток i и поток на один виток φ по концепции потребителя.

Примечание. Точкой показан выход магнитного потока, учитывая направление намотки проводника катушки и положительное направление тока (выбирается произвольно).

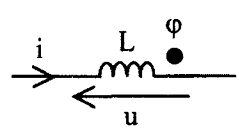


Рис. 13.1. Обозначение

• ***Физическое представление*** (рис. 13.2). Катушка с током i создает поток самоиндукции φ, пронизывающий каждый виток. Направление намотки проводника катушки и направление тока (выбирается произвольно) ориентируют алгебраически поток φ по правилу правой руки.

• ***Потокосцепление. Поток на виток.*** При n витках в катушке потокосцепление ψ определяется произведением потока на виток φ и числа витков.

$$\psi = n\varphi.$$

Примечание. Полагаем, что поток на виток один и тот же для всех витков.

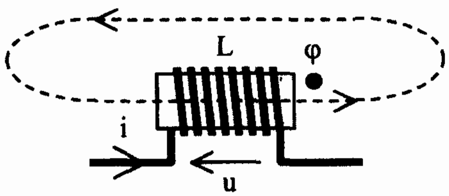


Рис. 13.2. Физическое представление

• ***Соотношение между потокосцеплением и током.***

$$\psi = \mathrm{Li} \text{ с единицами измерения: Вб} = \text{Гн} \cdot \text{А}.$$

Примечание. Поток магнитной самоиндукции называют также собственным. Индуктивность L называют собственной.

• ***Соотношение между потокосцеплением и напряжением.***

$$\mathrm{d}\psi = \mathrm{udt} \text{ с единицами измерения: Вб} = \text{В} \cdot \text{с}.$$

• ***Соотношение между напряжением и током.***

$$\mathrm{u} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} \text{ с единицами измерения: В} = \text{Гн} \cdot \text{А/с}.$$

• ***Абсолютная проницаемость вакуума.***

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

• ***Относительная проницаемость некоторых материалов.*** Она представлена в табл. 13.1. В ферромагнитной среде относительная проницаемость не постоянна. Для железа и никеля она дана здесь как порядок значений в приблизительно линейной области. Напротив, относительная проницаемость немагнитной среды (например, воздух) постоянна и составляет $\mu_r \approx 1$.

Внимание! Катушка считается линейной, если ее индуктивность L постоянна.

Таблица 13.1. Примеры относительной проницаемости

Материал	μ_r
Воздух	≈ 1
Железо	≈ 2500
Никель	$\approx 250\,000$

• ***Абсолютная проницаемость.***

$$\mu = \mu_r\mu_0 \text{ с единицами измерения: Гн/м.}$$

• ***Индуктивности некоторых специальных конфигураций.***

Таблица 13.2. Примеры расчета индуктивности некоторых конфигураций

Конфигурация	Формула	Комментарии
Длинный соленоид	$L = \mu n^2 \frac{S}{\ell}$	n — число витков; S — сечение соленоида; ℓ — длина соленоида
Тороидная катушка	$L = \mu n^2 \frac{S}{2\pi r}$	n — число витков; S — сечение тора; r — средний радиус тора
Единицы измерения	$\text{Гн} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{м}^2}{\text{м}}$	

Вопрос. Катушка индуктивности $L = 12$ мГн с намоткой изолированным проводом на тор средней длины $\ell = 12$ см и сечением $S = 0{,}8$ см^2. Относительная проницаемость магнитного материала предполагается постоянной и равной $\mu_r = 1500$. По катушке протекает постоянный ток 0,1 А. Рассчитать потокосцепление, поток на виток и магнитное поле магнитной индукции вдоль средней силовой линии поля.

Ответ. Число витков:

$$n = \sqrt{\frac{L\ell}{\mu_r\mu_0 S}} = 98 \text{ витков.}$$

Потокосцепление:

$$\Psi = LI = 1{,}2 \text{ мВб.}$$

Поток на виток:

$$\Phi = \frac{\Psi}{n} \approx 12{,}2 \text{ мкВб.}$$

Поле магнитной индукции вдоль средней силовой линии поля:

$$B = \frac{\Phi}{S} \approx 0{,}153 \text{ Тл.}$$

13.1.2. Соединение индуктивно несвязанных катушек

• ***Последовательное соединение*** (рис. 13.3)

Для двух катушек:

$$u_{Tot} = u_1 + u_2 = L_{экв}\frac{di}{dt}, \quad \text{где} \quad L_{экв} = L_1 + L_2.$$

Для n катушек:

$$u_{Tot} = \sum_{k=1}^{n} u_k = L_{экв}\frac{di}{dt}, \quad где \quad L_{экв} = \sum_{k=1}^{n} L_k.$$

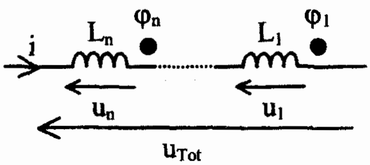


Рис. 13.3. Последовательное соединение

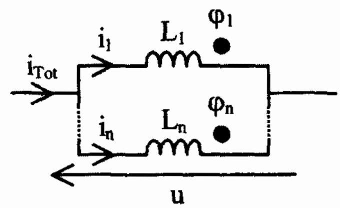


Рис. 13.4. Параллельное соединение

- ***Параллельное соединение*** (рис. 13.4)

  Для двух катушек:

$$u = L_{экв}\frac{di_{Tot}}{dt} = L_{экв}\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right), \quad где \quad \frac{1}{L_{экв}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

  Для n катушек:

$$u = L_{экв}\frac{di_{Tot}}{dt} = L_{экв}\sum_{k=1}^{n}\frac{di_k}{dt}, \quad где \quad \frac{1}{L_{экв}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L_k}.$$

Примечания.

– Эквивалентная индуктивность $L_{экв}$ меньше любой из индуктивностей, включенных параллельно.

– Изменения потоков каждой из параллельных катушек равны изменению потока эквивалентной катушки:

$$\forall k \in [1, \ldots, n]\ d\psi_{k\,Tot} = d\psi_{экв Tot}.$$

– В параллельных катушках изменения тока меньше, чем в эквивалентной катушке:

$$\forall k \in [1, \ldots, n]\ L_k di_k = L_{экв} di_{Tot}.$$

– При постоянном токе значения I_k (а следовательно, и потокосцепления Ψ_k) зависят в действительности от последовательных сопротивлений катушек (см. § 13.2.4). Это обстоятельство используется при определении средних значений токов $I_{k\,ср}$ (и средних потоков $\Phi_{k\,ср}$) в случае периодических переменных.

13.1.3. Энергия, запасенная в линейной катушке

$$w = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\psi i = \frac{1}{2}\frac{\psi^2}{L}$$

с единицами измерения Дж = Гн $\cdot$ А^2 = Вб $\cdot$ А = $\frac{\text{Вб}^2}{\text{Гн}}$.

Вопрос. Собственное потокосцепление в катушке индуктивности L = = 100 мГн составляет 200 мВб. Рассчитать значения постоянного тока в катушке и запасенной энергии.

Ответ. $I = \frac{\Psi}{L} = 2$ А и $W = \frac{1}{2}\Psi I = 200$ мДж.

13.1.4. Непрерывность и стабильность тока и потока

• ***Непрерывность.*** Поскольку энергия непрерывна, ток и поток магнитной индукции в катушке не могут иметь разрывы.

$$\forall t, \quad i(t^-) = i(t^+); \qquad \forall t, \quad \psi(t^-) = \psi(t^+).$$

• ***Стабильность.*** Ток и поток магнитной индукции в катушке являются неизменными, если, и только если, напряжение на зажимах равно нулю.

$$\left.\begin{array}{r} i = \text{const} \\ \psi = \text{const} \end{array}\right\} \Rightarrow u = 0.$$

13.1.5. Синусоидальный процесс

Таблица 13.3. Основные соотношения для синусоидального процесса

Закон Ома	$\underline{U} = \underline{Z_L}\,\underline{I}$
Полное комплексное сопротивление	$\underline{Z_L} = jL\omega$
Модуль	$Z_L = \lvert\underline{Z_L}\rvert = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_м}{I_м} = \frac{U}{I} = L\omega$
Реактивное сопротивление	$X_L = L\omega$
Сдвиг фазы u по отношению к i	$\varphi_L = \text{Arg}(\underline{Z_L}) = \theta_U - \theta_I = +\frac{\pi}{2}$
Активная или средняя мощность	$P = 0$
Реактивная мощность	$Q = L\omega I^2 = \frac{U^2}{L\omega} = X_L I^2$

Примечание. Напряжение опережает ток на угол $\pi/2$.

$$i = I_{Max}\sin(\omega t + \theta_I) \Rightarrow u = U_{Max}\sin(\omega t + \theta_U) = L\omega I_{Max}\sin\left(\omega t + \theta_I + \frac{\pi}{2}\right),$$

где $I_{Max} = \sqrt{2}I$.

13.2. Ограничения и допущения

13.2.1. Наибольший ток. Номинальный ток

Конструкторы указывают либо наибольшее значение тока (общий случай использования, фильтры, высокие частоты), либо наложенную постоянную составляющую (запас энергии, фильтры), либо номинальный ток (подавление радиопомех) в зависимости от назначения устройства.

13.2.2. Температурный коэффициент

• ***Линейная зависимость.*** Полагая зависимость индуктивности L от температуры T линейной, следует:

$$L = L_{ном}[1 + T_{C1}(T - T_{ном})],$$

где $L_{ном}$ — индуктивность, измеренная при номинальной температуре $T_{ном}$, T_{C1} — линейный коэффициент температуры (константа).

$$T_{C1} = \frac{1}{L_{ном}}\frac{dL}{dT} \text{ с единицами измерения } {}^\circ C^{-1} = \frac{1}{Гн}\frac{Гн}{{}^\circ C}.$$

• ***Квадратичная зависимость.*** Полагая зависимость индуктивности L от температуры квадратичной, получим:

$$L = L_{ном}[1 + T_{C1}(T - T_{ном}) + T_{C2}(T - T_{ном})^2],$$

где $L_{ном}$ — индуктивность, измеренная при номинальной температуре $T_{ном}$, T_{C1} — линейный коэффициент температуры, T_{C2} — квадратичный температурный коэффициент.

$$T_{C1} = \frac{1}{L_{ном}}\frac{dL}{dT}\bigg|_{T=T_{ном}} \text{ с единицами измерения } {}^\circ C^{-1} = \frac{1}{Гн}\frac{Гн}{{}^\circ C};$$

$$T_{C2} = 2\frac{1}{L_{ном}}\frac{d^2L}{dT^2} \text{ с единицами измерения } {}^\circ C^{-2} = \frac{1}{Гн}\frac{Гн}{{}^\circ C^2}.$$

13.2.3. Токовый коэффициент

• ***Линейная зависимость.*** Полагая зависимость индуктивности L от температуры T линейной, следует

$$L = L_0[1 + I_{C1}(I - I_0)],$$

где L_0 — индуктивность, измеренная при токе I_0 (обычно $I_0 = 0$), I_{C1} — линейный токовый коэффициент (константа).

$$I_{C1} = \frac{1}{L_0}\frac{dL}{dI} \text{ с единицами измерения } A^{-1} = \frac{1}{Гн}\frac{Гн}{A}.$$

• ***Квадратичная зависимость.*** Полагая зависимость индуктивности L от тока квадратичной, получим:

$$L = L_0[1 + I_{C1} + I_{C2}I^2],$$

где L_0 — индуктивность, измеренная при токе $I_0 = 0$, I_{C1} — линейный токовый коэффициент, I_{C2} — квадратичный токовый коэффициент.

$$I_{C1} = \frac{1}{L_0}\frac{dL}{dI} \text{ с единицами измерения } A^{-1} = \frac{1}{\text{Гн}}\frac{\text{Гн}}{A};$$

$$I_{C2} = 2\frac{1}{L_0}\frac{d^2L}{dI^2} \text{ с единицами измерения } F^{-2} = \frac{1}{\text{Гн}}\frac{\text{Гн}}{A^2}.$$

13.2.4. Частотные свойства катушки без рассеяния и без потерь в железе

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 13.5). Здесь r — последовательное сопротивление проводника катушки и соединительных проводов, γ — распределенная эквивалентная емкость между витками намотки и между соединительными проводниками. Это типовая линейная модель катушки без магнитного сердечника.

• ***Свойства на высоких частотах*** (см. рис. 13.5).

$$\underline{Z}_{\text{ВЧ}} = \underline{Z} = \frac{r + jL\omega}{1 + jr\gamma\omega + j^2L\gamma\omega^2}.$$

Угловая резонансная частота:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\omega}}.$$

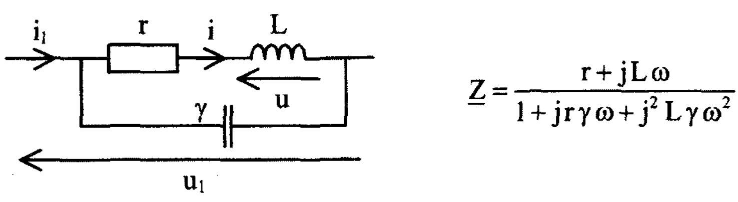


Рис. 13.5. Эквивалентная схема катушки без магнитного сердечника и рассеяния

Вопрос. Элементами модели катушки являются L = 1 мГн, r = 0,18 Ом, γ = 1 фФ. Исследовать ее свойства.

Ответ. Выражение $\underline{Z}_{(\text{ВЧ})}$ запишется в виде:

$$\underline{Z}_{\text{ВЧ}} = \frac{r + jL\omega}{1 + jr\gamma\omega + j^2L\gamma\omega} = \frac{r\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2mj\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Низкая частота среза:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{r}{2\pi L} \approx 28{,}6 \text{ Гц}.$$

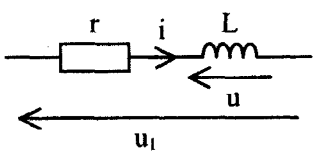
Резонансная частота:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\gamma}} \approx 151{,}7 \text{ Гц}.$$

Демпфирование:

$$m = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{L}} \approx 9 \cdot 10^{-8}.$$

• ***Свойства на низких частотах*** (рис. 13.6).



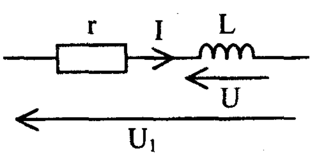
$$\underline{Z}_{(BF)} = r + jL\omega$$

Рис. 13.6. Эквивалентная схема на низких частотах

Добротность:

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} = \frac{\left|\mathrm{Im}\,[\underline{Z}_{НЧ}]\, I^2\right|}{\mathrm{Re}\,[\underline{Z}_{НЧ}]\, I^2} = \frac{L\omega}{r}.$$

• ***Свойства при постоянном токе*** (рис. 13.7): $1/\gamma\,\omega \gg r \gg L\omega$.



$$\begin{cases} U = 0 \\ U_1 = rI \\ \Phi_{Tot} = LI \end{cases}$$

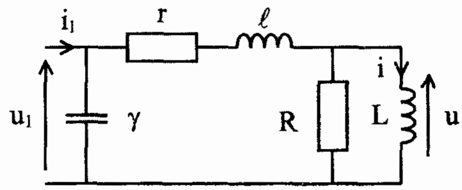
Рис. 13.7. Эквивалентная схема при постоянном токе

Внимание! Можно ли сказать, что индуктивность на постоянном токе эквивалентна короткому замыканию? Вообще, нет, так как следует учитывать, что в индуктивности L накапливается поток Φ. Но возможно и да, если мы интересуемся только постоянным напряжением ($U_L = 0$).

13.2.5. Потери в железе. Рассеяние

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 13.8). Здесь l — последовательная индуктивность, определяющая магнитное рассеяние, а R — параллельное сопротивление, определяющее магнитные потери (от токов Фуко и на гистерезис), называемые потерями в железе магнитного сердечника.

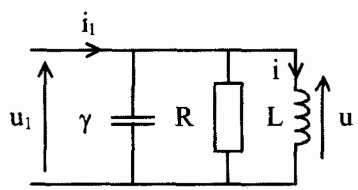
Рис. 13.8. Эквивалентная схема с рассеянием и потерями в железе



- ***Свойства на высоких частотах*** (рис. 13.9). Распространен случай, когда:

$$|r + jl\omega| \ll |R//jL\omega|$$

(// означает параллельно).



$$\underline{Z}_{(HF)} = \frac{jL\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega + j^2 L\gamma\omega^2}$$

Рис. 13.9. Эквивалентная схема на высоких частотах

Угловая резонансная частота:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\gamma}}.$$

- ***Свойства на низких частотах.***
  - Общий случай (см. рис. 13.9) без распределенной емкости γ.
  - Распространенный случай, при котором $L\omega = R$ и $l\omega = r$ (рис. 13.6).

- ***Свойства при постоянном токе.*** Случай распространенный, для которого $l \ll L$ (см. рис. 13.7).

13.2.6. Нелинейности при магнитном сердечнике

Наличие ферромагнитной среды позволяет получить большие значения индуктивности, но приводит к появлению нелинейностей. Поток в магнитной цепи не является линейной функцией тока (L не постоянна). Он насыщается, начиная с некоторого значения тока, и отличается при одном и том же токе в зависимости от того, идет ли ток на увеличение или спадает (также и индуктивность L). Для проведения упрощенного изучения часто принимают, что магнитная цепь обладает кусочно-линейной характеристикой $\varphi = f(i)$, фиксируя тем самым два рабочих режима (рис. 13.10):

– режим изменяющегося потока (1), когда

$$L = \frac{n\Phi_{Sat}}{I_{Sat}} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad n\varphi = Li;$$

– режим неизменного потока (2), когда

$$\varphi = \Phi_{Sat} \quad \text{или} \quad \varphi = -\Phi_{Sat}.$$

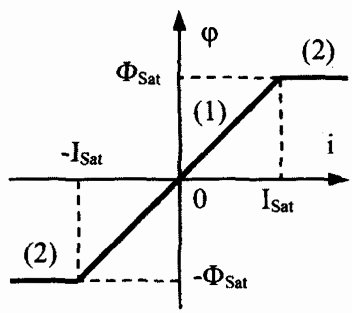


Рис. 13.10. $\varphi = f(i)$

ГЛАВА 14

ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ КАТУШКИ

Две катушки связаны индуктивно, если потоки в каждой из них зависят от токов в обеих этих катушках. Обозначения: φ — мгновенное значение потока на виток, Φ — установившееся значение потока на виток, ψ — мгновенное значение потокосцепления, Ψ — установившееся значение потокосцепления (см. также гл. 4).

14.1. Основная модель

14.1.1. Индуктивная связь. Взаимная индуктивность

• ***Условное обозначение*** (рис. 14.1). Здесь напряжения и токи соответствуют четырехполюснику.

• ***Физическое представление.*** Имеем две индуктивно связанные катушки $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$. Ток i_1 в катушке $\mathfrak{b}_1$ создает поток самоиндукции φ_{11}, охватывающий все витки катушки $\mathfrak{b}_1$, и общий поток φ_{21}, охватывающий все витки катушки $\mathfrak{b}_2$. Аналогично: катушка $\mathfrak{b}_2$ с током i_2 создает поток самоиндукции φ_{22} в катушке $\mathfrak{b}_2$ и общий поток φ_{12}, охватывающий все витки катушки $\mathfrak{b}_1$. При этом возможны два случая: потоки (φ_{11} и φ_{12} с одной стороны, и потоки φ_{22} и φ_{21} с другой стороны) складываются (рис. 14.2) или вычитаются (рис. 14.3) согласно положительному направлению тока, принимаемому произвольно, и направлению намотки проводников катушек.

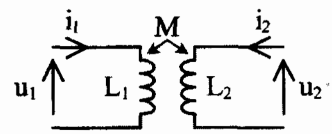
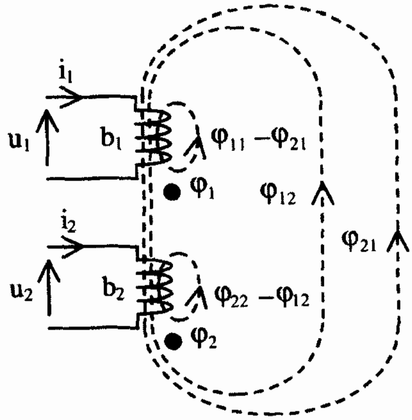


Рис. 14.1. Обозначение двух индуктивно связанных катушек $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$

Примечание. Точкой показан выход магнитного потока с учетом направления намотки проводников катушки и положительного направления тока (выбирается произвольно).

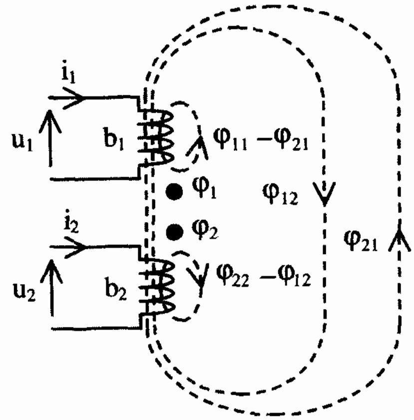
• ***Обобщение.*** Из двух вышеприведенных случаев получим:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{11} + a\varphi_{12}, \\ \varphi_2 = a\varphi_{21} + \varphi_{22}, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} a = +1 \Leftrightarrow \text{слагающиеся потоки}, \\ a = -1 \Leftrightarrow \text{вычитающиеся потоки}. \end{cases}$$



$$\begin{cases}\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}\\ \varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22}\end{cases}$$

Рис. 14.2. Сложение потоков



$$\begin{cases}\varphi_1 = \varphi_{11} - \varphi_{12}\\ \varphi_2 = -\varphi_{21} + \varphi_{22}\end{cases}$$

Рис. 14.3. Вычитание потоков

• ***Поток на виток. Потокосцепление.*** Имеем n_1 (соответственно n_2) чисел витков катушки b_1 (соответственно b_2). Потокосцепление ψ_1 (соответственно ψ_2) получаем умножением n_1 (соответственно n_2) на поток на виток φ_1 (соответственно φ_2). Идентично для потокосцеплений ψ_{11}, ψ_{12}, ψ_{21}, ψ_{22}, откуда:

$$\begin{cases}\psi_1 = \psi_{11} + a\psi_{12},\\ \psi_2 = a\psi_{21} + \psi_{22},\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}n_1\varphi_1 = n_1\varphi_{11} + an_1\varphi_2,\\ n_2\varphi_2 = an_2\varphi_{21} + n_2\varphi_{22}.\end{cases}$$

Примечание. Имеется в виду, что поток на виток один и тот же на каждый виток.

• ***Соотношение между потокосцеплениями и токами.*** Собственные индуктивности L_1 (соответственно L_2) положительны. M — взаимная индуктивность. При сложении потоков значение M положительно, при вычитании потоков значение M отрицательно. Другими словами: знак (M) = a.

$$\begin{cases}\psi_1 = \psi_{11} + a\psi_{12} = L_1 i_1 + M i_2,\\ \psi_2 = a\psi_{21} + \psi_{22} = M i_1 + L_2 i_2\end{cases}$$ с единицами измерения Вб = Гн · А.

• ***Знак M и условные обозначения.*** Имеем положительное значение M, если ориентированные произвольно оба тока выходят (или входят) со стороны точек, указывающих выходы магнитных потоков φ_1 и φ_2 (рис. 14.4)

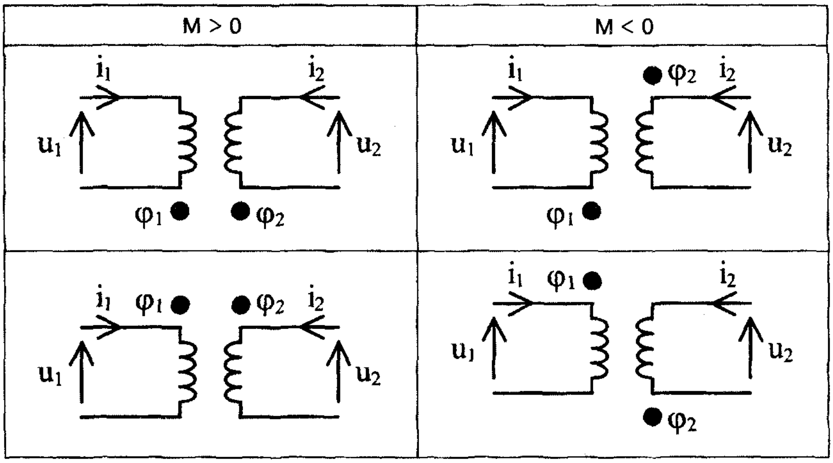


Рис. 14.4. Знак взаимной индуктивности M

• ***Соотношения между потокосцеплениями и напряжениями.***

$$\begin{cases} d\psi_1 = u_1 dt, \\ d\psi_2 = u_2 dt \end{cases} \quad \text{с единицами измерения Вб} = \text{В} \cdot \text{с}.$$

• ***Соотношения между напряжениями и токами*** (смотри также рис. 14.5).

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad \text{с единицами измерения В} = \text{Гн} \cdot \text{А/с}.$$

• ***Эквивалентная схема № 1*** (рис. 14.5).

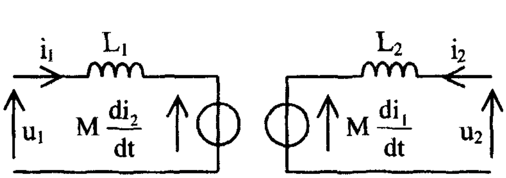


Рис. 14.5. Эквивалентная схема № 1

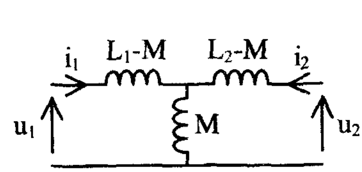


Рис. 14.6. Эквивалентная схема № 2

• ***Эквивалентная схема № 2*** (рис. 14.6). Эта эквивалентная схема не учитывает гальваническую изолированность катушек. $L_1 - M$ и $L_2 - M$ физического смысла не имеют.

• ***Коэффициент связи.*** Говорят о *слабой* связи, если $|k| < 0{,}5$; о *жесткой* связи, если $|k| > 0{,}5$; об *очень жесткой* связи, если $|k|$ приближается к 1, и о *максимальной*, если $|k| = 1$.

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad (-1 \leqslant k \leqslant 1).$$

• ***Коэффициент рассеяния Блонделя.***

$$\sigma = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2} = 1 - k^2.$$

14.1.2. Соединения двух индуктивно связанных катушек

• ***Последовательное соединение*** (рис. 14.7).

$$u_{Tot} = u_1 + u_2 = L_{экв}\frac{di}{dt}, \quad \text{где} \quad L_{экв} = L_1 + L_2 + 2M.$$

• ***Параллельное соединение*** (рис. 14.8).

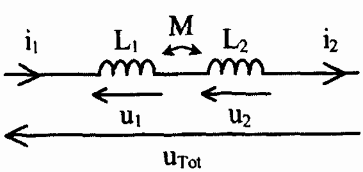


Рис. 14.7. Последовательное соединение

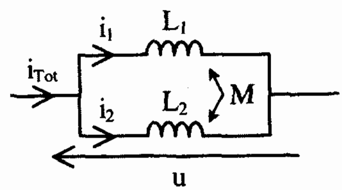


Рис. 14.8. Параллельное соединение

$$u = L_{экв}\frac{di_{Tot}}{dt} = L_{экв}\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right), \quad \text{где} \quad L_{экв} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2}.$$

14.1.3. Запасаемая энергия индуктивно связанными катушками

$$w = \frac{1}{2}\psi_1 i_1 + \frac{1}{2}\psi_2 i_2 = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

с единицами измерения Дж = Вб · А = Гн · $А^2$.

14.1.4. Поток рассеяния. Поток намагничивания

• ***Поток рассеяния. Поток намагничивания.*** Кажется естественным ввести понятия потоков рассеяния и намагничивания для жестко связанных катушек (например, трансформатор). В соответствии с рис. 14.2 и 14.3 имеем:

$$\begin{cases} \varphi_{f1} = \varphi_{11} - \varphi_{21}, \\ \varphi_{f2} = \varphi_{22} - \varphi_{12}, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{f1} + \varphi, \\ \varphi_2 = \varphi_{f2} + a\varphi, \end{cases} \quad \text{где} \quad \varphi = \varphi_{21} + a\varphi_{12}.$$

Здесь φ_{f1} (соответственно φ_{f2}) — поток рассеяния через каждый виток катушки b_1 (соответственно b_2); φ_{21} (соответственно φ_{12}) — поток намагничивания, создаваемый током i_1 (соответственно i_2); φ — результирующий поток намагничивания через одну секцию магнитной цепи. Отсюда:

$$\begin{cases} n_1\varphi_{11} = n_1\varphi_{f1} + n_1\varphi_{21}, \\ n_2\varphi_{22} = n_2\varphi_{f2} + n_2\varphi_{12}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_{11} = \psi_{f1} + \frac{n_1}{n_2}\psi_{21}, \\ \psi_{22} = \psi_{f2} + \frac{n_2}{n_1}\psi_{12}. \end{cases}$$

Принимаем:

$$\begin{cases} \psi_{11} = l_1 i_1 + \Lambda_1 i_1, \\ \psi_{22} = l_2 i_2 + \Lambda_2 i_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = l_1 + \Lambda_1, \\ L_2 = l_2 + \Lambda_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \Lambda_1 = \frac{n_1}{n_2}\frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{n_1}{n_2}aM, \\ \Lambda_2 = \frac{n_2}{n_1}\frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}aM. \end{cases}$$

Здесь: l_1 (соответственно l_2) — индуктивность рассеяния катушки b_1 (соответственно b_2); l_1 и l_2 положительные. Λ_1 (соответственно Λ_2) — индуктивность намагничивания катушки b_1 (соответственно b_2); Λ_1 и Λ_2 положительные, так как знак $(M) = a$. Отсюда следует:

$$M^2 = k^2 L_1 L_2 = \Lambda_1\Lambda_2 = (L_1 - l_1)(L_2 - l_2).$$

• ***Эквивалентная схема № 3*** (рис. 14.9). Окончательно все происходит так, как в случае замены двух индуктивно связанных катушек двумя другими катушками с максимальной связью со включенными в цепь каждой из них индуктивно не связанных катушек.

$$\begin{cases} u_1 = (l_1 + \Lambda_1)\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}, \\ u_2 = M\frac{di_1}{dt} + (l_2 + \Lambda_2)\frac{di_2}{dt}, \end{cases} \quad \text{где} \quad M^2 = \Lambda_1\Lambda_2$$

• ***Эквивалентная схема № 4*** (рис. 14.10). Вышеприведенная схема может быть преобразована в следующую, где m — *коэффициент трансформации.*

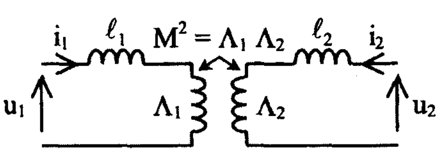


Рис. 14.9. Эквивалентная схема № 3

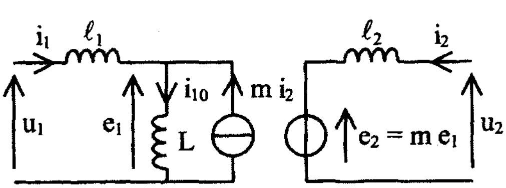


Рис. 14.10. Эквивалентная схема № 4

$$\begin{cases} u_1 = l_1\frac{di_1}{dt} + e_1, \\ u_2 = e_2 + l_2\frac{di_2}{dt} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} e_1 = L\frac{d}{dt}(i_1 + mi_2), \\ e_2 = me_1, \end{cases}$$

откуда:

$$\begin{cases} u_1 = (l_1 + L)\frac{di_1}{dt} + mL\frac{di_2}{dt}, \\ u_2 = mL\frac{di_1}{dt} + (l_2 + m^2L)\frac{di_2}{dt}. \end{cases}$$

Идентифицируя уравнения эквивалентных схем № 3 и № 4, получим:

$$\Lambda_1 = \mathrm{L}\ (\mathrm{L}\ \text{положительна}), \quad \Lambda_2 = \mathrm{m}^2\mathrm{L}, \quad \mathrm{M} = \mathrm{mL},$$

откуда:

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{M}}{\Lambda_1} = \frac{\Lambda_2}{\mathrm{M}} = \mathrm{a}\sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} = \mathrm{a}\frac{\mathrm{n}_2}{\mathrm{n}_1}$$

и знак (m) = знак (M) = a.

Потокосцепление в L определяется как:

$$\psi = \mathrm{Li}_{10} = \frac{\mathrm{n}_1}{\mathrm{n}_2}\psi_1 + \mathrm{a}\psi_{12} \quad \text{где} \quad \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_1 + \mathrm{mi}_2.$$

Поток на виток, являющийся потоком намагничивания через одну секцию магнитной цепи, составит:

$$\varphi = \varphi_{21} + \mathrm{a}\varphi_{12}.$$

Примечание. Все вышеприведенные эквивалентные схемы справедливы для складывающихся потоков (M и m положительные) или вычитающихся (M и m отрицательные). Прочие эквивалентные схемы могут быть получены путем приведения индуктивностей со стороны u_1 или все индуктивности со стороны u_2 (см. гл. 15).

14.1.5. Синусоидальный процесс

• ***Соотношения между напряжениями и токами.*** Уравнения могут быть другими в зависимости от используемой схемы замещения.

$$\begin{cases} \underline{U_1} = j\omega\underline{\Psi_1} - jL_1\omega\underline{I_1} + jM\omega\underline{I_2}, \\ \underline{U_2} = j\omega\underline{\Psi_2} - jM\omega\underline{I_1} + jL_2\omega\underline{I_2}. \end{cases}$$

• ***Активная или средняя мощность.*** Значение θ_{I1} (соответственно θ_{I2}) является фазой тока $\underline{I_1}$ (соответственно $\underline{I_2}$).

$$P_1 = M\omega I_1 I_2 \sin(\theta_{I1} - \theta_{I2}) P_2 = M\omega I_1 I_2 \sin(\theta_{I2} - \theta_{I1}),$$

откуда: $P_1 + P_2 = 0$.

• ***Реактивная мощность.***

$$Q_1 = L_1\omega I_1^2 + M\omega I_1 I_2 \cos(\theta_{I1} - \theta_{I2}),$$

$$Q_2 = L_2\omega I_2^2 + M\omega I_1 I_2 \cos(\theta_{I1} - \theta_{I2}),$$

откуда:

$$Q_1 + Q_2 = L_1\omega I_1^2 + L_2\omega I_2^2 + 2M\omega I_1 I_1 \cos(\theta_{I1} - \theta_{I2}).$$

• ***Приведенная эквивалентная схема.*** Имеем схему рис. 14.11. Приведенная ко вторичной обмотке эквивалентная схема дана на рис. 14.12.

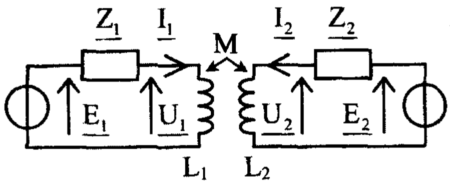


Рис. 14.11. Генераторы в первичной и во вторичной цепях

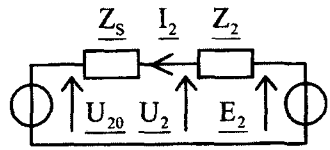


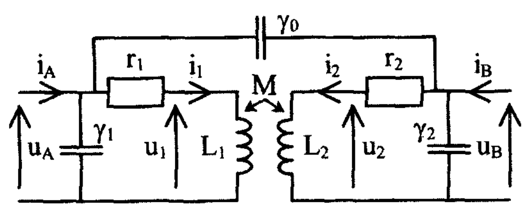
Рис. 14.12. Приведенная ко вторичной обмотке эквивалентная схема

14.2. Ограничения и допущения

14.2.1. Сопротивления проводов. Распределенные емкости катушек. Емкость связи катушек

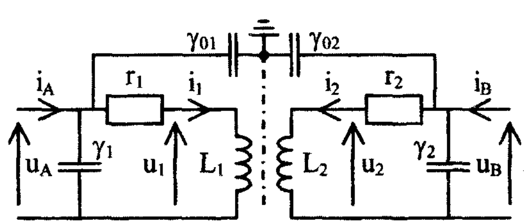
На рис. 14.13 приведена линейная эквивалентная схема двух индуктивно связанных катушек таким образом, что возникает распределенная емкость связи γ_0 между проводниками катушек. Здесь r_1 (соответственно r_2) — сопротивление намоточного провода катушки b_1 (соответственно b_2), которое является средоточием потерь в меди (тепловые потери); γ_1 (соответственно γ_2) — распределенная эквивалентная емкость между витками катушки b_1 (соответственно b_2) и емкость между соединениями.

Рис. 14.13. Эквивалентная схема с емкостью связи между катушками



Примечание. Если между катушками имеется экран, то емкость γ_0 заменяется двумя емкостями γ_{01} и γ_{02} (рис. 14.14).

Рис. 14.14. Эквивалентная схема с экраном



14.2.2. Потери в железе. Нелинейности

См. также гл. 15.

• ***Потери в железе.*** В приведенной на рис. 14.10 схеме параллельно индуктивности L добавлено сопротивление R, соответствующее магнитным потерям (от токов Фуко, на гистерезис) сердечника. Это линейная модель.

• ***Нелинейности.*** Наличие ферромагнитного материала приводит к нелинейностям: поток в магнитной цепи не является линейной функцией тока ($L = \Lambda_1$ и L_1 не являются постоянными величинами). Цепь насыщается, начиная с некоторого значения тока. К тому же ее состояние зависит от увеличения или уменьшения тока (также и $L = \Lambda_1$ и L_1).

ГЛАВА 15

ТРАНСФОРМАТОРЫ

15.1. Введение

Трансформатор состоит из двух индуктивно связанных по магнитной цепи катушек: связь очень жесткая. (См. также гл. 14.)

• ***Условное обозначение*** (рис. 15.1). В этой главе принята концепция четырехполюсника.

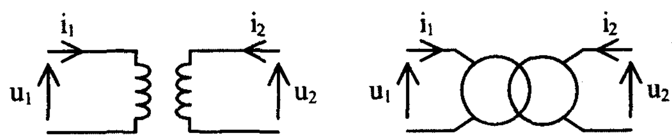


Рис. 15.1. Условные обозначения

• ***Концепция в электронике.*** В электронике направления напряжений и токов часто соответствуют концепции потребителя как в первичной, так и во вторичной цепях (концепция четырехполюсника) в соответствии с принятой для индуктивно связанных катушек. Потоки могут быть как складывающиеся (рис. 15.2), так и вычитающиеся (рис. 15.3).

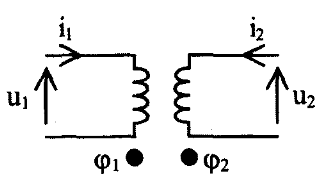


Рис. 15.2. Складывающиеся потоки ($m > 0$)

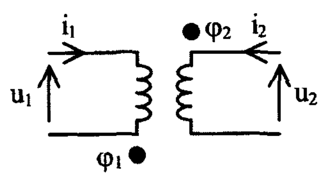


Рис. 15.3. Вычитающиеся потоки ($m < 0$)

• ***Концепция в электротехнике.*** В электротехнике принята концепция потребителя для первичной и концепция генератора для вторичной обмотки трансформатора, предназначенного для передачи и распределения электрической энергии. Потоки рассматриваются складывающимися.

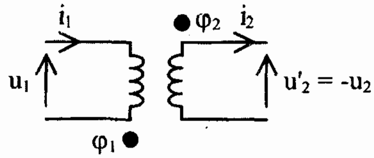


Рис. 15.4. Складывающиеся потоки ($m > 0$). Вторичная обмотка — источник

15.2. Идеальный трансформатор (И.Т.)

15.2.1. Гипотезы. Эквивалентная схема

• ***Гипотезы.***

1) Нет потерь в железе (от токов Фуко и на гистерезис).
2) Магнитная проницаемость магнитной цепи бесконечна.
3) Нет рассеяния магнитного потока.
4) Нет потерь в обмотках (тепловые потери в меди).

Следовательно, первичный ток равен нулю, если нулю равен вторичный ток на основании 1-й и 2-й гипотез. Вторичное напряжение не зависит от вторичного тока на основании 3-й и 4-й гипотез.

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 15.5). Здесь m — коэффициент трансформации. Если потоки складывающиеся, то m положителен (см. рис. 15.2).

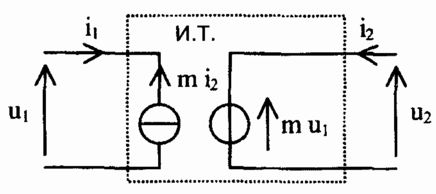


Рис. 15.5. Эквивалентная схема идеального трансформатора

При вычитающихся потоках m отрицателен (см. рис. 15.3). Число витков первичной обмотки — n_1, вторичной — n_2.

$$m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-i_2}{i_1} \quad \text{и} \quad |m| = \frac{n_2}{n_1}.$$

15.2.2. Синусоидальный процесс

$$m = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-\underline{I}_1}{\underline{I}_2}.$$

• ***Полное параллельное сопротивление, приведенное к первичной или вторичной обмотке.*** Два четырехполюсника (рис. 15.6 и 15.7) эквивалентны.

Рис. 15.6. Полное параллельное сопротивление, приведенное к первичной обмотке

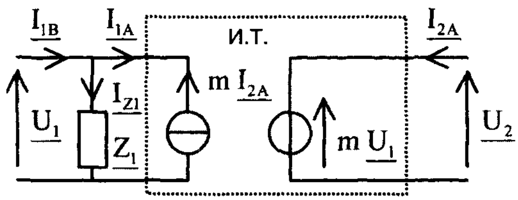
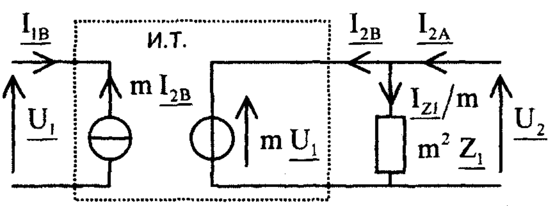


Рис. 15.7. Полное параллельное сопротивление, приведенное ко вторичной обмотке



• ***Полное последовательное сопротивление, приведенное к первичной или вторичной обмотке.*** Два четырехполюсника (рис. 15.8 и 15.9) эквивалентны.

Рис. 15.8. Полное последовательное сопротивление, приведенное к первичной обмотке

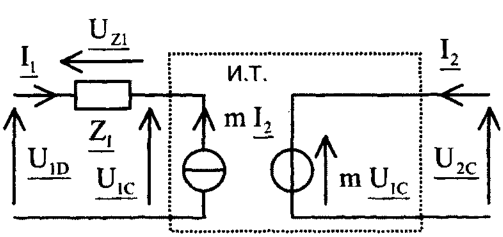
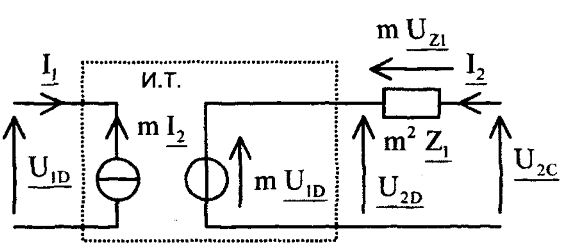


Рис. 15.9. Полное последовательное сопротивление, приведенное ко вторичной обмотке



Метод

Полное сопротивление умножается на m^2 для приведения его ко вторичной обмотке идеального трансформатора. Напротив, приведение полного вторичного сопротивления к первичной обмотке выполняется делением его на m^2 (табл. 15.1).

Таблица 15.1. Приведение к первичной (→) и ко вторичной (←)

Первичная		Вторичная
$\underline{Z}_1$	→	$m^2\underline{Z}_1$
R_1	→	m^2R_1
L_1	→	m^2L_1
C_1	→	C_1/m^2
$\underline{Z}_2/m^2$	←	$\underline{Z}_2$
R_2/m^2	←	R_2
L_2/m^2	←	L_2
$m^2\ C_2$	←	C_2

Примечание. Результаты, позволяющие выполнить приведение сопротивления, емкости и индуктивности, справедливы и в переходных режимах.

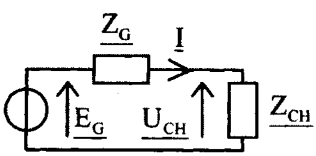


Рис. 15.10. Согласование при $\underline{Z}_{CH} = \overline{\underline{Z}_G}$

• ***Согласование по мощности.*** Говорят, что генератор и нагрузка согласованы по мощности, если от генератора к потребителю передается наибольшая мощность. В случае генератора с полным внутренним сопротивлением $\underline{Z}_G$ (рис. 15.10), работающего на нагрузку $\underline{Z}_{CH}$, условием согласования по мощности будет

$$\underline{Z}_{CH} = \overline{\underline{Z}_G},$$

где $\overline{\underline{Z}_G}$ и $\underline{Z}_G$ комплексно сопряжены.

Для идеального трансформатора схема рис. 15.12 эквивалентна схеме рис. 15.11.

Следовательно, согласование по мощности соответствует соотношениям:

$$\frac{\underline{Z}_L}{m^2} = \overline{\underline{Z}_G} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{R_L}{m^2} = R_G, \\ \frac{X_L}{m^2} = -X_G \end{cases}$$

Примечание. Трансформатор не позволяет применить независимо действительные и мнимые части полных сопротивлений, и он не позволяет изменить знак между мнимыми частями. Трансформатор позволяет просто адаптировать по мощности полные сопротивления, когда они имеют характер активных сопротивлений или ведут себя как активные сопротивления.

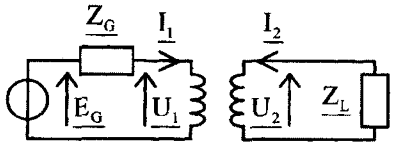


Рис. 15.11. Приведение $\underline{Z}_L$ ко вторичной обмотке

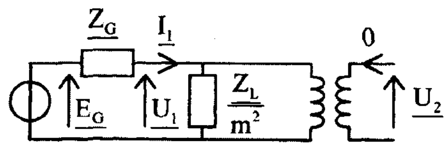


Рис. 15.12. Приведение $\underline{Z}_L$ к первичной обмотке

15.3. Трансформатор без потерь и рассеяния (Т.Б.П.Р.)

- ***Гипотезы.***

1. Нет потерь в железе.
2. Нет магнитного потока рассеяния.
3. Нет тепловых потерь в меди обмоток.

- ***Эквивалентная схема*** (рис. 15.13). L — собственная индуктивность первичной обмотки, она положительна; i_{10} — ток намагничивания, это ток i_1 при $i_2 = 0$.

$$\begin{cases} u_1 = L\frac{di_{10}}{dt}, \\ u_2 = mu_1 \end{cases} \qquad i_{10} = i_1 + mi_2.$$

Примечание. Это эквивалентная схема двух катушек с максимальной связью ($k = \pm 1$) без потерь в железе и в обмотках. Таким образом, имеем (см. гл. 14):

$$L = L_1 = \Lambda_1, \qquad L_2 = \Lambda_2 = m^2 L, \qquad M = mL.$$

- ***Вторая эквивалентная схема*** (рис. 15.14). Она получена приведением индуктивности L ко вторичной обмотке. Здесь m^2L — собственная индуктивность вторичной обмотки, i_{20} — ток намагничивания: $i_{20} = i_{10}/m$.

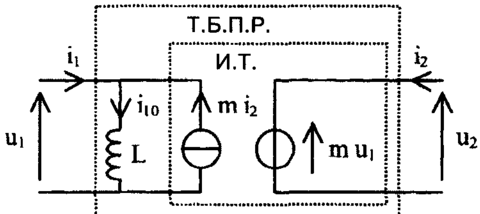


Рис. 15.13. Эквивалентная схема Т.Б.П.Р.

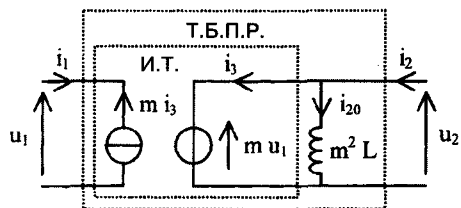


Рис. 15.14. Вторая эквивалентная схема Т.Б.П.Р.

15.4. Трансформатор с рассеянием и потерями в меди

Гипотеза: нет потерь в железе.

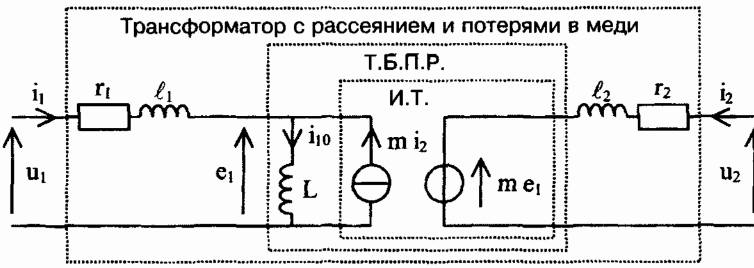


Рис. 15.15. Эквивалентная схема трансформатора с рассеянием и потерями в меди

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 15.15). Принимаем: ℓ_1 (соответственно ℓ_2) — индуктивность магнитного рассеяния первичной (соответственно вторичной) обмотки. Они положительны. r_1 (соответственно r_2) — сопротивление первичной (соответственно вторичной) обмотки, вызывающее тепловые потери в меди.

$$\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + \ell_1 \frac{di_1}{dt} + e_1, \\ u_2 = m e_1 + r_2 i_2 + \ell_2 \frac{di_2}{dt}, \end{cases} \qquad i_{10} = i_1 + m i_2, \quad e_1 = L\frac{di_{10}}{dt}.$$

Примечание. Это эквивалентная схема двух катушек с не максимальным коэффициентом связи ($-1 < k < +1$) с потерями в меди и без потерь в железе. Имеем (см. гл. 14):

$$L_1 - l_1 = \Lambda_1 = L, \qquad L_2 - l_2 = \Lambda_2 = m^2 L, \quad M = mL.$$

$$\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}, \\ u_2 = M\frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{cases}$$

Метод

Моделирующее устройство SPICE позволяет просто учитывать работу трансформатора в линейной зоне, исходя из линейной модели индуктивно связанных катушек (рис. 15.16). Эта модель соответствует модели трансформатора с рассеянием магнитного потока и потерями в меди (см. рис. 15.15).

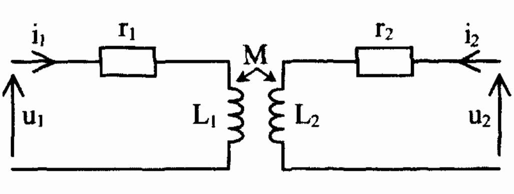


Рис. 15.16. Индуктивно связанные катушки с потерями в меди

Вопрос. 1) Испытание на постоянном токе. Измеряем U_1, I_1, U_2, I_2. Определить r_1 и r_2.

2) Испытание на холостом ходу ($i_2 = 0$). Первичная обмотка включается на действующее номинальное напряжение $U_{1ном}$. Измеряется действующее значение первичного тока холостого хода I_{10} и действующее значение вторичного напряжения холостого хода U_{20}. Определить L_1 и M.

3) Испытание при коротком замыкании ($u_2 = 0$). Первичная обмотка запитывается пониженным напряжением до уровня, при котором действующее значение измеряемого вторичного тока равно номинальному значению $I_{2ном}$. При этом значении вторичного тока измеряется действующее значение первичного тока I_1. Определить L_2.

4) Выразить коэффициент связи трансформатора.

5) Полагая, что рассеяние магнитного потока слабое (обычная ситуация для трансформаторов), дать выражение коэффициента трансформации трансформатора.

Ответ. При синусоидальном режиме имеем:

$$\begin{cases} \underline{U_1} = (r_1 + jL_1\omega)\underline{I_1} + jM\omega\underline{I_2}, \\ \underline{U_2} = jM\omega\underline{I_1} + (r_2 + jL_2\omega)\underline{I_2}. \end{cases}$$

1) Испытание на постоянном токе ($\omega = 0$):

$$r_1 = \frac{U_1}{I_1} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{U_2}{I_2}.$$

2) Испытание на холостом ходу ($i_2 = 0$):

$$\begin{cases} \underline{U_1} = (r_1 + jL_1\omega)\underline{I_{10}}, \\ \underline{U_{20}} = jM\omega\underline{I_{10}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{1ном} = \sqrt{r_1^2 + (L_1\omega)^2} I_{10}, \\ U_{20} = |M|\omega I_{10}, \end{cases}$$

откуда:

$$L_1 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{U_{1ном}}{I_{10}}\right)^2 - r_1^2} \quad \text{и} \quad |M| = \frac{1}{\omega}\frac{U_{20}}{I_{10}}.$$

3) Испытание при коротком замыкании ($u_2 = 0$):

$$0 = jM\omega\underline{I_1} + (r_2 + jL_2\omega)\underline{I_2} \Rightarrow |M|\omega I_1 = \sqrt{r_2^2 + (L_2\omega)^2} I_2,$$

откуда:

$$L_2 = \frac{1}{\omega}\sqrt{M^2\omega^2\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 - r_1^2}.$$

4) Коэффициент связи трансформатора $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$.

5) Коэффициент трансформации (рассеяние магнитного потока слабое)

$$\begin{cases} m = \frac{M}{\Lambda_1}, \\ l_1 = L_1 \Rightarrow L_1 = \Lambda_1 + \ell_1 \approx \Lambda_1, \end{cases} \Rightarrow \quad m \approx \frac{M}{L_1}.$$

15.5. Трансформатор с рассеянием магнитного потока, потерями в меди и в железе

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 15.17). Эта схема особенно широко используется в электротехнике. Здесь R учитывает магнитные потери в сердечнике (от токов Фуко, на гистерезис).

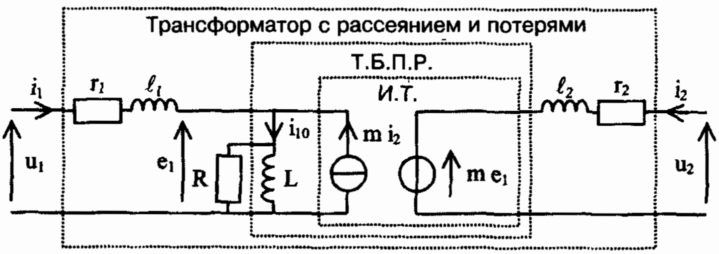


Рис. 15.17. Эквивалентная схема трансформатора с рассеянием и потерями

$$\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + \ell_1 \frac{di_1}{dt} + e_1, \\ u_2 = me_1 + r_2 i_2 + \ell_2 \frac{di_2}{dt}, \end{cases} \qquad i_{10} = i_1 + mi_2, \quad e_1 + \frac{L}{R}\frac{de_1}{dt} = L\frac{di_{10}}{dt}.$$

Примечания.

– Это линеаризованная модель, т. е. магнитная проницаемость предполагается постоянной, нет ни насыщения, ни гистерезиса в магнитной среде.

– Эта эквивалентная схема может быть преобразована, как и другие, представленные выше, приведением всех или части элементов к первичной или ко вторичной обмотке (см. § 15.2).

15.6. Трансформатор Каппа

• ***Гипотеза.***

1. Нет потерь в железе.
2. Магнитная проницаемость магнитной цепи бесконечна.

• ***Эквивалентная схема.*** Эта схема является частным случаем схемы рис. 15.17, полученная исключением R и L ($R = +\infty$ и $L = +\infty$). Эта модель особенно распространена в электротехнике для промышленных трансформаторов, для которых пренебрегают током намагничивании.

$$\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + \ell_1 \frac{di_1}{dt} + e_1, \\ u_2 = me_1 + r_2 i_2 + \ell_2 \frac{di_2}{dt}, \end{cases} \qquad i_1 = -mi_2.$$

Метод
На холостом ходу, т. е. при $i_2 = 0$, по гипотезе Каппа можно определить коэффициент трансформации как:

$$|m| = U_{20}/U_{1ном},$$

где U_{20} — действующее значение вторичного напряжения на холостом ходу, $U_{1ном}$ — номинальное действующее значение первичного напряжения.

• ***Эквивалентная схема, приведенная ко вторичной обмотке*** (рис. 15.18).

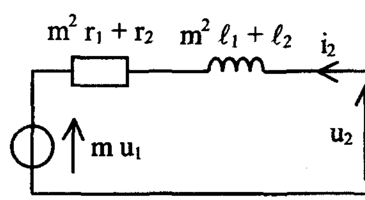


Рис. 15.18. Эквивалентная схема, приведенная ко вторичной обмотке

15.7. Реальный трансформатор. Нелинейности

– Паразитные емкости (см. гл. 14).
– Оценка КПД и формула Бушеро (см. гл. 38).
– Здесь рассматриваются проявления нелинейностей.

При наличии ферромагнитного материала проявляются три вида нелинейностей:

1. Поток не является линейной функцией тока. Относительная проницаемость материала не постоянна, а следовательно, не постоянны и индуктивности $L = \Lambda_1$ и L_1.
2. Поток насыщается, начиная от некоторого значения тока. Сильное увеличение тока может иметь опасные последствия.
3. В зависимости от того, идет увеличение или уменьшение тока при одном и том же его значении, потоки отличаются. Индуктивности $L = \Lambda_1$ и L_1 при этом также отличаются. Так формируется цикл гистерезиса.

Примечание. Моделирующее устройство SPICE позволяет моделировать выше приведенные нелинейности, используя модель, разработанную JILES-FTHERTON и основанную на уравнении кривой первого намагничивания ферромагнитного материала.

Метод

Для упрощения часто принимается кусочно-линейная аппроксимация уравнения $\varphi = f(i_{10})$ магнитной цепи, определяющая два рабочих режима (рис. 15.19)

– режим линейно изменяющегося потока (1), при котором

$$L = \frac{n_1 \Phi_{Sat}}{I_{Sat}} = const \Rightarrow n_1 \varphi = L i_{10};$$

– режим постоянного потока (2), при котором $\varphi = \Phi_{Sat}$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{f1} + \Phi_{Sat}, \\ \varphi_2 = \varphi_{f2} + a\Phi_{Sat}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = l_1 i_1 + n_1 \Phi_{Sat}, \\ \psi_2 = l_2 i_2 + n_2 a \Phi_{Sat}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = l_1 \frac{di_1}{dt}, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = l_2 \frac{di_2}{dt}. \end{cases}$$

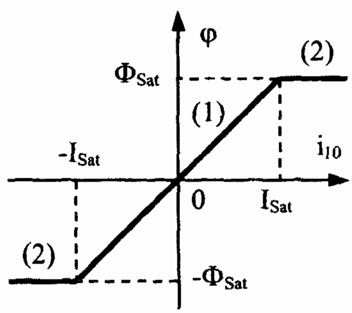


Рис. 15.19. $\varphi = f(i_{10})$

Примечание. Напомним, что φ — поток намагничивания через одну секцию магнитной цепи: $\varphi = \varphi_{21} + a\varphi_{12}$ (см. гл. 14).

Вопрос. Привести эквивалентную схему трансформатора с рассеянием магнитного потока и потерями в меди в режиме постоянства потока.

Ответ. Эквивалентной схеме (рис. 15.15) в режиме переменного потока соответствует эквивалентная схема (рис. 15.20) в режиме постоянного потока.

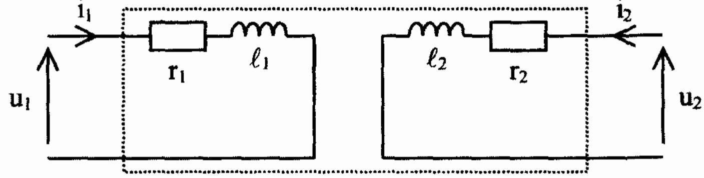


Рис. 15.20. Трансформатор с рассеянием и потерями в меди при постоянстве потока

Внимание! Первичный ток (соответственно вторичный) зависит только от r_1 и ℓ_1 (соответственно от r_2 и ℓ_2), значения которых малы. Следовательно, первичный и вторичный токи могут быть очень большими, способными разрушить трансформатор.

Общее условие хорошей работы: Трансформатор должен всегда работать с переменными значениями потока.

ГЛАВА 16

ДИОДЫ

16.1. Диоды с PN-переходом

16.1.1. Обозначение. Устройство

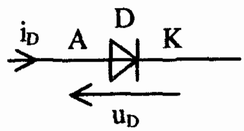


Рис. 16.1. Обозначение

• ***Обозначение*** (рис. 16.1). Условие потребителя: напряжение u_D и ток i_D. Здесь A — анод; K — катод. Вершина треугольника указывает направление прямого прохождения тока.

• ***Устройство (рис. 16.2) и принцип действия.*** Диод с PN-переходом состоит из двух зон, насыщенных соответственно атомами-акцепторами (P) и атомами-донорами (N). В момент возникновения перехода процесс диффузии прерывается: дырки области P диффундируют в область N, фиксируя область отрицательного заряда (ионизированные атомы). А электроны области N диффундируют в область P, создавая положительные заряды. Тогда на уровне перехода образуется зона шириной d_0, называемая *зоной пространственного заряда* или *зоной перехода*, насыщенной подвижными носителями и содержащей только положительные заряды со стороны N и отрицательные — со стороны P. Эти заряды создают электрическое поле $\vec{E}$, препятствующее диффузии носителей, устанавливая электрическое равновесие. На зажимах зоны пространственного заряда возникает разность потенциалов, создающая электрическое поле. Она называется *контактным напряжением* или *напряжением диффузии перехода* и обозначается здесь как U_0.

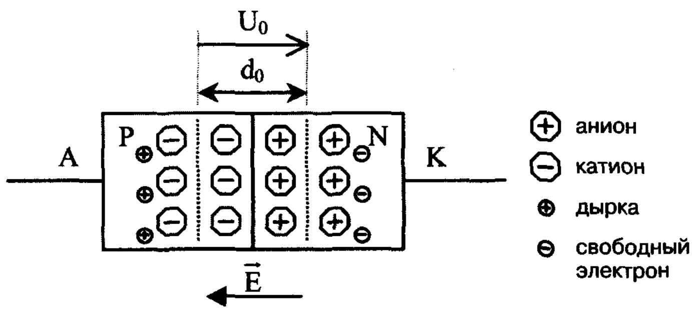
$$U_0 = U_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}.$$

Здесь N_A — концентрация атомов-акцепторов зоны P; N_D — концентрация атомов-доноров зоны N; n_i — свойственная материалам концентрация (например, кремния); U_T — термодинамическое (или термическое) напряжение, определяемое как:

$$U_T = \frac{kT}{q} \quad (U_T \approx 26 \text{ мВ при } 300 \text{ K})$$

с единицами измерения: $\text{В} = \frac{(\text{Дж/К})\text{К}}{\text{Кл}}$, где $k \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана в джоулях на кельвин; $q \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — абсолютное значение заряда электрона в кулонах; T — абсолютная температура в градусах Кельвина (0 °C ≈ 273,15 K).

Рис. 16.2. Принцип действия PN-перехода



Вопрос. Имеем PN-переход в кремнии при 300 K с внутренней концентрацией кремния $n_i = 1{,}45 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$, донорских примесей $N_A = 10^{18}$ см$^{-3}$ в зоне P и донорских примесей $N_D = 10^{16}$ см$^{-3}$ в зоне N. Рассчитать контактное напряжение при 300 K.

Ответ. $U_0 \approx 0{,}82$ мВ при 300 K.

• ***Поляризованный PN-переход в прямом направлении*** ($u_D > 0$ в нормальном режиме). Напряжения u_D и U_0 отсекаются, барьерный потенциал переходит от U_0 к $U_0 - u_D$. Ширина зоны пространственного заряда уменьшается, как и напряженность электрического поля $\vec{E}$. Тогда поле становится неспособным противиться диффузии электронов из N в P. Напряжение u_D не должно превосходить U_0 из-за опасности пробоя.

• ***Поляризованный PN-переход в обратном направлении*** ($u_D < 0$ в нормальном режиме). Напряжения U_0 и u_D складываются. Это повышает ширину зоны пространственного заряда и напряженность электрического поля $\vec{E}$. Тогда поле запрещает диффузию электронов из N в P. Отрицательным становится i_D.

16.1.2. Идеальная модель (рис. 16.3)

16.1.3. Кусочно-линейная модель (рис. 16.4)

• ***Средняя мощность рассеяния*** (кусочно-линейная модель). Диод заперт: $P_{ср} = 0$. Проводящий диод: $P_{ср} = U_{D0} I_{D\,ср} + R_D I_D^2$.

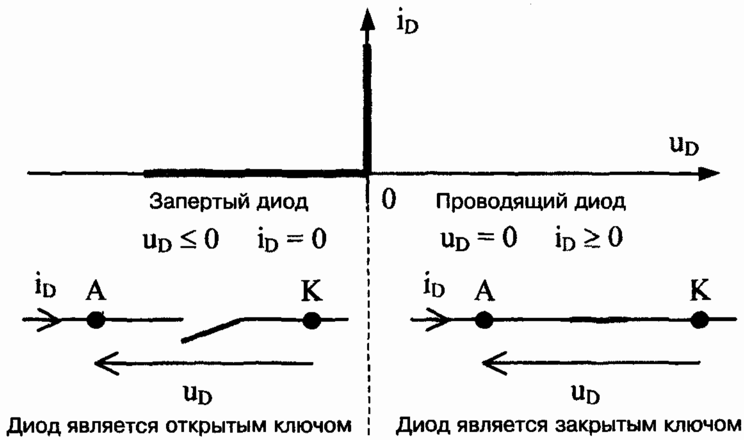


Рис. 16.3. Характеристика идеальной модели

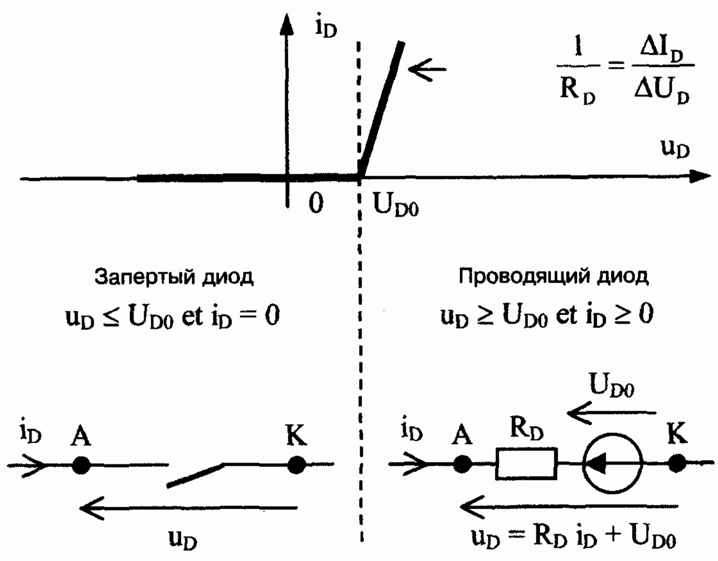


Рис. 16.4. Характеристика кусочно-линейной модели

16.1.4. Основная модель

а) Уравнения

1) *Нормальный режим* (u_D положительно или отрицательно. См. рис. 16.5)

$$i_D = I_S \left(e^{\frac{u_D}{NU_T}} - 1 \right).$$

Здесь I_S — *ток насыщения* или *обратный ток*. Он имеет значение между несколькими фемтоамперами и наноамперами. N — уточняющий эмпирический коэффициент, называемый *коэффициентом идеализации* или *эмиссионным коэффициентом*. Он близок к 1 для кремниевых (Si) транзисторов и для германиевых (Ge) диодов и находится между 1 и 2 для кремниевых (Si) диодов.

Упрощенные уравнения с ошибкой менее 5%.

– Прямая поляризация: если $u_D > 3NU_T$, то $i_D \approx I_S \exp \frac{u_D}{NU_T}$.
– Обратная поляризация: если $u_D < -3NU_T$, то $i_D \approx I_S$.

2) *Работа в зоне пробоя* (u_D отрицательно. См. рис. 16.5).

$$i_D = -I_{BV} e^{-\frac{u_D + U_{BV}}{N_{BV} U_T}}.$$

Здесь U_{BV} — обратное напряжение (breakdown voltage) принимается положительным. I_{BV} — обратный ток принимается положительным. N_{BV} — коэффициент «идеальности» настройки.

3) *Нормальный режим и пробой.* Во избежание разрыва описания уравнениями моделирующие устройства SPICE рассчитывают ток i_D суммированием тока нормального режима и тока в зоне пробоя:

$$i_D = i_{D\ \text{нормальный режим}} + i_{D\ \text{пробоя}}.$$

Пример 16.1.1. Одна из моделей SPICE диода 1N4148 оговаривает $I_S = 2{,}68$ нА; $N = 1{,}84$; $U_{BV} = 100$ В; $I_{BV} = 100$ мкА и $N_{BV} = 1$.

Примечание. Реальный обратный ток диода больше тока I_S, так как вышеприведенное выражение не учитывает токи утечки и рекомбинации на поверхности и в зоне объемного заряда. Моделирующее устройство SPICE позволяет учитывать как эти погрешности, так и некоторые другие.

б) Характеристика

Вольта-амперная характеристика (рис. 16.5) $i_D = f(u_D)$ проходит через начало координат: диод является пассивным двухполюсником. Для отрицательных токов масштаб растянут.

в) Эквивалентные схемы

• ***Эквивалентная схема «широких сигналов»*** (рис. 16.6). Это управляемый напряжением u_D в соответствии с уравнениями базовой модели источник тока i_D.

• ***Эквивалентная схема «малых сигналов»*** (рис. 16.7). Это динамическое сопротивление r_d работает от точки поляризации диода (U_{D1}, I_{D1}). Для упрощения мы приняли i_D и u_D вместо di_D и du_D.

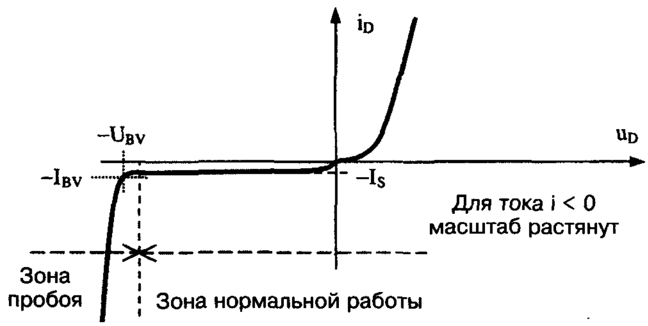


Рис. 16.5. Вольт-амперная характеристика диода $i_D = f(u_D)$

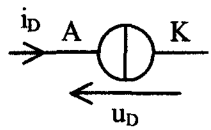


Рис. 16.6. Эквивалентная схема «широких сигналов»

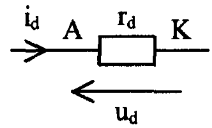


Рис. 16.7. Эквивалентная схема «малых сигналов»

1) *Нормальный режим*

$$\frac{1}{r_d} = \frac{i_d}{u_d} = \left.\frac{di_D}{du_D}\right|_{(u_D=U_{D1},\, i_D=I_{D1})} = \frac{I_S}{NU_T}e^{\frac{U_{D1}}{NU_T}} = \frac{I_{D1}+I_S}{NU_T},$$

откуда:

$$r_d = \frac{NU_T}{I_{D1}+I_S} \approx \frac{NU_T}{I_{D1}}.$$

Вопрос. Рассчитать динамическое сопротивление диода 1N4148 ($N = 1{,}84$) при 300 К при прохождении через него тока 1 мА, затем — 100 мА.
Ответ. $r_d \approx \frac{0{,}0476}{I_{D1}}$, т. е. 47,6 Ом для 1 мА и 0,476 Ом для 100 мА.
Примечание. Динамическое сопротивление почти обратно пропорционально току поляризации.

2) *Пробой.* Аналогичным образом получим:

$$r_d = -\frac{N_{BV}U_T}{I_{D1}} \qquad (I_{D1} < 0).$$

г) Соединение двух диодов

• ***Последовательное соединение*** (рис. 16.8)

$$i_{D1} = i_{D2}.$$

1) *Нормальный режим*

– При прямой поляризации распределение напряжения $u_{D1} + u_{D2}$ между u_{D1} и u_{D2} зависит от коэффициентов N_1 и N_2 и слабо от токов насыщения I_{S1} и I_{S2}. Для двух диодов с равными параметрами распределение напряжения приблизительно равномерное.

- При обратной поляризации распределение напряжения $u_{D1} + u_{D2}$ между u_{D1} и u_{D2} не равномерное. Один из двух диодов может воспринимать почти все обратное напряжение. Для уравновешивания напряжений u_{D1} и u_{D2} при обратной поляризации нужно включить равные сопротивления параллельно диодам (рис. 16.9).

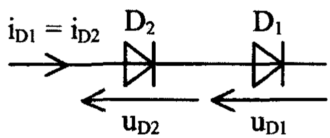


Рис. 16.8. Последовательное соединение

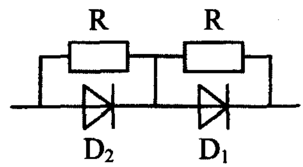


Рис. 16.9. Уравновешивание обратного напряжения

2) *Пробой.* Распределение напряжения $u_{D1} + u_{D2}$ между u_{D1} и u_{D2} не равномерное, так как оно сильно зависит от обратных напряжений U_{BV1}, U_{BV2}.

• ***Параллельное соединение*** (рис. 16.10).

$$u_D = u_{D1} = u_{D2}.$$

1) *Нормальный режим.* Распределение токов $i_{D1} + i_{D2}$ между i_{D1} и i_{D2} сильно зависит от токов насыщения I_{S1} и I_{S2}, которые сильно зависят от температуры. Распределение не равномерное.

2) *Пробой.* Распределение токов $i_{D1} + i_{D2}$ между i_{D1} и i_{D2} сильно зависит от обратных напряжений U_{BV1}, U_{BV2}. Распределение совсем не равномерное.

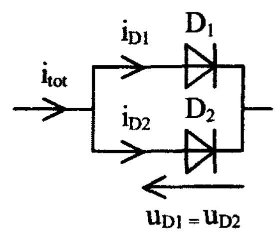


Рис. 16.10. Параллельное соединение

16.1.5. Ограничения и допущения

а) Влияние температуры

• ***Влияние температуры на ток насыщения.***

$$I_S = CT^{\frac{X}{N}} e^{-\frac{E_G}{NkT}}, \quad \text{где} \quad C = I_{S0}\left(\frac{1}{T_0}\right)^{\frac{X}{N}} e^{\frac{E_G}{NkT_0}}.$$

Здесь T и T_0 — абсолютные температуры перехода (в градусах Кельвина); I_S и I_{S0} — токи насыщения при температурах T и T_0 соответственно; E_G — ширина полосы запрета, зависящая от материалов: $E_G = 1{,}43$ эВ для арсенида галлия (GaAs), 1,11 эВ для кремния (Si), 0,66 эВ для германия (Ge); X — показатель степени (3 для кремния). Обычно X/N составляет 2 для германия, 1,5 для кремния и арсенида галлия.

Относительные изменения I_S *в функции температуры*:

$$\frac{1}{I_S}\frac{dI_S}{dT} = \frac{1}{T}\left(\frac{X}{N} + \frac{E_G}{NkT}\right).$$

Вопрос. Рассчитать относительное изменение I_S в функции температуры диода 1N4148 ($X = 3$, $N = 1{,}84$, $E_G = 1{,}11$ эВ) в окрестности 300 K.
Ответ. $\frac{1}{I_S}\frac{dI_S}{dT} \approx 8{,}3\%/K$ в окрестности 300 K.
Внимание! Ток I_S удваивается приблизительно каждые 7 °C для кремния и приблизительно каждые 11 °C для германия. Следовательно, ток i_D сильно зависит от температуры при обратной поляризации.

• ***Температурная зависимость напряжения перехода. Прямая поляризация.*** Предполагается независимость E_G от температуры и $u_D > 3NU_T$.

$$u_D \approx U_G - (U_G - u_{D0})\frac{T}{T_0} - XU_T \ln\frac{T}{T_0},$$

где $u_{D0} = u_D\Big|_{T=T_0} \approx NU_{T0}\ln\frac{i_D}{I_{S0}}$ (u_{D0} зависит от i_D); $U_G = \frac{E_G}{q}$ (эквивалентное напряжение шириной запрещенной зоны);

$$U_T = \frac{kT}{q} \quad \text{и} \quad U_{T0} = U_T\Big|_{T=T_0} = \frac{kT_0}{q}.$$

Изменение u_D *в функции температуры*:

$$\frac{du_D}{dT} \approx \frac{1}{T_0}\left[u_{D0} - U_G - XU_{T0}\left(1 + \ln\frac{T}{T_0}\right)\right].$$

Внимание! Ток I_D следует поддерживать постоянным, чтобы и U_{D0} также поддерживать постоянным. Это позволяет регулировать dU_D/dT. Член $\ln T/T_0$ широко изменяет dU_D/dT.

На практике напряжение U_D снижается от 1 до 3 мВ на градус Кельвина в зависимости от типа диода и от постоянного тока I_D.
Вопрос. Рассчитать U_{D0} и dU_D/dT диода 1N4148 ($I_{S0} = 2{,}68$ нА, $X = 3$, $N = 1{,}84$, $E_G = 1{,}11$ эВ) при токе $I_D = 5$ мА в окрестности 300 K.
Ответ. $U_{D0} \approx 0{,}68$ В и $dU_D/dT \approx -1{,}7$ мВ/K.
Вопрос. Рассчитать U_{D0} и dU_D/dT диода 1N4148 ($I_{S0} = 2{,}68$ нА, $X = 3$, $N = 1{,}84$, $E_G = 1{,}11$ эВ) для тока $I_D = 5$ мА в окрестностях $T = 300$ K.
Ответ. $U_{D0} \approx 0{,}68$ В и $dU_D/dT \approx -1{,}7$ мВ/K.

б) Динамический процесс при «широких сигналах» (рис. 16.11)

Здесь R_S — сопротивление контактов и нейтральных зон (удаленных от перехода). Напряжение u_D, прикладываемое к переходу, меньше напряжения u'_D, приложенного к диоду. $C = C_T + C_D$ — емкость, меняющаяся с изменением напряжения u_D. Она зависит также от температуры.

C_T (или C_J) — емкость перехода зоны пространственного заряда. Ее значения приводятся в конструкторских каталогах для отрицательного или равного нулю напряжения и некоторого значения температуры. Следующее выражение не справедливо при u_D, близких к U_0.

$$C_T = \frac{C_{T0}}{\left(1 - \frac{u_D}{U_0}\right)^M} \qquad (u_D < U_0),$$

где C_{T0} — емкость перехода, $u_D = 0$ — потенциал контакта, M — коэффициент, зависящий от профиля перехода (1/3 для непрерывного перехода и 1/2 для обрывающегося перехода), C_D (или C_t) — диффузионная емкость (или накопленная, или времени пробега). Накопленный заряд пропорционален току перехода ($q_S = \tau i_D$). Накапливаемый заряд является принципиальным ограничением быстродействия диодов с PN-переходом.

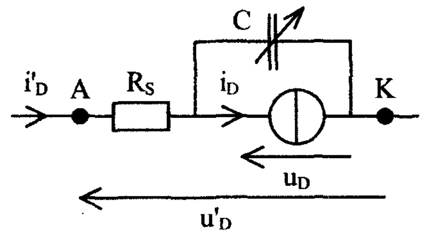


Рис. 16.11. Эквивалентная схема «широких сигналов»

$$C_D = \tau \frac{i_D}{U_T} = \frac{\tau}{r_d},$$

где τ — средняя продолжительность жизни миноритарных зарядов (или время перехода).

Примечание. PN-переходу свойственны два типа емкостей. Одна (C_T) преобладает при обратной поляризации, другая (C_D) — при прямой поляризации.

в) Переключения. Время восстановления

• ***Диод в режиме переключения*** (рис. 16.12 и 16.13). Принимается малое значение R_S по сравнению с R.

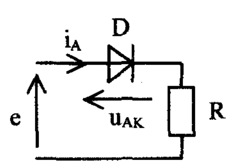


Рис. 16.12. Диод при переключении

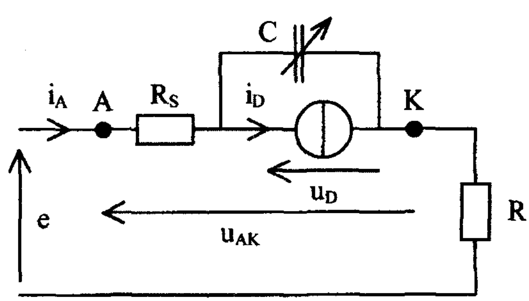


Рис. 16.13. Эквивалентная схема к рис. 16.12

• ***Временна́я диаграмма*** (рис. 16.14).

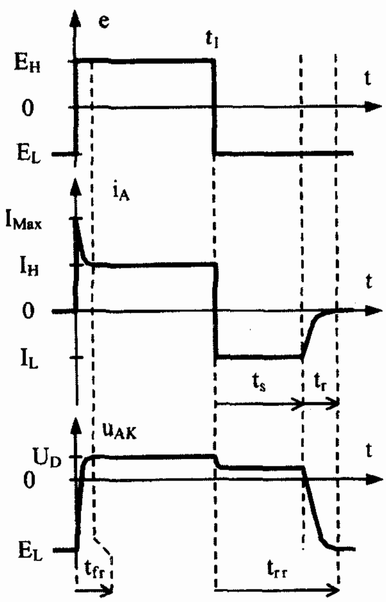


Рис. 16.14. Временная диаграмма

1) При $t < 0$ диод заперт, так как $E_L < 0$. Емкость C ($C \approx C_T$) заряжена $u_{AK} = E_L$.

2) При $t = 0$ к диоду прикладывается положительное напряжение ($e = E_H$). Возникает ток от 0 до $I_{Макс}$, так как напряжение на зажимах C не может претерпевать разрыва ($u_{AK} = E_L$). Затем емкость C заряжается (разряд C_T, затем заряд C_D) через сопротивление R в течение времени t_{fr}, напряжение u_{AK} возрастает от E_L до U_D. Ток i_A переходит от $I_{Макс}$ до I_H. Диод становится проводящим.

3) При $t = 0$ к диоду прикладывается отрицательное напряжение ($e = E_L$). Ток падает от значения I_H к I_L. Накопленный в C ($C = C_D$) заряд исчезает при появлении обратного тока в переходе при $u_{AK} \approx \approx U_D \approx 0$. Время насыщения t_s необходимо для устранения накопленного заряда. Для разряда емкости C ($C = C_T$) требуется время t_r (восстановление пространственного заряда).

$$I_{Макс} = \frac{E_H - E_L}{R}, \qquad I_H = \frac{E_H}{R}, \qquad I_L = \frac{E_L}{R},$$

$$t_s = \tau \ln\left(1 + \frac{E_H}{-E_L}\right) = \tau \ln\left(1 + \frac{I_H}{-I_L}\right), \qquad t_r = RC_{Tcp} \ln \frac{E_H - E_L}{E_H - E_D}.$$

• ***Время восстановления проводимости*** (t_{fr} — *forward recovery time*). Это время перехода диода от запертого состояния к проводящему состоянию. Положительный импульс передается корректно, если его длительность достаточно больше времени восстановления проводимости.

• ***Время восстановления запирания*** (t_{rr} — *reverse recovery time* $t_{rr} = t_s + t_r$). Это время перехода диода от проводящего состояния к запертому состоянию. Под этим понятием разработчики принимают время, необходимое для спадания тока диода до нуля при его переходе в запирающее состояние при определенных условиях поляризации. Сильное ограничение на скорость переключения оказывает накопленный заряд. Отрицательный импульс передается корректно, если его длительность больше времени восстановления запирания.

Примечание. Для компенсации емкости C нужно параллельно сопротивлению R включить конденсатор. При зависимости емкости C от поляризации компенсация будет успешной только для фиксированных напряжений E_H и E_L.

Хорошим решением является использование «быстрых» диодов, т.е. с малым временем восстановления (особенно диоды Шоттки).

г) Динамический процесс при «малых сигналах» (рис. 16.15)

Примечание. Емкость фиксирована. Она рассчитана в окрестностях заданной точки поляризации (U_{D1}, I_{D1}).

16.2. Особенности некоторых диодов

Основная модель позволяет описывать почти все типы диодов (переменные, выпрямление, Зенера, Шоттки, варикапы...).

16.2.1. Диоды выпрямителей

Это диоды с PN-переходом, допускающие значительные токи и напряжения. Существует две категории этих диодов: низкочастотные выпрямительные диоды (типичные элементы в классических установках частотой 50 Гц) и быстро действующие выпрямительные диоды (источники питания с импульсной регулировкой).

16.2.2. Диоды Зенера. Диоды — стабилизаторы напряжения (стабилитроны)

• ***Обозначение*** (рис. 16.16). Здесь A — анод, K — катод. В зависимости от обстоятельств рассматриваются либо напряжение u_D и ток i_D, либо обратные величины u_Z и i_Z. В обоих случаях принимается концепция потребителя.

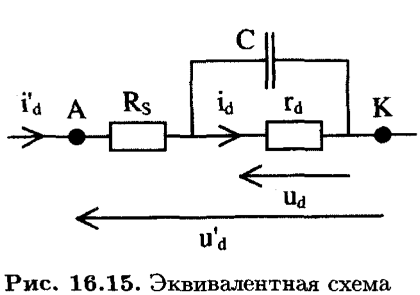


Рис. 16.15. Эквивалентная схема «малых сигналов»

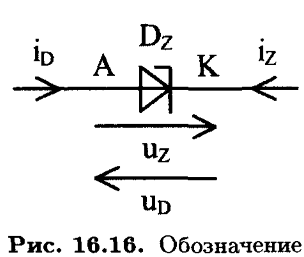


Рис. 16.16. Обозначение диода Зенера

• ***Описание.*** Это диод с PN-переходом, используемый для обратной проводимости в зоне пробоя, который не разрушителен, если максимальные значения тока $I_{ZМакс}$ и мощности $P_{ZМакс}$ не превосходят допустимых значений.

• ***Основная модель и характеристика*** (см. § 16.1.4). Действительными остаются все основные уравнения и эквивалентные схемы. Достаточно осуществить замену переменных $i_Z = -i_D$ и $u_Z = -u_D$ и помнить, что нормальный режим диода Зенера получен для положительных u_Z (отрицательных u_D). Для эквивалентной схемы «малых сигналов» определяется динамическое сопротивление $r_Z = du_Z/di_Z$ в зависимости от точки поляризации (U_{Z1}, I_{Z1}).

• ***Идеальная модель и характеристика*** (рис. 16.17).

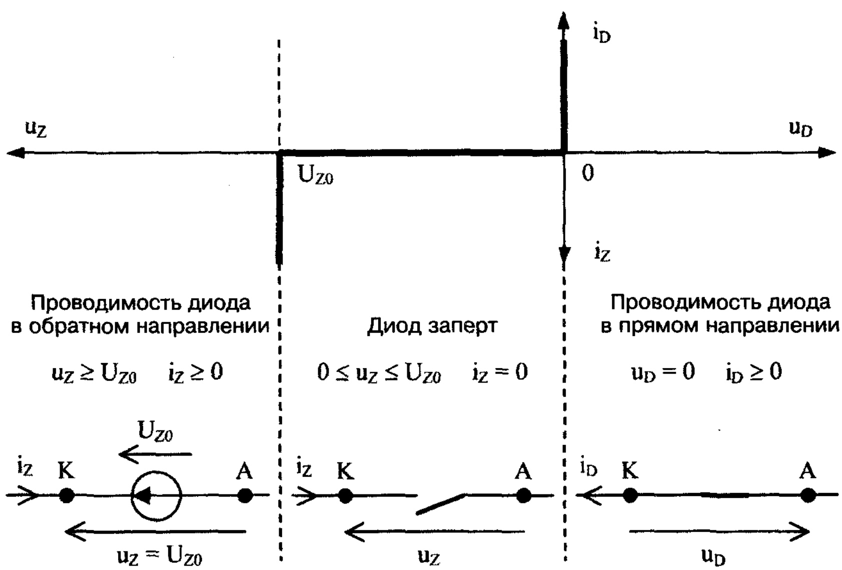


Рис. 16.17. Идеальная модель и характеристика диода Зенера

• ***Кусочно-линейная модель и характеристика*** (рис. 16.18).

• ***Температурный коэффициент.*** Он отрицателен для напряжений восстановления (или для колена) ниже 4 В. Он положителен выше 6 В. Он равен нулю между этими двумя значениями напряжения.

$$\frac{1}{U_Z}\frac{dU_Z}{dT} \text{ с единицами измерения } K^{-1} = \frac{1}{В}\frac{В}{К}.$$

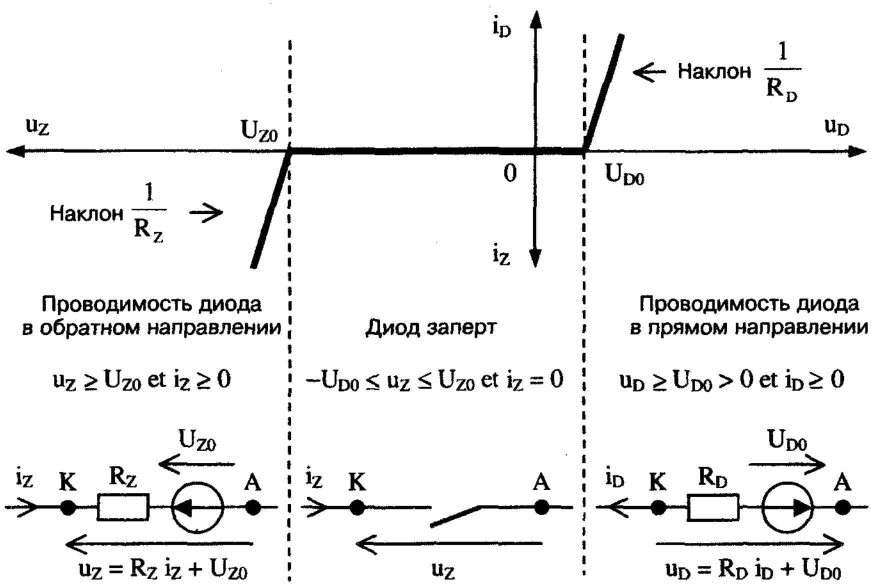


Рис. 16.18. Кусочно-линейная модель и характеристика диода Зенера

16.2.3. Диоды Шоттки

- ***Условное обозначение*** (рис. 16.19). Напряжение u_D и ток i_D соответствуют концепции потребителя. A — анод, K — катод.

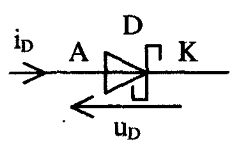


Рис. 16.19. Обозначение диода Шоттки

- ***Описание.*** Это не диод с PN-переходом. Это *сочетание металл-полупроводник*. Его пороговое напряжение порядка 0,3 В меньше, чем у диода с PN-переходом. Кроме того, время восстановления запирания t_{rr} почти нулевое, поскольку накопленных зарядов нет ($C_D = 0$). Диоды Шоттки используются на высоких частотах и при быстрых переключениях. Приведенные для диодов с PN-переходом модели справедливы.

16.2.4. Диоды с переменной емкостью (варикапы)

- ***Условное обозначение*** (рис. 16.20). Напряжение u_D и ток i_D соответствуют концепции потребителя. A — анод, K — катод.

- ***Описание.*** Поляризованный в обратном направлении диод практически эквивалентен его переходной емкости C_T, которая зависит от напряжения на его зажимах (см. § 16.1.5, б).

$$C = C_{кор} + C_T, \quad \text{где} \quad C_T = \frac{C_{T0}}{\left(1 + \frac{u_R}{U_0}\right)^M} \quad (u_R > 0).$$

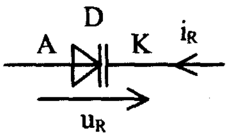


Рис. 16.20. Обозначение варикапа

Здесь $C_{кор}$ — емкость корпуса (часто пренебрегаемая), C_T — емкость перехода при u_R, C_{T0} — емкость перехода при $u_R = 0$, U_0 — контактный потенциал, u_R — обратное напряжение, M — коэффициент, зависящий от профиля перехода (1/3 для непрерывного перехода, 1/2 для обрывающегося перехода и 3/4 для обратного перехода, для которого M является функцией напряжения u_R).

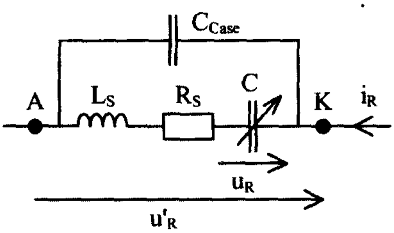


Рис. 16.21. Эквивалентная схема варикапа

Добротность: $f_Q = \frac{1}{2\pi f C R_S}$ (R_S — последовательное сопротивление, рис. 16.21).

Относительное изменение C_T:

$$\frac{dC_T}{C} = \frac{-Mu_R}{u_R + U_0}\frac{du_R}{u_R}$$

(если $u_R \gg U_0$,то $\frac{dC_T}{C} = -M\frac{du_R}{u_R}$).

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 16.21). Для $u_R > 0$, считая ток насыщения равным нулю. При работе этих диодов на высоких частотах следует добавить последовательно индуктивность соединений L_s. Для учета тока насыщения следует добавить сопротивление (очень большое) параллельно емкости C.

16.2.5. PIN-диоды

Такой диод состоит из трех зон: легированная зона P, внутренняя зона I и легированная зона N. При прямой поляризации такой диод эквивалентен сопротивлению, управляемому током поляризации I_D, для сигналов, частота которых выше некоторой минимальной. Эти диоды используются на высоких частотах.

16.2.6. Туннельные диоды

• ***Условное обозначение*** (рис. 16.22). Напряжение u_D и ток i_D соответствуют концепции потребителя. A — анод, K — катод.

• ***Описание.*** Это сильно легированный PN-переход, что проявляется наличием зоны с *отрицательным динамическим сопротивлением* в характеристике диода $i_D = f(u_D)$. Они используются для создания высокочастотных генераторов колебаний до 2 ГГц.

• ***Характеристика*** (рис. 16.23). Различают три зоны. Зона слабого сопротивления между началом координат и первым пиком (U_P, I_P), зона с отрицательным динамическим сопротивлением между пиком и впадиной (U_V, I_V) и зона после впадины, которая соответствует классической характеристике диода (штриховая линия).

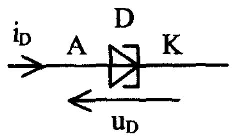


Рис. 16.22. Обозначение туннельного диода

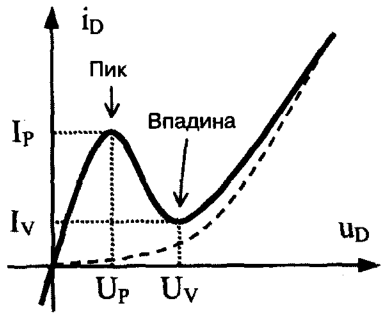


Рис. 16.23. Характеристика $i_D = f(u_D)$ туннельного диода

ГЛАВА 17

БИПОЛЯРНЫЕ ТРАНЗИСТОРЫ

17.1. Условные обозначения. Устройство

• ***Условные обозначения*** (рис. 17.1). B — база, C — коллектор, E — эмиттер. Существует два типа биполярных транзисторов NPN- и PNP-типа. Положительными приняты токи и напряжения, показанные на рис. 17.1. Стрелка на эмиттере (E) показывает проводящее направление перехода база-эмиттер (BE). При прямой проводимости будет положительный ток для NPN-типа и отрицательный для PNP-типа.

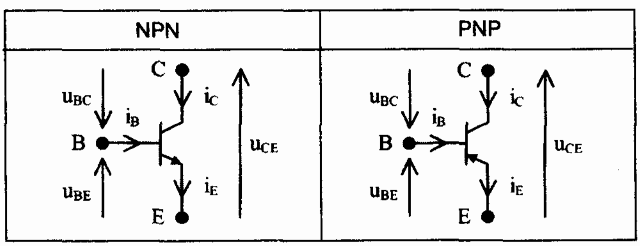


Рис. 17.1. Условные обозначения и условно положительные направления

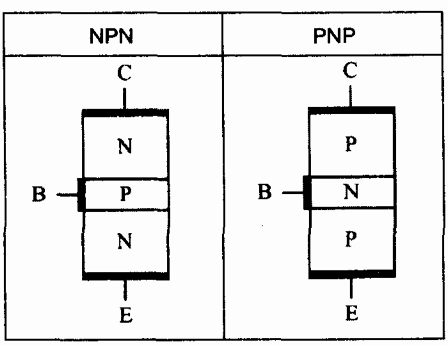


Рис. 17.2. Схематизированное устройство

• ***Устройство*** (рис. 17.2). Биполярный *транзистор* (или B.J.T. — *Bipolar Junction Transistor*), или транзистор с двумя переходами, — это полупроводник с тремя легированными зонами N, P и N или P, N и P.

Тонкая средняя зона является базой. Две крайние отличаются как геометрически, так и различным легированием и являются эмиттером и коллектором. Три таким образом сформированные зоны образуют два перехода: переход база-эмиттер (BE), называемый управляющим переходом, и переход база-коллектор (BC).

17.2. Транзистор NPN-типа

17.2.1. Основная модель

Основная модель (производная модели Эберса и Моля) исходит из суперпозиции прямого и обратного режимов.

а) Уравнения. Эквивалентная схема «широких сигналов»

• ***Прямой режим (F: Forward).*** Предполагается $u_{BC} = 0$, что устраняет эффект перехода BC.

$$i_F = I_S\left(e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1\right),$$

где I_S — *ток насыщения*, или обратный ток, N_F — *коэффициент идеальности*, или *коэффициент эмиссии*, перехода BE (находится между 1 и 2 для Si), U_T — термодинамическое напряжение (см. гл. 16).

Усиление по току в прямом режиме (β_F обозначается обычно упрощенно β): $\beta_F = \frac{i_F}{i_{BF}}$(общий эмиттер) и $\alpha_F = \frac{\beta_F}{\beta_F+1}$ (общая база).

• ***Режим обратной проводимости (R: Reverse).*** Предполагается равенство нулю напряжения u_{BE}.

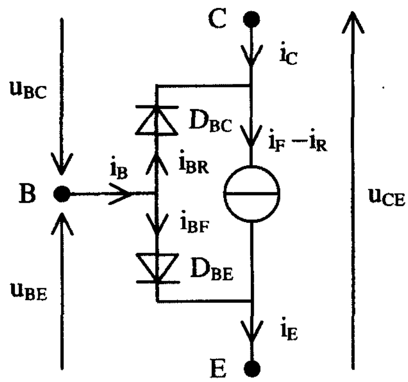
$$i_R = I_S\left(e^{\frac{u_{BC}}{N_R U_T}} - 1\right),$$

где N_R — *коэффициент идеальности* или *коэффициент эмиссии* перехода база-коллектор (BC).

Усиление по току в обратном режиме: $\beta_R = \frac{i_R}{i_{BR}}$(общая база) и $\alpha_R = \frac{\beta_R}{\beta_R+1}$ (общая база).

• ***Суперпозиция режимов. Эквивалентная схема «широких сигналов»*** (рис. 17.3). Источник тока между эмиттером и коллектором управляется токами (или напряжениями) перехода BE и DC. Переходы BE и BC представлены диодами, помещенными соответственно между базой и эмиттером и между базой и коллектором.

• ***Технологическая асимметрия.*** Транзисторы изготавливаются таким образом, чтобы ток базы в прямом направлении был минимально возможным. Это приводит к усилению по току в прямом направлении между 100 и 500 для транзисторов малой мощности (< 1 Вт). Усиление по току в обратном направлении находится между 1 и 10 для дискретных транзисторов малой мощности и даже меньше для интегрированных транзисторов.



$$\begin{cases} i_B = i_{BF} + i_{BR} \\ i_C = i_F - i_R - i_{BR} \\ i_E = i_C + i_B = i_F + i_{BF} - i_R \end{cases}$$

Рис. 17.3. Эквивалентная схема «широких сигналов» NPN-структуры

Пример 17.2.1. Она из моделей SPICE транзистора 2N2222A (ZETEX) определяет $I_S = 30{,}611$ фА, $\beta_F = 220$, $\beta_R = 4$, $N_R = 1{,}005$.

б) Четыре рабочих режима

• ***Общие уравнения токов и напряжений.***

$$i_E = i_C + i_B, \qquad u_{BE} = u_{BC} + u_{CE}.$$

• ***Прямая проводимость или нормальный режим.*** При переходе BE поляризовано в прямом направлении, а переход BC — в обратном, транзистор имеет прямую проводимость. *Гипотеза*:

$$u_{BC} < -3N_RU_T \Rightarrow i_R \approx -I_S.$$

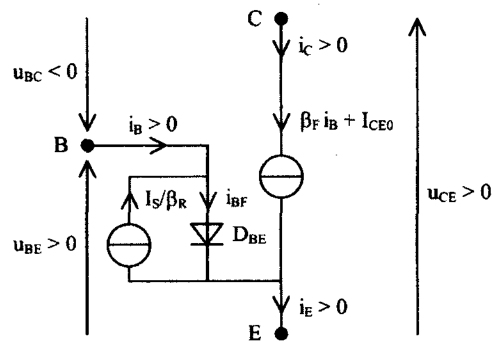
1) При этой гипотезе с током I_{CE0} (ток утечки коллектор-эмиттер со «свободной» базой, т. е. при $i_B = 0$) эквивалентная схема «широких сигналов» при прямой проводимости будет иметь вид рис. 17.4.

Уравнения приобретают вид:

$$\begin{cases} i_B = i_{BF} - \frac{I_S}{\beta_R}, \\ i_C = \beta_F i_B + I_{CE0}, \\ i_E = i_C + i_B, \end{cases}$$

$$\text{где} \quad i_{BF} = \frac{I_S}{\beta_F}\left(e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1\right) \quad \text{и} \quad I_{CE0} = \frac{I_S}{\beta_R}\left(\beta_F + \beta_R + 1\right).$$

Рис. 17.4. Эквивалентная схема «широких сигналов» при прямой проводимости



Примечания.

– Ток I_{CE0} выражается в функции тока I_{CB0} (ток утечки коллектор-база со «свободным» эмиттером, т. е. при $i_E = 0$),

$$I_{CE0} = (\beta_F + 1)I_{CB0},$$

где

$$I_{CB0} = \frac{I_S}{\beta_R(\beta_F+1)}(\beta_F + \beta_R + 1) = \frac{I_S}{\alpha_R}(1 - \alpha_F\alpha_R).$$

– Для $i_B = 0$, $i_C = I_{CE0}$ и

$$U_{BE} = N_F U_T \ln\left(1 + \frac{\beta_F}{\beta_R}\right) \approx N_F U_T \ln\frac{I_{CE0}}{I_S}.$$

Внимание! Определенные по этим формулам значения I_{CE0} и I_{CB0} приблизительны, так как эта модель не учитывает токи утечки и рекомбинации на поверхности и в зоне пространственного заряда со стороны эмиттера. Модель SPISE позволяет учесть эти допущения и некоторые другие. Документация разработчиков приводит максимальные значения.

1) Как только $i_B \gg I_S/\beta_R$ и $\beta_F i_B \gg I_{CE0}$, используется упрощенная эквивалентная схема «широких сигналов» (рис. 17.5).

Уравнения приобретают вид:

$$\begin{cases} i_C = \beta_F i_B, \\ i_E = i_C + i_B = (\beta_F + 1)i_B, \end{cases} \quad \text{где} \quad i_B = \frac{I_S}{\beta_F}\left(e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1\right).$$

2) Эквивалентные схемы «широких сигналов» (рис. 17.4 и 17.5) порождают ту же эквивалентную схему «малых сигналов» (рис. 17.6).

Рассматривая изменения (обозначенные малыми индексами) в окрестностях точки поляризации, получим уравнения:

$$\begin{cases} i_c = \beta_F i_b, \\ i_e = i_c + i_b = (\beta_F + 1)i_b \end{cases} \quad \text{и} \quad r_{be} = \frac{du_{BE}}{di_B} = \frac{u_{be}}{i_b} = \frac{\beta_F N_F U_T}{I_C - I_S/\beta_R} \approx \frac{\beta_F N_F U_T}{I_C}.$$

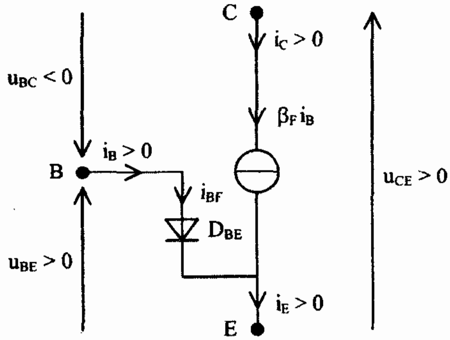


Рис. 17.5. Упрощенная эквивалентная схема «широких сигналов». Прямая проводимость

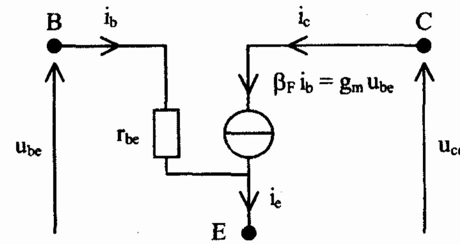


Рис. 17.6. Эквивалентная схема «широких сигналов». Прямая проводимость

Вопрос. Рассчитать сопротивление r_{be} транзистора 2N2222 ($\beta_F = 230$ и $N_F = 1{,}00124$) при 300 K для токов $I_C = 1$ мА затем $I_C = 100$ мА.
Ответ. $r_{be} \approx \frac{5{,}7}{I_C}$ или 5,7 кОм для тока 1 мА и 57 Ом для тока 100 мА.
Примечание. Динамическое сопротивление r_{be} почти обратно пропорционально току поляризации I_C.

Метод

Использование активной динамической проводимости g_m может позволить упростить расчеты.

$$g_m = \frac{di_C}{du_{BE}} = \frac{i_c}{u_{be}} = \frac{\beta_F i_b}{u_{be}} = \frac{\beta_F}{r_{be}} \approx \frac{I_C}{N_F U_T}.$$

• ***Обратная проводимость.*** Когда переход BE поляризован в обратном направлении, а переход BC — в прямом, транзистор проводит в обратном направлении. Эту проводимость обычно не рассматривают, имея в виду асимметрию транзистора.

• ***Запирание.*** Когда два перехода поляризованы в обратном направлении, транзистор заперт. Эквивалентная схема дана на рис. 17.3 при $u_{BE} < 0$ и $u_{BC} < 0$. Токи утечки (коллектор и эмиттер) зависят от качества запирания.

• ***Насыщение.*** Когда два перехода поляризованы в прямом направлении, транзистор насыщен. Эквивалентная схема дана на рис. 17.3 при $u_{BE} > 0$ и $u_{BC} > 0$. Имеем два случая: насыщение в прямом направлении ($u_{BE} > u_{BC}$) и насыщение в обратном направлении ($u_{BE} < u_{BC}$). Последняя ситуация обычно не рассматривается.

Предел между прямым насыщением ($u_{BE} > u_{BC} > 0$) и прямой проводимостью ($u_{BE} > 0$ и $u_{BC} < 0$) дается соотношением $u_{BE} > 0$ и $u_{BC} = 0$ ($\Leftrightarrow u_{BE} = u_{CE}$). Откуда:

$$u_{BC} = 0 \Rightarrow i_{BR} = 0 \Rightarrow i_R = 0 \Rightarrow i_C = i_F = \beta_F i_{BF} = \beta_F i_B.$$

Практически $U_{CE\,\text{нас}} \approx 0{,}2$ В (насыщение в прямом направлении).

• ***Заключение.*** При *прямой проводимости* транзистор используется обычно как усилитель сигнала. При *насыщении в прямом направлении* транзистор играет роль замкнутого прерывателя. И наоборот, в *запертом* состоянии он играет роль разомкнутого прерывателя. *Обратная проводимость* желательна крайне редко. Однако она может произойти, достаточно выполнить условия, возможные только в переходном процессе.

в) Характеристики базовой модели

Основные характеристики базовой модели при $u_{CE} > 0$ и $u_{BE} > 0$ приведены на рис. 17.7.

• ***Выходные характеристики*** $i_C = f(u_{CE})$. Характеристики приведены для различных значений I_B, поддерживаемых постоянными. Штриховой линией показана характеристика $i_C = f(u_{CE})$, для которой $u_{BE} = u_{CE}$ устанавливает границу прямого насыщения прямой проводимости.

- При прямой проводимости $u_{CE} > u_{BE}$ ($\Rightarrow u_{BC} < 0$): транзистор ведет себя между коллектором и эмиттером как управляемый значением i_B (или u_{BE}) источник тока.
- При прямом насыщении $0 < u_{CE} < u_{BE}$ ($\Rightarrow u_{BE} > u_{BC} > 0$): для $I_B = \text{const}$ (или $U_{BE} = \text{const}$) чем сильнее поляризован переход BC в прямом направлении, тем больше насыщается транзистор и тем меньше ток i_C.
- Для $u_{CE} > 0$ и $u_{BE} < 0$ зона запирания находится приблизительно между характеристикой i_C, полученной для $i_B = 0$ ($i_C = I_{CE0}$ при прямой проводимости), и осью $i_C = 0$. Можно получить строго $i_B < 0$ и $u_{BE} > 0$ (ток утечки).

• ***Передаточная характеристика по току*** $i_C = f(i_B)$. Это прямая $i_C = \beta_F i_B$ при прямой проводимости с током утечки около I_{CE0}.

• ***Входная характеристика*** $i_B = f(u_{BE})$. Это уравнение перехода BE при прямой проводимости с током утечки около I_S/β_R.

• ***Передаточная характеристика по напряжению*** $u_{BE} = f(u_{CE})$. Практически не применяется.

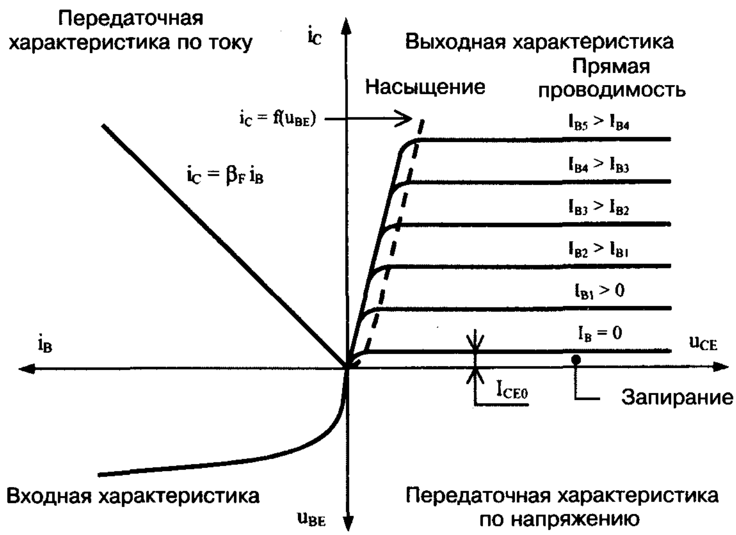


Рис. 17.7. Характеристики базовой модели при $u_{CE} > 0$ и $u_{BE} > 0$

г) Режим коммутации

- ***Классическая схема*** (рис. 17.8).

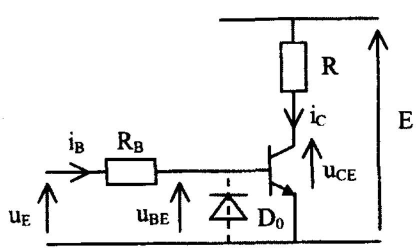


Рис. 17.8. Классическая схема режима коммутации

- ***Два возможных устойчивых состояния*** (рис. 17.9)

1) *Состояние отключения* (Off-State) оценивается током утечки перехода коллектор-эмиттер, который зависит от качества запирания. Строгие условия блокирования:

$$u_{BE} < 0 \quad \text{и} \quad u_{BC} < 0.$$

Внимание! Такое запирание требует отрицательного напряжения между базой и эмиттером. В абсолютных значениях оно не должно превосходить напряжение $U_{EB\,\text{Макс}}$(обычно порядка 4–5 В) из-за опасности пробоя. Во избежание большего превосходства между базой и эмиттером транзистора включается диод D_0 (рис. 17.8).

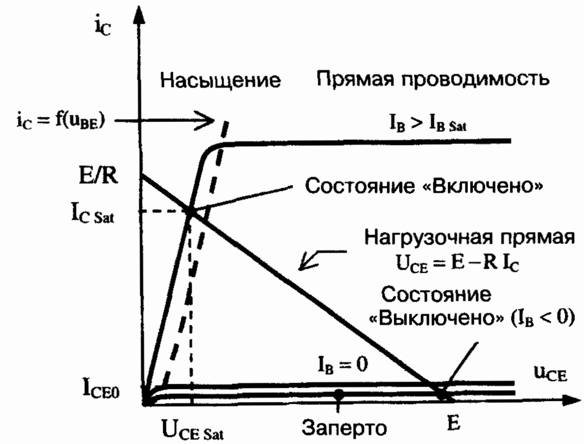


Рис. 17.9. Состояния «Включено» и «Выключено»

Метод

Часто удовлетворяются слабыми положительными или нулевыми значениями u_{BE}. Транзистор не запирается, но имеет слабую прямую проводимость. Если u_{BE} мало, то мал и ток i_B. Внимание, $\beta_F i_B$ может не быть пренебрежимо малым, тем более, что dU_{BE}/dT отрицательно. Следует соблюдать условие: $i_B < 0$.

2) *Состояние включения* (On-State) оценивается напряжением насыщения перехода коллектор-эмиттер U_{CESat}. Транзистор находится в состоянии насыщенной проводимости. Насыщение определяется точкой пересечения (U_{CESat}, I_{CESat}) характеристики $i_C = f(u_{CE})$ для $I_B = I_{BSat}$ и нагрузочной прямой.

Метод

Для гарантированного насыщения следует соблюдать условие:

$$I_B > I_{BSat} = \frac{I_{CSat}}{\beta_{FМин}},$$

где $\beta_{FМин}$ — минимальное усиление в прямом режиме. Для классической схемы (см. рис. 17.8) сопротивление R_B выбирают по соотношению:

$$R_B = \frac{U_{EHMin} - U_{BESat}}{I_B} < \frac{U_{EHMin} - U_{BESat}}{I_{BSat}},$$

где $U_{EH\,Мин}$ — напряжение u_E на минимуме высокого уровня.

Примечания.

- При насыщении соотношение $i_C = \beta_F i_B$ не справедливо.
- Следует убедиться, что схема на рис. 17.8 способствует насыщению транзистора (переходы BE и BC поляризованы в прямом направлении).
- Иногда *коэффициент сверхнасыщения* определяют как $K = I_B/I_{BSat}$.

- ***Мощность рассеяния.***

Таблица 17.1.

1) *Состояние отключения*	2) *Состояние включения*
$P_{откл} \approx EI_{CE0}$ при $i_B = 0$	$P_{вкл} \approx U_{CESat}I_{CSat}$

17.2.2. Ограничения и допущения

а) Влияние температуры

При возрастании температуры увеличиваются значения I_{CE0}, I_S, β, I_C, а U_{BE} уменьшается от 1 до 3 мВ на градус Кельвина, согласно постоянству транзистора и поддерживаемой поляризации. Поведение сходно с имевшим место для диода (см. гл. 16):

$$\frac{dU_{BE}}{dT} \approx -2\ \text{мВ/К}.$$

б) Эффект Эрли. Эффект запаздывания

- ***Эффект Эрли.*** В действительности характеристики $i_C = f(u_{CE})$ транзистора не горизонтальны при прямой проводимости. Они слегка восходящие, как это показано на рис. 17.10 (для очевидности сильно преувеличено). Это происходит вследствие увеличения β_F вместе с напряжением база-коллектор (и таким образом, с напряжением коллектор-эмиттер). Это и есть эффект Эрли, названный по имени первого описавшего этот эффект.

> ***Метод***
> Графическое определение напряжения Эрли. Если продлить характеристики $i_c = f(u_{CE})$ в сторону отрицательных u_{CE}, все они сойдутся в одной точке на отрицательной части оси u_{CE}. Эта точка соответствует напряжению $-U_A$. Значение $+U_A$ называется напряжением Эрли.

- ***Эффект запаздывания («Late»).*** Такой эффект вызывает напряжение база-эмиттер. Его называют обратным эффекту Эрли или эффектом

«Late» (что означает поздний) в отличие от имени открывателя Early (что означает ранний).

• ***Модель «широких сигналов».*** Чтобы предложенная в § 17.2.1, а) модель учитывала оба эти эффекта (проявляющиеся в прямом и обратном направлениях), управляемый генератор тока $I_F - I_R$ (см. рис. 17.3) заменяем на:

$$(I_F - I_R)\left(1 - \frac{u_{BC}}{U_A} - \frac{u_{BE}}{U_B}\right),$$

где U_A — положительное напряжение Эрли, U_B — положительное обратное напряжение Эрли.

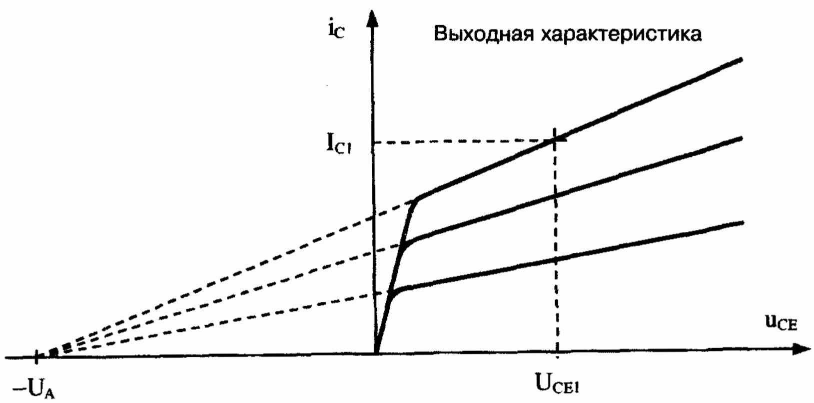


Рис. 17.10. Выходные линеаризованные характеристики. Эффект Эрли

• ***Модель «малых сигналов».*** Эффект Эрли учитывается динамическим сопротивлением r_{ce} (часто обозначается ρ) в эквивалентной схеме «малых сигналов» (рис. 17.11). Несмотря на то, что его можно определить везде, его рассматривают обычно при прямой проводимости.

$$\begin{cases} u_{be} = r_{be} i_b, \\ i_c = \beta_F i_b + \frac{u_{ce}}{r_{ce}}, \\ i_e = i_c + i_b \end{cases} \quad \text{и} \quad r_{ce} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C} = \frac{|U_A| + U_{CE}}{I_{C1}},$$

где (U_{CE1}, I_{C1}) — точка поляризации.

в) Динамический процесс при «широких сигналах»

Динамический процесс учитывается введением емкостей C_{BE} и C_{BC} переходов BE и BC (рис. 17.12). Они подобны емкостям диода. Эти емкости зависят от напряжений на их зажимах.

Из схемы рис. 17.12 можно установить эквивалентную динамическую схему «широких сигналов» для каждого из четырех рабочих режимов. Для прямой проводимости мы находим схему рис. 17.13.

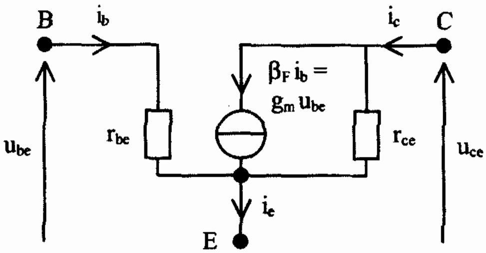


Рис. 17.11. Эквивалентная схема «малых сигналов» при прямой проводимости с эффектом Эрли

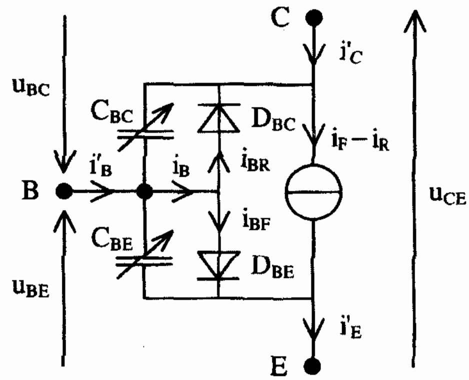


Рис. 17.12. Эквивалентная динамическая схема «широких сигналов»

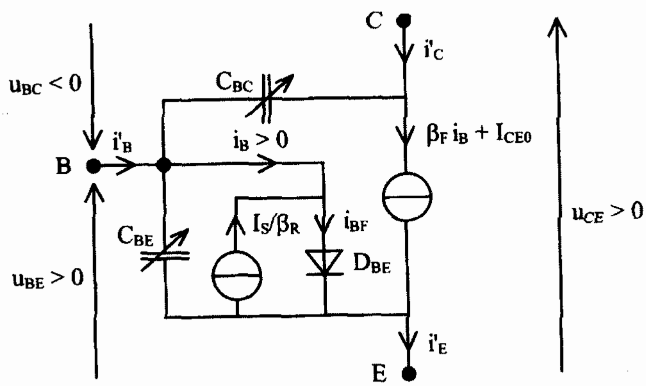


Рис. 17.13. *Эквивалентная* динамическая схема «широких сигналов» при прямой проводимости

г) Коммутационные задержки

Мы рассматриваем коммутируемый транзистор в соответствии с классической схемой (см. рис. 17.8). Диаграмма зависимости в функции времени транзистора при коммутации на активную нагрузку дана на рис. 17.14. Здесь 0% — время запаздывания (*delay time*) от 0% до 10% тока I_{CSat}, t_r — время подъема (*rise time*) тока I_{CSat} от 10% до 90% своего значения, t_s — время накопления (*storage time*) от 100% до 90% I_{CSat}, t_f — время снижения (*fall time*) от 90% до 10% тока I_{CSat}, t_{On} — время перехода к проводимости (*turn-on time*): $t_{On} = t_d + t_r$, а t_{off} — время запирания (*turn-off time*): $t_{off} = t_s + t_f$.

Эти времена зависят от емкостей переходов C_{BE} и C_{BC} (см. рис. 17.12), которые, в свою очередь, зависят от напряжений на их зажимах и от эффекта Миллера во время работы в режиме усилителя. Чтобы снизить время коммутации, следует как можно быстрее осуществить заряд-разряд этих емкостей увеличением токов I_{BH} и I_{BL}. Но в противовес время накопления повышается вместе с током I_{BH} (чем больше транзистор насыщен и чем больше значение t_s). Можно рассматривать два решения.

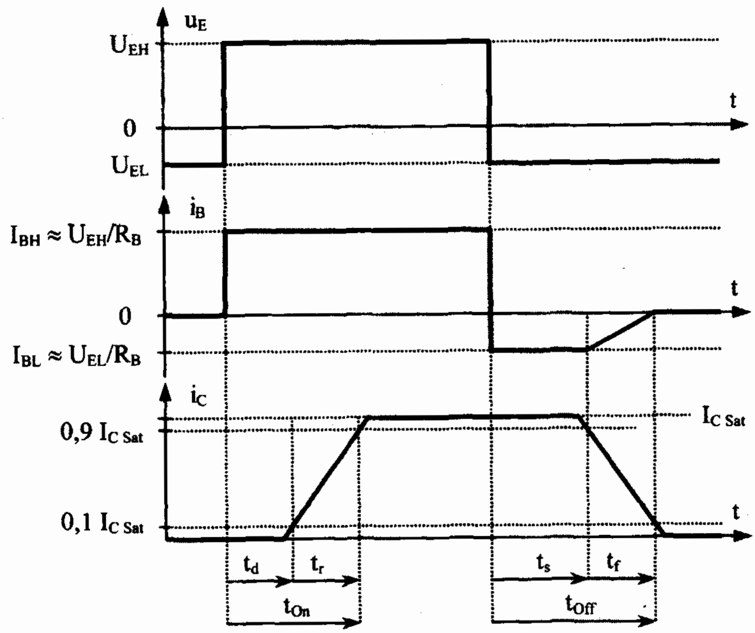


Рис. 17.14. Диаграмма коммутационных задержек

- Увеличить ток заряда-разряда исключительно в течение переходов (рис. 17.15). В этом состоит роль емкости C — ускорение процессов заряда-разряда.
- Устранить значительное насыщение транзистора (рис. 17.16). Для этого используется диод D_2 между базой и коллектором, диод D_1, обеспечивающий переход тока от базы при проводимости, и диод D_3 для запирания.

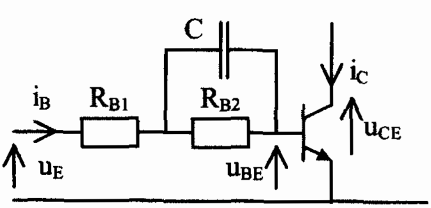


Рис. 17.15. Емкостное ускорение

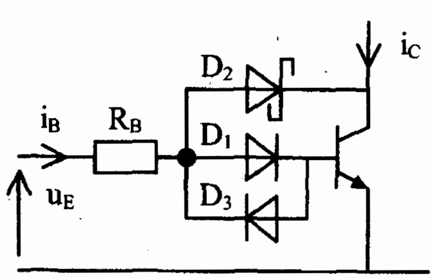


Рис. 17.16. Диод противонасыщения

д) Динамические процессы при «малых сигналах». Эффект Миллера

Динамическая эквивалентная схема «широких сигналов» (см. рис. 17.13) при прямой проводимости порождает эквивалентную динамическую схему «малых сигналов» (рис. 17.17) при прямой проводимости, на которую подключается сопротивление нагрузки R_L. Добавив в схеме рис. 17.17 последовательное базе сопротивление и сопротивление, параллельное емкости C_{bc}, получим так называемую схему Джиаколетто.

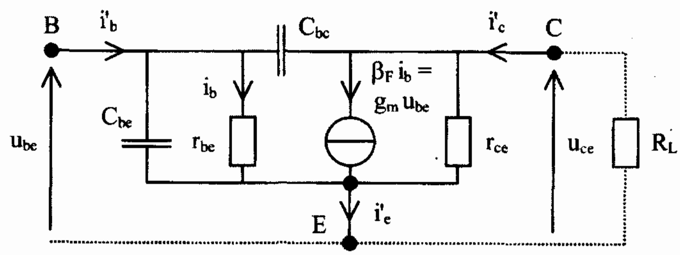


Рис. 17.17. Эквивалентная динамическая схема «малых сигналов». Прямая проводимость

• ***Усиление по комплексному току транзистора.*** Ее обозначаем $\underline{\beta}$, причем:

$$\beta_F \underline{i_b} = g_m \underline{u_{be}} = \underline{\beta}\, \underline{i'_b}.$$

$$\underline{\beta} = \frac{i'_c}{i'_b}\Big|_{u_{ce}=0} \approx \frac{\beta_F}{1 + j\frac{f}{f_\beta}}, \quad \text{где} \quad f_\beta = \frac{1}{2\pi r_{be}(C_{be} + C_{bc})}.$$

При такой аппроксимации это передаточная функция первого порядка, где f_β — *предельная частота усиления* транзистора для — 3 дБ, т. е. частота, при которой $\left|\underline{\beta}\right|$ делится на $\sqrt{2}$. Определяем также *частоту перехода* f_T, для которой $\left|\underline{\beta}\right|$ стремится к 1. Частота перехода дается в технической документации транзисторов. В аппроксимации первого порядка имеем соотношение:

$$f_T = f_\beta \sqrt{\beta_F^2 - 1} \approx \beta_F f_\beta.$$

• ***Вносимая емкость C_{bc} между BE и CE. Эффект Миллера.*** По теореме Миллера схема (рис. 17.17) преобразуется в новую эквивалентную схему (рис. 17.18), где между BE и CE внесена емкость C_{bc}. Здесь A — усиление по напряжению схемы (включая R_L). Получим:

$$\underline{A} = \frac{\underline{u_{ce}}}{\underline{u_{bc}}} = \frac{-Rg_m\left(1 - j\frac{C_{bc}}{g_m}\omega\right)}{1 + jRC_{bc}\omega}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_L} + \frac{1}{r_{ce}}.$$

Для $\omega \ll \frac{1}{RC_{bc}}$ и $\omega \ll \frac{g_m}{C_{bc}}$ усиление становится $A_0 = \frac{\underline{u_{ce}}}{\underline{u_{be}}} = -Rg_m$.

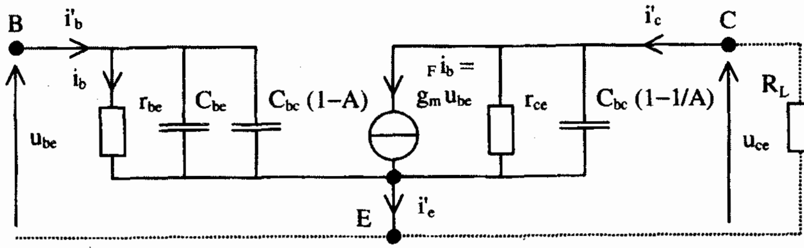


Рис. 17.18. Эквивалентная схема при внесенной между BE и CE емкости C_{bc}

При этих условиях внесенная между BE и CB емкость составит:

$$C_{\mathrm{Millerbc}} = (1 - A_0)C_{bc} = (1 + Rg_m)C_{bc},$$

если $|A_0| \gg 1$, то $C_{\mathrm{Millerbc}} \approx -A_0 C_{bc}$;

$$C_{\mathrm{Millerbc}} = (1 - 1/A_0)C_{bc} = (1 + 1/Rg_m)C_{bc},$$

$|A_0| \gg 1$, то $C_{\mathrm{Millerbc}} \approx C_{bc}$.

Примечание. Емкость между базой и эмиттером (C_{bc}+C_{Millerbe}) настолько важна, что благодаря ей повышается усиление на низких частотах. Она существенно снижает предельную частоту усиления схемы (добавление простого сопротивления последовательно с базой приводит к низкочастотному фильтру первого порядка). Это явление известно под именем *эффекта Миллера.*

17.3. PNP–транзистор

Принимая то же направление токов и напряжений, что и для NPN-транзистора (см. рис. 17.1), все присущее для NPN- по большому счету справедливо и для PNP-транзистора. Однако следует поменять направления диодов эквивалентной схемы и помнить, что для аналогичного функционирования токи и напряжения имеют обратные знаки при переходе от NPN- к PNP-структуре.

17.4. Специальные транзисторы

17.4.1. Схема Дарлингтона

Два транзистора NPN-структуры образуют схему Дарлингтона, когда эмиттер первого соединен с базой второго при соединенных коллекторах (рис. 17.19). Подобным образом схема Дарлингтона реализуется и для PNP-структуры. Вся схема ведет себя как единственный транзистор. Вводя индекс 1 для параметров транзистора T_1, а индекс 2 для параметров транзистора, получим:

$$\begin{cases} \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2 \approx \beta_1\beta_2, \\ I_{CE0} = (1 + \beta_2)I_{CE01} + I_{CE02}, \\ u_{BE} = u_{BE1} + u_{BE2}. \end{cases}$$

Примечания.

- Усиление по току β высокое, и входное сопротивление «малых сигналов» повышенное.
- Повышенный ток утечки I_{CE0}, пониженное выходное сопротивление схемы «малых сигналов», напряжение вдвое больше, чем с одним транзистором.
- Во избежание того же порядка тока утечки I_{CB01} транзистора T_1, что и ток базы транзистора T_2, между базой и эмиттером T_2 добавляют сопротивление. Это отводит часть тока. Это сопротивление позволяет также отводить ток базы T_2 при запирании.
- Для улучшения запирания T_2 добавляют эвакуационный диод (или разрядки) на BE-переход транзистора T_1 (катода на базу и анода на эмиттер).

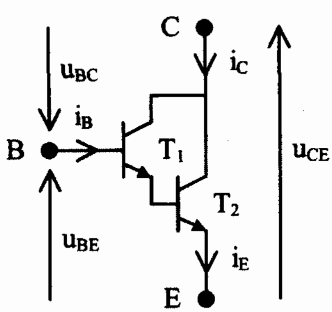


Рис. 17.19. NPN-структура Дарлингтона

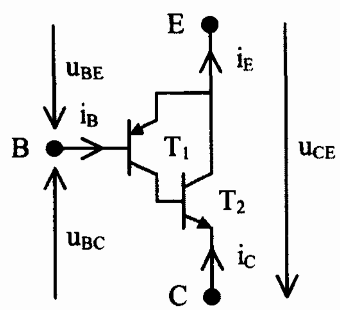


Рис. 17.20. Два дополнительных транзистора — PNP

17.4.2. Два дополнительных транзистора

Объединение PNP-структуры транзистора T_1 с управляемым транзистором NPN-структуры T_2 по большому счету эквивалентно одному транзистору PNP-структуры (рис. 17.20). Выбранные направления токов и напряжений таковы, что i_B, i_C, i_E, u_{BE}, u_{CE} отрицательны. Поменяв ролями T_1 и T_2, подобным же образом реализуется схема, эквивалентная одному транзистору NPN-структуры.

$$\begin{cases} \beta = \beta_1 + \beta_1\beta_2 \approx \beta_1\beta_2, \\ I_{CE0} = (1 + \beta_2)I_{CE01} - I_{CE02} \end{cases}$$

(I_{CE0} и I_{CE01} положительны, I_{CE02} отрицателен).

Примечания.

– Усиление β высокое.
– Ток утечки I_{CE0} высокий.

17.4.3. Транзистор Шоттки

• ***Условное обозначение*** (рис. 17.21). Они распространены в интегральных схемах.

• ***Устройство*** (рис. 17.22). Транзистор Шоттки является биполярным NPN- или PNP-структуры с диодом Шоттки противонасыщения между базой и коллектором, который повышает скорость коммутации транзистора.

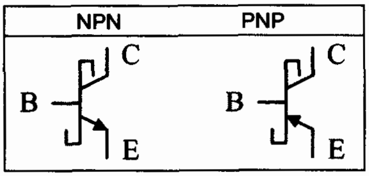


Рис. 17.21. Условное обозначение

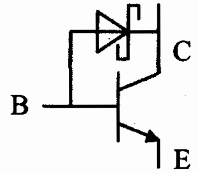


Рис. 17.22. Устройство транзистора Шоттки

ГЛАВА 18

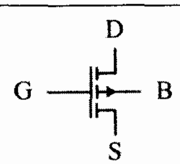
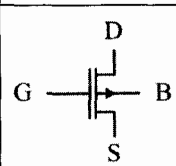
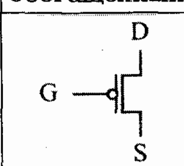
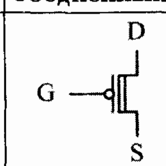
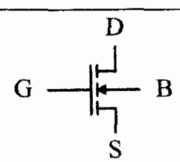
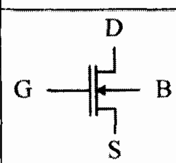
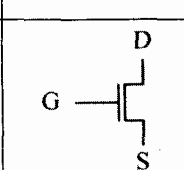
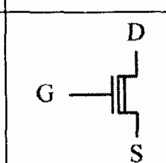
МОП–ТРАНЗИСТОРЫ

18.1. Условные обозначения. Устройство

• ***Условные обозначения*** (табл. 18.1). S — исток, D — сток, G — затвор, B — подложка. Существует четыре типа МОП-транзисторов[1]: полевые N-канальные обогащенные, полевые P-канальные обогащенные, полевые N-канальные обедненные, полевые P-канальные обедненные. Стрелки на подложке (B) показывают проводящее направление переходов подложка – исток (BS) и подложка – сток (BD). Эти переходы должны быть заперты. На упрощенных обозначениях подложки не показаны, предполагается запертое состояние переходов BS и BD.

• ***Устройство.*** Полевые МОП-транзисторы имеют структуру бутерброда: полупроводник, слой окиси (SiO_2), металлизированный (алюминий, кремний поликристаллический) затвор. Такая структура позволяет полевыми эффектами контролировать ток в канале между истоком и стоком, подавая напряжение между затвором (D) и истоком. *Подложка* подсоединена таким образом, что переходы подложка – затвор и подложка – исток заперты. В полевых МОП-транзисторах проводимость обеспечивается только одним типом носителей: электроны N-канала и дырки P-канала.

Таблица 18.1. Условные обозначения

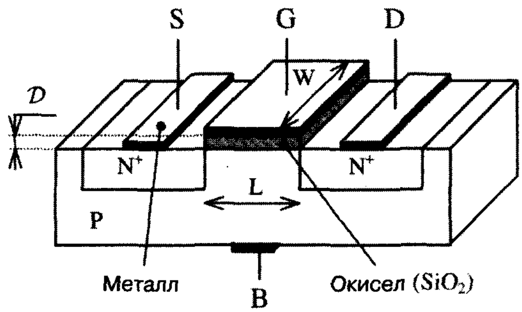
	Обозначения по ИИЭР[2]		**Упрощенное обозначение**	
	обогащенный	**обедненный**	**обогащенный**	**обедненный**
Канал P				
Канал N				

[1]МОП — структура металл-окисел-полупроводник. — *Прим. перев.*

18.2. N-канальный обогащенный полевой транзистор

• ***Структура*** (рис. 18.1). Между истоком и стоком канал длиной L, шириной W покрыт тонким слоем окиси кремния толщиной D с диэлектрической проницаемостью ε, согласно технологии D составляет от 4 нм до 100 нм. Отношение W/L называется геометрическим коэффициентом или коэффициентом формы транзистора.

Рис. 18.1. Структура N-канального обогащенного МОП-транзистора



18.2.1. Основная модель

Исток и сток могут поменяться местами. Следовательно, случай $u_{DS} < 0$ прямо вытекает из случая $u_{DS} > 0$.

а) Уравнения

• ***Три рабочих режима.*** ($u_{GS} \geqslant 0$ и $u_{DS} \geqslant 0$). Пороговое напряжение N-канального МОП-транзистора обозначается $U_{Th\,N}$.

1. Запирание: $u_{GS} \leqslant U_{Th\,N}$

$$i_{DS} = 0.$$

2. Ненасыщенная проводимость: $u_{GS} \geqslant U_{Th\,N} \geqslant 0$ и $u_{DS} \leqslant u_{DS\,отс}$.

$$i_{DS} = \beta_N \left[(u_{DS} - U_{Th\,N}) u_{DS} - \frac{u_{DS}^2}{2} \right].$$

Квадратное выражение относительно u_{DS} .

3. Насыщенная проводимость: $u_{GS} \geqslant U_{Th\,N} \geqslant 0$ и $u_{DS} \geqslant u_{DS\,отс}$.

$$i_{DS} = \frac{\beta_N}{2} (u_{GS} - U_{Th\,N})^2.$$

Идеальный источник тока, управляемый напряжением u_{GS}.

[2]ИИЭР — Институт инженеров по электротехнике и радиоэлектронике США. — *Прим. перев.*

• ***Граница между насыщенной и ненасыщенной проводимостями.*** Напряжением и током отсечки канала являются:

$$u_{DS\,\text{отс}} = u_{GS} - U_{Th\,N} \Rightarrow i_{DS\,\text{отс}} = \frac{\beta_N}{2} u^2_{DS\,\text{отс}}.$$

• ***Переходная проводимость*** $\beta_N(A/B^2)$ и $K_N(A/B^2)$. μ_N — подвижность свободных электронов, C_{OX} — емкость затвора на единицу поверхности (см. рис. 18.1). Для обычной присадки $\mu_N \approx 670$ см^2/В · с.

$$\beta_N = \mu_N C_{OX} \frac{W}{L}, \quad K_N = \mu_N C_{OX}, \quad C_{OX} = \frac{\varepsilon}{D}.$$

Пример 18.2.1. Одна из моделей SPICE полевого МОП-транзистора BS170 (ZETEX) определяет $\beta_N = 0{,}1233$ и $U_{Th} = 1{,}824$ В для $U_{SB} = 0$ В.

б) Характеристики

• ***Переходная характеристика*** $i_{DS} = f(u_{GS})$ при $U_{DS} = \text{const}$ (рис. 18.2).

1. Запирание: $u_{GS} \leqslant U_{Th\,N} \Rightarrow i_{DS} = 0$.
2. Ненасыщенная проводимость: $u_{GS} \geqslant U_{DS} + U_{Th\,N} \Rightarrow i_{DS}$ пропорционален u_{GS}.
3. Насыщенная проводимость: $U_{Th\,N} \leqslant u_{GS} \leqslant U_{DS} + U_{Th\,N}$. $\Rightarrow i_{DS}$ в квадратичной зависимости от u_{GS}.

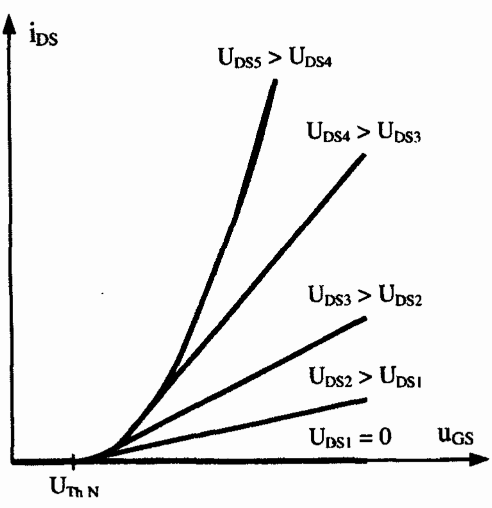


Рис. 18.2. Переходная характеристика базовой модели

• ***Выходная характеристика*** $i_{DS} = f(u_{DS})$ при $U_{GS} = \text{const}$ (рис. 18.3).

1. Ненасыщенная проводимость: $u_{DS} \leqslant U_{GS} - U_{Th\,N}$. $\Rightarrow i_{DS}$ в квадратичной зависимости от u_{DS}.

2. Насыщенная проводимость: $u_{DS} \geqslant U_{GS} - U_{Th\,N}$, ток i_{DS} пропорционален u_{DS}. $\Rightarrow$ i_{DS} находится в квадратичной зависимости от u_{GS}.

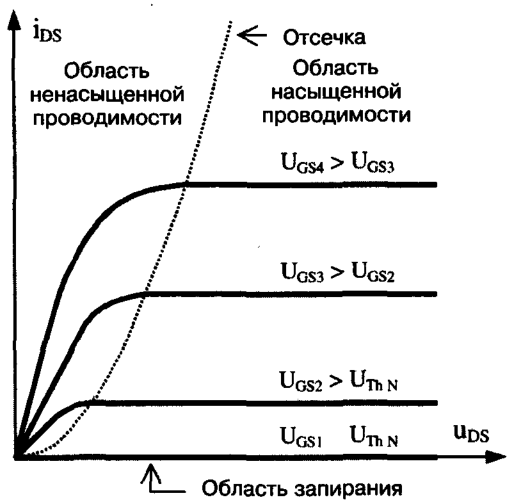


Рис. 18.3. Выходная характеристика базовой модели

в) Эквивалентные схемы

• ***Эквивалентная схема для широких сигналов*** (рис. 18.4 и 18.5). Схема управляемого сопротивления делает очевидным превалирование резистивного характера при ненасыщенной проводимости.

$$i_{DS} = f_I(u_{GS}, u_{DS})$$

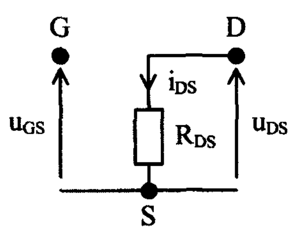


Рис. 18.4. Управляемый источник тока

$$R_{DS} = \frac{u_{DS}}{i_{DS}} = f_R(u_{GS}, u_{DS})$$

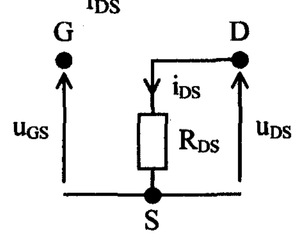


Рис. 18.5. Управляемое сопротивление

• ***Эквивалентная схема для малых сигналов*** (рис. 18.6). Ток i_{DS} зависит от напряжений u_{GS} и u_{DS} (предполагается $U_{Th\,N} = \mathrm{const}$). Отсюда

$$di_{DS} = \frac{\partial i_{DS}}{\partial u_{GS}} du_{GS} + \frac{\partial i_{DS}}{\partial u_{DS}} du_{DS}.$$

Обозначая i_{ds}, u_{gs} и u_{ds} вместо diu_{DS}, запишем проще:

$$i_{ds} = g_m u_{gs} + g_{ds} u_s,$$

где

$$g_m = \frac{i_{ds}}{u_{gs}}\Big|_{u_{ds}=0} = \frac{\partial i_{DS}}{\partial u_{GS}} = \frac{di_{DS}}{du_{GS}}\Big|_{u_{DS}=U_{DS}=const}$$

с единицами измерения См = А/В;

$$g_{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{i_{ds}}{u_{ds}}\Big|_{u_{ds}=0} = \frac{\partial i_{DS}}{\partial u_{DS}} = \frac{di_{DS}}{du_{DS}}\Big|_{u_{GS}=U_{GS}=const}$$

с единицами измерения См = А/В.

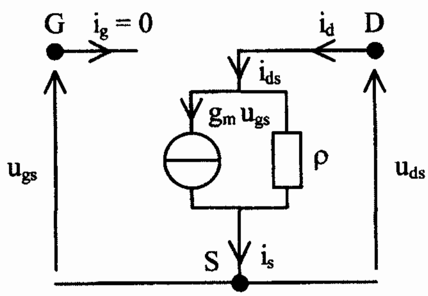


Рис. 18.6. Эквивалентная схема для малых сигналов

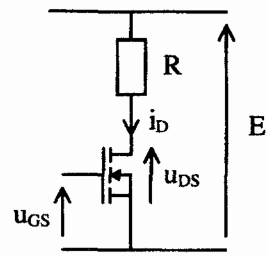


Рис. 18.7. Основная схема

1) **Ненасыщенная проводимость**	$g_m = \beta_N U_{DS}$	$g_{ds} = \beta_N(U_{GS} - U_{Th\,N} - U_{DS})$
2) **Насыщенная проводимость**	$g_m = \beta_N(U_{GS} - U_{Th\,N})$	$g_{ds} = 0$

Примечание. Определяемые по этим формулам значения g_m отличаются от действительных значений при повышении напряжения поляризации, так как эта модель не учитывает ни последовательные сопротивления в цепях затвора и истока, ни эффект, подобный эффекту Эрли (см. § 18.2.2).

г) Режим переменного сопротивления

Чтобы полевой МОП-транзистор вел себя как управляемое напряжением u_{GS} переменное сопротивление между затвором и истоком (R_{DS}), нужно, чтобы он находился в ненасыщенном состоянии (см. рис. 18.3 и 18.5). Кроме того, чтобы R_{DS} было почти независимым от u_{DS}, нужно:

$$u_{DS} \ll 2(u_{GS} - U_{Th\,N}) \Rightarrow R_{DS} \approx \frac{1}{\beta_N(u_{GS} - U_{Th\,N})}.$$

д) Режим коммутатора

- ***Основная схема*** (рис. 18.7).

- ***Два возможных продолжительных состояния*** представлены на рис. 18.8 и в табл. 18.2.

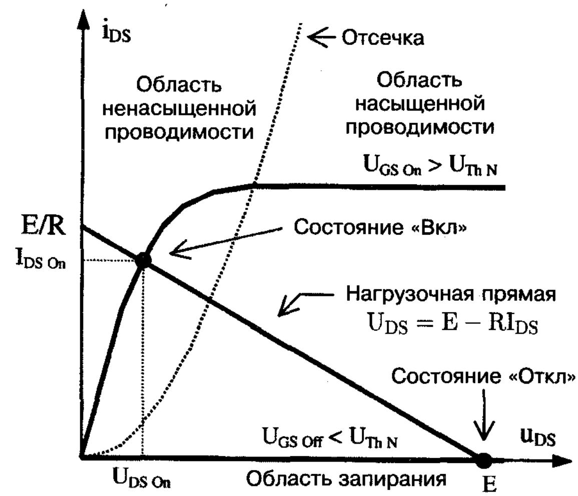
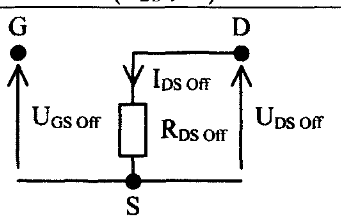
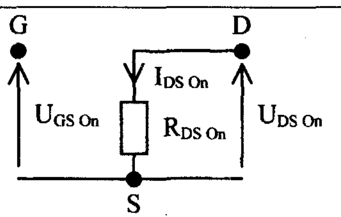


Рис. 18.8. Состояния «Вкл» и «Откл»

Таблица 18.2. Непрерывные состояния

	Продолжит. состояние ($U_{DS} \geqslant 0$)	**Основная модель**
Состояние отключения (Off-State)		N-канальный МОП заперт. $R_{DS\,Off} = +\infty$
Состояние отключения (On-State)		N-канальный МОП в состоянии ненасыщенной проводимости. Если $U_{DSOn} \ll 2(U_{GSOn} - U_{Th\,N})$, то $R_{DSOn} \approx \frac{1}{\beta_N(U_{GSOn} - U_{ThN})}$

Состояние отключения (Off-State) характеризуется сопротивлением отключения R_{DSOff}. Из-за неточности $U_{Th\,N}$ и отрицательности отношения $U_{Th\,N}/dT$ значение U_{GSOff} выбирается меньшим $U_{Th\,N\text{мин}}$. Например, $U_{GS\,Off} \approx 0$ для N-канального МОП-транзистора с обогащением.

Состояние включения (On-State) характеризуется сопротивлением включения R_{DSOn}. Отсечка разделяет области ненасыщенной и насыщенной проводимостей (см. рис. 18.8). Для получения ненасыщенной проводимости нужно приложить такое напряжение управления $U_{GS\,On}$, чтобы оказаться в области ненасыщенной проводимости.

$$U_{GSOn} > \sqrt{\frac{2I_{DS\,On\,Max}}{\beta_{N\,Min}}} + U_{Th\,N\,Max}.$$

Примечание. Каталоги предоставляют необходимые характеристики для выбора $U_{GS\,On}$ для худшего случая ($I_{DS\,On\,Макс}$, наибольшая температура и т. д.).

Внимание! Понятие насыщенной проводимости для полевого МОП-транзистора и биполярного не одно и то же. Насыщенная проводимость в случае полевого МОП-транзистора соответствует ограничению тока i_{DS}.

• ***Мощность рассеяния в продолжительном состоянии.***

Таблица 18.3.

1) Состояние отключения	2) Состояние включения
$P_{Off} = U_{DS\,Off} I_{DS\,Off} \approx 0$	$P_{On} = U_{DSOn} I_{DSOn} = R_{DSOn} I^2_{DSOn}$

e) Соединение двух полевых МОП-транзисторов

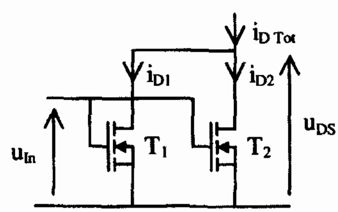


Рис. 18.9. Параллельное соединение

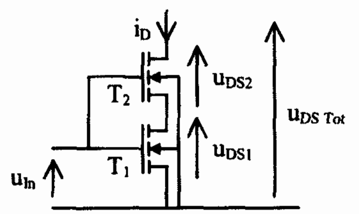


Рис. 18.10. Последовательное соединение

• ***Параллельное соединение двух N-канальных полевых МОП-транзисторов*** (рис. 18.9). Параллельное включение двух идентичных полевых МОП-транзисторов (одинаковые β_N и $U_{Th\,N}$), т. е. соединены затворы, эквивалентно одному транзистору с переходной проводимостью $2\beta_N$. Этот результат обобщается на q параллельно соединенных транзисторов.

• ***Последовательное соединение двух N-канальных полевых МОП-транзисторов*** (рис. 18.10). Последовательное включение двух идентичных полевых МОП-транзисторов (одинаковые β_N и $U_{Th\,N}$), т. е. соединены затворы, эквивалентно одному транзистору с переходной проводимостью $\beta_N/2$. Этот результат обобщается на q последовательно соединенных транзисторов.

Примечание. Напряжение u_{DSTot} не распределяется равномерно между u_{DS1} и u_{DS2}. Транзистор T_1 никогда не находится в состоянии насыщенной проводимости, тогда как T_2 может иметь как насыщенную, так и ненасыщенную проводимость.

$$u_{DS1} = (u_{In} - U_{Th\,N})\left[1 - \sqrt{1 - \frac{i_D}{2i_{D\,отс}}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant (u_{In} - U_{Th\,N})\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \approx 0{,}3(u_{In} - U_{Th\,N}),$$

$$u_{DS} = u_{DSTot} - u_{DS1}.$$

18.2.2. Ограничения и допущения

а) Эффект подложки

Пороговое напряжение $U_{Th\,N}$ N-канального полевого транзистора зависит от напряжения подложка – исток U_{BS}.

б) Температурные свойства

– С повышением температуры $U_{Th\,N}$ уменьшается.

$$\frac{dU_{Th\,N}}{dT} \approx -1 \text{ мВ/К и до } -7 \text{ мВ/К}.$$

– Если i_{DS} достаточно большое, то $di_{DS}/dT < 0$. Именно это свойство упрощает параллельное включение двух полевых МОП-транзисторов.

в) Модель Шихмана – Ходжеса

• ***Три рабочих режима.*** Среди множества существующих при моделировании SPICE МОП-транзисторов наиболее простой является модель Шихмана – Ходжеса. Чтобы учитывать небольшое повышение i_{DS} с u_{DS} (эффект, подобный эффекту Эрли), эта модель предлагает ввести в уравнения параметр модуляции длины канала λ.

1. Запирание: $u_{GS} \leqslant U_{Th\,N} i_{DS} = 0$.
2. Ненасыщенная проводимость: $u_{GS} \geqslant U_{Th\,N} \geqslant 0$ и $u_{DS} \leqslant u_{DS\,отс}$.

$$i_{DS} = \delta_N(1 + \lambda u_{DS})\left[(u_{GS} - U_{Th\,N})u_{DS} - \frac{u_{DS}^2}{2}\right]$$

3. Насыщенная проводимость: $u_{GS} \geqslant U_{Th\,N} \geqslant 0$ и $u_{DS} \geqslant u_{DS\,отс}$.

$$i_{DS} = \frac{\beta_N}{2}(1 + \lambda u_{DS})(u_{GS} - U_{Th\,N})^2$$

• ***Граница между насыщенной и ненасыщенной проводимостями.***

$$u_{DS\,отс} = u_{GS} - U_{Th\,N} \Rightarrow i_{DS\,отс} = \frac{\beta_N}{2}(1 + \lambda u_{DS\,отс})u_{DS\,отс}^2.$$

• ***Выходные характеристики*** $i_{DS} = f(u_{DS})$ при $U_{GS} = \text{const}$ (рис. 18.11). Слабое увеличение i_{DS} с u_{DS} в области насыщенной проводимости сделано сознательно.

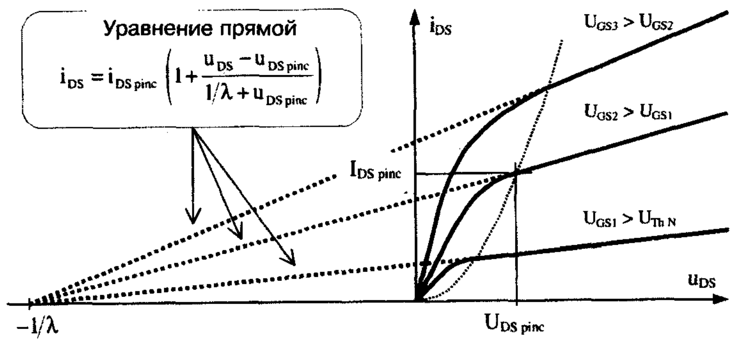


Рис. 18.11. Выходные характеристики модели Шихмана–Ходжеса

• ***Параметры эквивалентной схемы для малых сигналов.***

Таблица 18.4.

1) Ненасыщенная проводимость	2) Насыщенная проводимость
$g_m = \delta_N(1 + \lambda U_{DS})U_{DS}$	$g_m = \delta_N(1 + \lambda U_{DS})(U_{GS} - U_{Th\,N})$
$g_{ds} = \delta_N(U_{GS} - U_{Th\,N} - U_{DS} + 2\lambda U_{DS} \times$ $\times (U_{GS} - U_{Th\,N} - 3U_{DS}/4))$	$g_{ds} = \frac{\beta_N}{2}\lambda(U_{GS} - U_{Th\,N})^2$

• ***Динамические процессы при широких сигналах.***

– Принятые условные направления токов и напряжений уточняются (рис. 18.12).

– Ток затвор–исток i_{DS} определен ранее приводимыми моделями (основной, Шихмана–Ходжеса и другими, более развитыми).

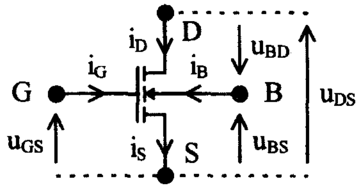


Рис. 18.12. Направления токов и напряжений

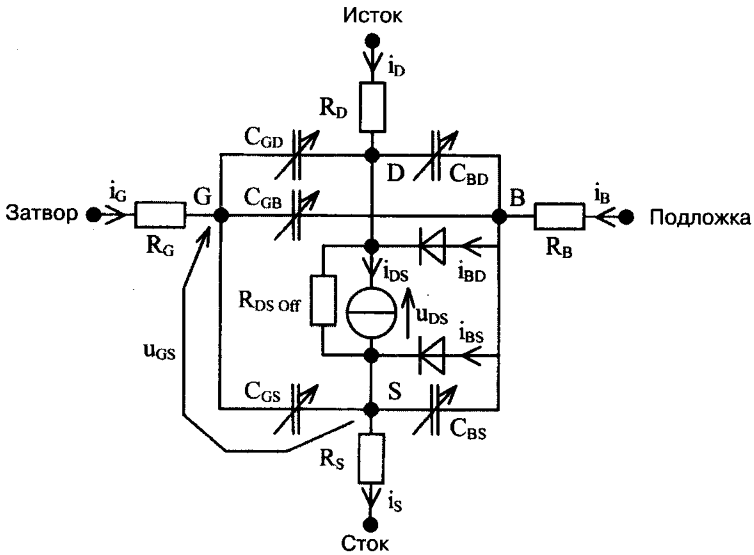


Рис. 18.13. Полная эквивалентная схема для широких сигналов

• ***Полная динамическая эквивалентная схема для широких сигналов*** (рис. 18.13). Здесь R_G, R_D, R_B и R_S — последовательные сопротивления затвора, стока, подложки и истока; $R_{DS\,Off}$ — сопротивление отключения сток–исток; C_{GB} — емкость затвор–подложка, обусловленная самой МОП-структурой; C_{GD} и C_{GS} — емкости затвор–сток и затвор–исток, обусловленные частичным перекрытием затвора на сток и затвора на исток; C_{BD} и C_{BS} — емкости подложка–сток и подложка–исток, обусловленные переходами подложка–сток и подложка–исток, представленные двумя диодами.

• ***Упрощенная динамическая эквивалентная схема для широких сигналов*** при $U_{BS} = 0$ (рис. 18.14). Мы рассматриваем соединение истока и подложки, т. е. $U_{BS} = 0$; последовательные сопротивления в цепях стока, истока и подложки равны нулю; сопротивление отключения сток–исток равно бесконечности.

Примечания.

– Обозначают $C_{ISS} = \Gamma_{GS} + \Gamma_{GD}$ — входная емкость. Эта емкость изменяется совместно с потенциалом затвора.
– Емкости зависят от напряжений на их зажимах.
– Токи подложка–сток i_{BD} и подложка–исток i_{BS} определяются из уравнений переходов. Эти *диоды-паразиты* представляют переходы структуры.

– Эквивалентные динамические схемы для медленно меняющихся широких сигналов в продолжительном режиме получаются из предшествующих эквивалентных схем удалением конденсаторов.

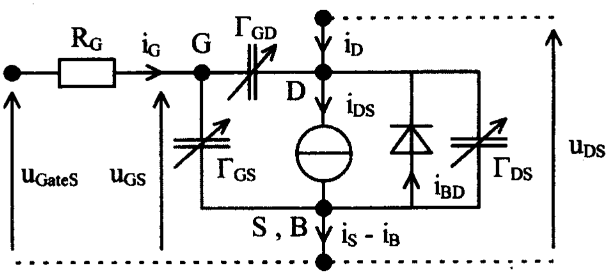


Рис. 18.14. Упрощенная эквивалентная схема для широких сигналов при $U_{BS} = 0$. Здесь: Γ_{GS} — полная емкость между затвором и истоком; Γ_{GD} — полная емкость между затвором и стоком; Γ_{DS} — полная емкость между стоком и истоком; R_G — последовательное сопротивление в цепи затвора (часто не учитываемое)

Пример 18.2.2. Одна из моделей SPICE транзистора BS170 (ZETEX) при одинаковом потенциале истока и подложки оговаривает: $\beta_N = 0{,}1233$, $U_{Th\,N} = 1{,}824$ В, $I_S = 1$ фА, $\lambda = 0$, $R_S = 1{,}572$ Ом, $R_D = 1{,}436$ Ом, $C_{GS} = 28$ пФ, $C_{GD} = 3$ пФ, $C_{BD} = 35$ пФ. Емкости приведены при нулевом напряжении поляризации. Эта модель дополняется включением между стоком и истоком блокированного при нормальной поляризации диода.

д) Запаздывание коммутации

Рассматривается коммутация транзистора в основной схеме (см. рис. 18.7). Для транзистора, коммутирующего резистивную нагрузку при оговоренных условиях, получаем временну́ю диаграмму рис. 18.15.

Примечание. Эти времена определяются емкостями эквивалентной схемы (рис. 18.13 или 18.14). Быстрая коммутация полевого транзистора получается при сильном токе затвора, а медленная коммутация получается при его захвате.

е) Динамический процесс при малых сигналах

Упрощенная динамическая эквивалентная схема для малых сигналов при $U_{BS} = 0$ (рис. 18.16) получена из упрощенной эквивалентной схемы, изображенной на рис. 18.14, при условии равенства нулю сопротивления затвора, идеальный диод поляризован в обратном направлении.

Определение g_m и ρ см. § 18.2.1, в. Емкости зависят также от рабочей точки. Конструкторская документация приводит следующие измеренные емкости при общем истоке ($U_{GS} = 0$) обычно при $f = 1$ МГц для различных значений U_{DS}. $C_{iss} = \Gamma_{gs} + \Gamma_{gd}$ (при $u_{ds} = 0$ В) — входная емкость,

$C_{oss} = \Gamma_{ds} + \Gamma_{gd}$ (при $u_{gs} = 0$ В) — выходная емкость и $C_{rss} = \Gamma_{gd}$ — обратная переходная емкость.

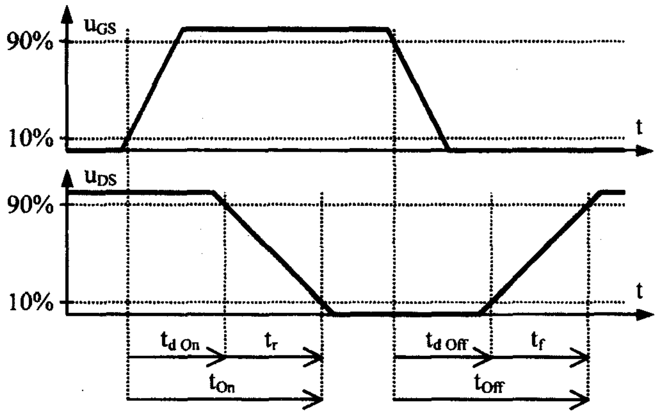
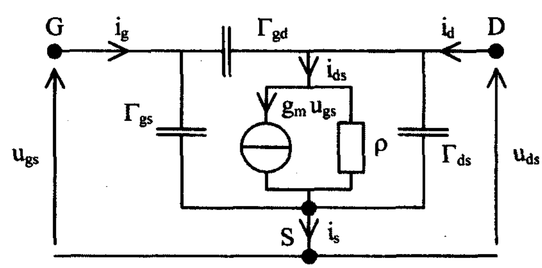


Рис. 18.15. Запаздывание коммутации Здесь t_{dOn} — запаздывание проводимости (Turn-On Delay Time); t_r — время нарастания (*Rise Time*) тока i_{DS}; t_{dOff} — запаздывание запирания (Turn-Off Delay Time); t_f — время спадания (*Fall Time*) тока i_{DS}; t_{On} — время включения (turn-on time) и t_{Off} — время запирания (turn-off time)

Рис. 18.16. Упрощенная эквивалентная схема для малых сигналов при $U_{BS} = 0$



Пример 18.2.3. Конструкторская документация полевого транзистора BS 170 определяет типовые значения $C_{iss} = 24$ пФ, $C_{oss} = 17$ пФ, $C_{rss} = 7$ пФ.

Примечание. Емкость Γ_{gd} лежит в основе эффекта Миллера, как и в случае биполярного транзистора (см. гл. 17).

18.3. Р-канальный обогащенный полевой транзистор

18.3.1. Основная модель

Его структура похожа на структуру N-канального обогащенного полевого МОП-транзистора, зоны N заменяются на зоны P и наоборот.

• ***Три рабочих режима.***

1. Запирание: $u_{GS} \geqslant U_{Th\,P} i_{DS} = 0$.
2. Ненасыщенная проводимость: $u_{GS} \leqslant U_{Th\,P} \geqslant 0$ и $u_{DS} \geqslant u_{DS\,отс}$.
$$-i_{DS} = \delta_P \left[(u_{GS} - U_{Th\,P}) u_{DS} - \frac{u_{DS}^2}{2} \right].$$
Квадратичное выражение по отношению к u_{DS}.
3. Насыщенная проводимость: $u_{GS} \leqslant U_{Th\,P} \leqslant 0$ и $u_{DS} \leqslant u_{DS\,отс}$;
$$-i_{DS} = \frac{\beta_P}{2} (u_{GS} - U_{Th\,P})^2.$$
$$i_{DS} = \frac{\beta_N}{2} (1 + \lambda u_{DS})(u_{GS} - U_{Th\,N})^2.$$
Идеальный источник тока, управляемый u_{GS}.

> ***Метод***
> Для заданного режима напряжения (U_{GS}, U_{DS}, U_{BS}, U_{BD}, $U_{Th\,P}$) и токи (i_D, i_S, i_G, I_B, i_{DS}) P-канального обогащенного МОП-транзистора имеют обратные знаки по сравнению с N-канальными обогащенными МОП-транзисторами.

• ***Граница между насыщенной и ненасыщенной проводимостями.***
$$u_{DS\,отс} = u_{GS} - U_{Th\,P} \Rightarrow -i_{DS\,отс} = \frac{\beta_P}{2} u_{DS\,отс}^2.$$

• ***Переходная проводимость*** $\beta_P (А/В^2)$ и $K_P (А/В^2)$. μ_P — подвижность дырок, C_{OX} — емкость затвора на единицу поверхности (рис. 18.1). Для обычной присадки $\mu_P \approx 250$ см^2/В · с. Поскольку μ_P почти в 2,5 раза меньше, чем μ_N, быстродействие P-канального МОП-транзистора меньше подобного ему N-канального транзистора той же геометрии и идентичного уровня присадок.
$$\beta_P = \mu_P C_{OX} \frac{W}{L}, \quad K_P = \mu_P C_{OX}, \quad C_{OX} = \frac{\varepsilon}{D}.$$

• ***Характеристики. Эквивалентная схема.*** Характеристики P-канального МОП-транзистора подобны характеристикам N-канального (см. § 18.2.1, б) в абсолютных величинах. Для знаков следует i_{DS}, u_{GS}, u_{DS} заменить на $-i_{DS}$, $-u_{GS}$, $-u_{DS}$ соответственно. Приведенные эквивалентные схемы (см. § 18.2.1, в) остаются справедливыми.

18.3.2. Ограничения и допущения

- Эффект подложки подобен N-канальному МОП.
- Температурные явления подобны N-канальному МОП.

$$dU_{Th\,P}/dT \approx +1 \text{ мВ/К до } + \ 7\text{мВ/К}.$$

- Модель Шихмана–Ходжеса: приводимые для N-канального обогащенного МОП-транзистора уравнения (см. § 18.2.2, в) применимы подобно базовой модели, учитывая, что λ положительно.
- В динамических режимах эквивалентные схемы для широких и малых сигналов, приводимые выше для N-канального обогащенного МОП-транзистора, остаются действительными за исключением диодов (переход подложка–сток), которые нужно включить в обратном направлении. Учитывая принятые направления, напряжения u_{GS} и u_{DS} и ток i_D в нормальном режиме отрицательные.

18.4. Обедненный полевой МОП-транзистор

Структура N-канального (соответственно P-канального) обедненного полевого МОП-транзистора подобна структурной схеме N-канального (соответственно P-канального) обогащенного транзистора. Основная разница состоит в том, что канал N (соответственно P) является проводником в отсутствие напряжения u_{GS}, благодаря ионной имплантации в зону канала атомов доноров (соответственно акцепторов). Чтобы уменьшить проводимость, нужно сузить канал на обеднение носителей, что получается, путем вытеснения электронов (соответственно дырок), прикладывая отрицательное (соответственно положительное) напряжение u_{GS}. Для некоторого значения напряжения u_{GS}, называемого пороговым, проводимость прерывается. У полевого МОП-транзистора для обедненного канала N пороговое напряжение отрицательно, а для канала P — положительно.

• ***Сравнительные характеристики*** $i_{DS} = f(u_{GS})$ четырех типов полевых МОП-транзисторов (рис. 18.17). Характеристики приведены для заданного значения напряжения $U_{DS} = \text{const}$.

- При $u_{GS} = 0$ обедненные полевые МОП-транзисторы проводят, тогда как обогащенные заперты.
- При $u_{GS} > 0$ обедненный N-МОП работает на обогащение. А для $u_{GS} < 0$ обедненный P-МОП работает на обогащение.

• ***Модели обедненного N- или P-канального полевого МОП-транзистора.*** Приводимые модели для обогащенных N-МОП и P-МОП остаются справедливыми. Отличаются только пороговые напряжения: отрицательные у обедненного N-МОП и положительные у обедненного P-МОП.

• ***Эквивалентные схемы обедненных N- или P-канальных полевых МОП-транзисторов.*** Они остаются такими же, как и у обогащенных МОП-транзисторов.

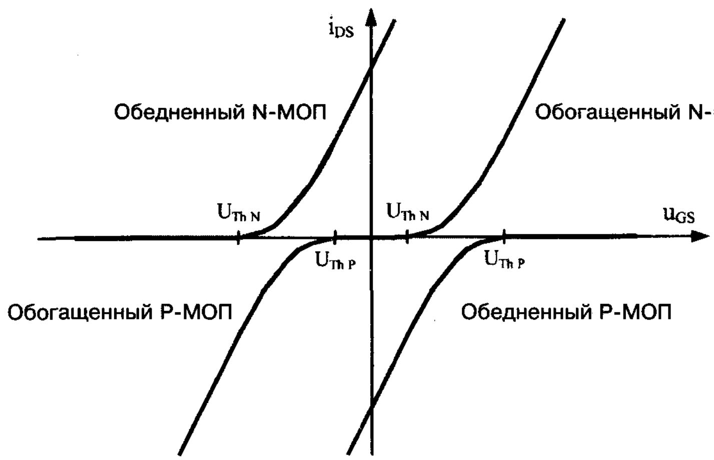


Рис. 18.17. Сравнение четырех типов полевых МОП-транзисторов

18.5. Логический уровень полевого транзистора

Для него достаточно напряжения затвор–исток 5 В, чтобы он стал хорошим проводником, тогда как у обычного полевого МОП-транзистора уровень этого напряжения составляет 10 В. Использование логического уровня может позволить упростить интерфейс управления. Он не приспособлен для аналоговых устройств.

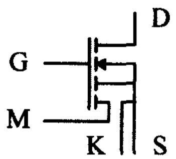
18.6. Полевой МОП-транзистор для измерения тока

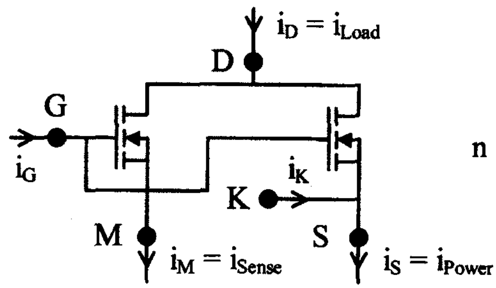
Мощный полевой МОП-транзистор представляет собой интегральную схему, содержащую несколько тысяч малых идентичных транзисторов, соединенных параллельно. Достаточно разделить истоки на две группы, чтобы получить полевой МОП-транзистор для измерения тока. Отношение числа транзисторов в одной группе к числу транзисторов в другой группе соответствует отношению токов i_S/i_M.

• ***Обозначение*** (рис. 18.18). D — сток, G — затвор, K — кельвин, M — измерение, S — исток.

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 18.19).

$$n = \left.\frac{i_S}{i_M}\right|_{U_{MK}=0}.$$





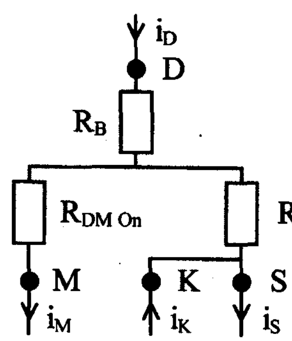
$$n = \left.\frac{i_S}{i_M}\right| \text{à } U_{MK} = 0$$

Рис. 18.18. Обозначение

Рис. 18.19. Эквивалентная схема

• ***Резистивная модель измерителя тока во включенном состоянии*** (рис. 18.20). Порядок величин: $n \approx 1500 \Rightarrow R_{Aвкл} \ll R_{DMвкл}$. R_B — сопротивление сток-общая подложка, $R_{DMвкл}$ — сопротивление сток-измерение в состоянии подключения, $R_{Aвкл}$ — активное сопротивление (сторона мощности) в состоянии подключения.

Рис. 18.20. Модель измерителя тока во включенном состоянии



$$R_{DM\,On} = n\,R_{A\,On}$$

• ***Допущения.***

– Отношение токов n изменяется в функции напряжения затвор-исток.

– Сопротивление $R_{DMвкл}$ изменяется в функции температуры:

$$R_{DMвкл} = R_{DMвкл}(25^\circ C)e^{a(\theta-25)}, \quad \text{где} \quad a = \frac{1}{125}\ln\left(\frac{R_{DMвкл}(150^\circ C)}{R_{DMвкл}(25^\circ C)}\right).$$

18.7. Полевой МОП-транзистор с быстрым диодом

Полевой МОП-транзистор содержит внутренний диод в структуре между подложкой и стоком. При этом, если диод проводит в прямом направлении, следует учитывать его не очень хорошие свойства, если их сравнивать с быстрым диодом. Полевой МОП-транзистор с быстрым диодом предполагает наличие улучшенных характеристик внутреннего диода.

18.8. Биполярный транзистор с изолированным затвором

• ***Работа. Обозначение*** (рис. 18.21). Это однонаправленный электронный прерыватель управляемой напряжением мощности. G — затвор, C — коллектор, E — эмиттер.

• ***Устройство*** (рис. 18.22). Такой транзистор состоит из биполярного PNP-транзистора и N-канального полевого МОП-транзистора. Целевое назначение — объединить преимущества биполярных транзисторов (коммутация больших токов при повышенных напряжениях) и полевых МОП-транзисторов (управление напряжением в отсутствие тока).

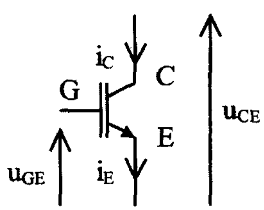


Рис. 18.21. Обозначение

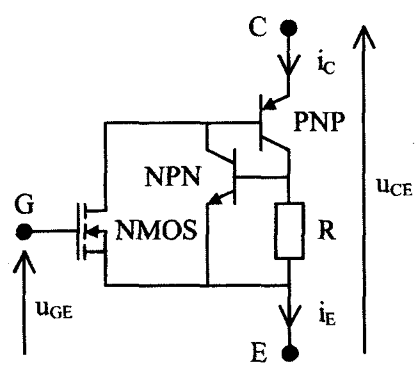


Рис. 18.22. Устройство

Нормальная работа. Если напряжение u_{GE} больше порогового N-канального МОП-транзистора, он проводит, вызывая PNP-проводимость путем извлечения своего базового тока. Если его проводимость достаточна (малое $R_{DSвкл}$), то PNP-структура насыщается. И напротив, если напряжение u_{GE} меньше порогового N-канального МОП-транзистора, он запирается, вызывая запирание PNP-структуры. Все происходит как в управляемом напряжением PNP-транзисторе (вне коммутации ток управления почти нулевой).

Примечание. В конструкции имеется паразитный NPN-транзистор. Вместе с PNP-транзистором он реализует структуру тиристора (NPN плюс PNP) с риском запирания вначале, которое происходит только при больших токах и значительной производной du_{GE}/dt. Поэтому предусматриваются защиты (демпфирующие схемы, ограничители и т. д.).

ГЛАВА 19

ТИРИСТОРЫ

Тиристор — это обобщающее название всего семейства полупроводников, имеющего минимально три перехода, т. е. как минимум четыре полупроводниковых слоя. Это название возникло по аналогии со старыми технологиями: тиратронная трубка или газонаполненная электронная трубка. Его составляющие имеют двустабильное рабочее состояние. Они имеют состояние проводимости (*On-state)* и закрытое состояние (*Off-state*). Они могут иметь одно- или двунаправленную проводимость.

19.1. Управляемые выпрямители (УВ)

19.1.1. Назначение. Условное обозначение.

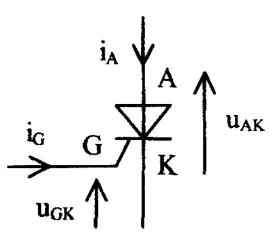


Рис. 19.1. Обозначение УВ

Управляемый выпрямитель (*SCR — Silicon Controlled Rectifier*) представляет собой однонаправленный прерыватель с управляемым замыканием. Общепринятое название такого управляемого выпрямителя — *тиристор*. Его называют также тиристор-триод с обратным запиранием.

- ***Условное обозначение*** (рис. 19.1). A — анод, K — катод, G (*Gate*) — управляющий электрод. Вершина треугольника указывает прямое проводящее направление.

19.1.2. Идеальная модель

Включение УВ (замыкание контакта) осуществляется током управляющего электрода (рис. 19.2), а запирание (размыкание контакта) осуществляется при исчезновении анодного тока i_A, т. е. в точке ($i_A = 0$, $u_A = 0$).

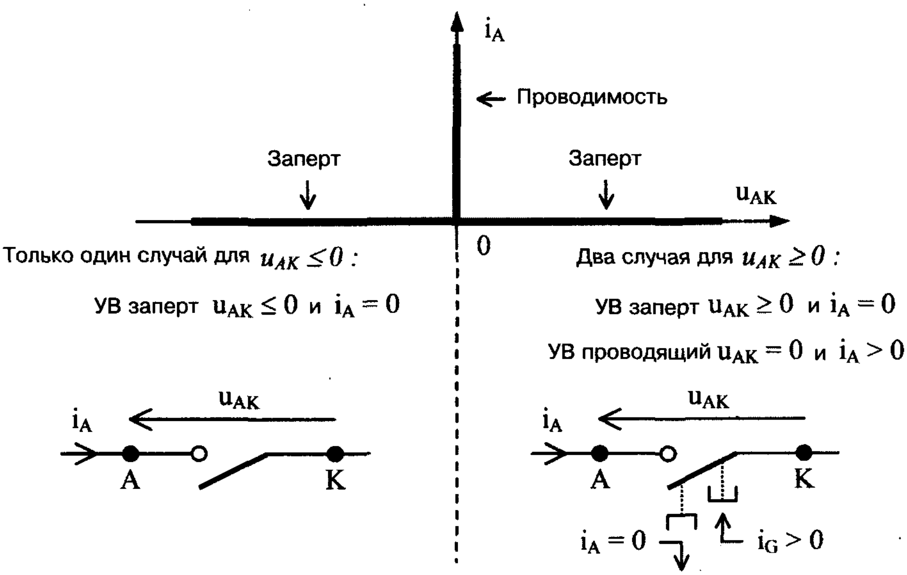


Рис. 19.2. Вольт-амперные характеристики идеальной модели УВ

19.1.3. Устройство. Модель двух наслоенных транзисторов

• ***Устройство*** (рис. 19.3).

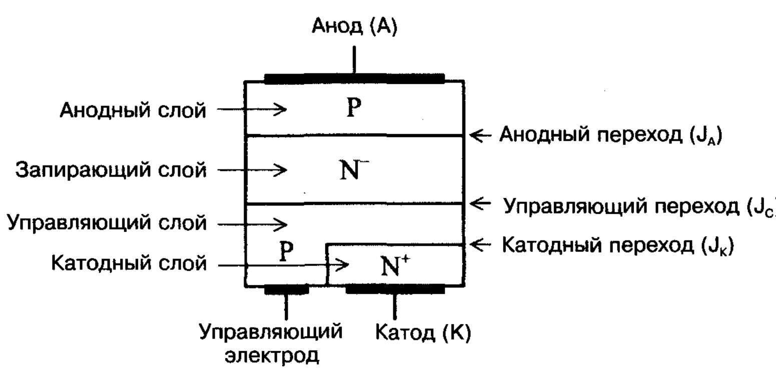


Рис. 19.3. Устройство УВ

• ***Работа модели двух наслоенных транзисторов*** (рис. 19.4).

1) При прямом напряжении ($u_{AK} > 0$). В состоянии покоя никакой транзистор не является проводящим: $i_G = 0$ и $i_A = 0$. Если задать ток

в управляющий электрод УВ, то T_N становится проводником, что в свою очередь вызывает проводимость T_P: УВ становится проводящим и $i_A > 0$. Если ток управляющего электрода затем отключить, схема останется в проводящем состоянии, так как каждый из транзисторов обеспечивает прохождение базового тока от другого: УВ открыт и $i_A = 0$.

2) При приложении обратного напряжения ($u_{AK} < 0$) переходы J_A и J_K поляризуются в обратном напряжении, а переход J_C — в прямом: УВ запирается.

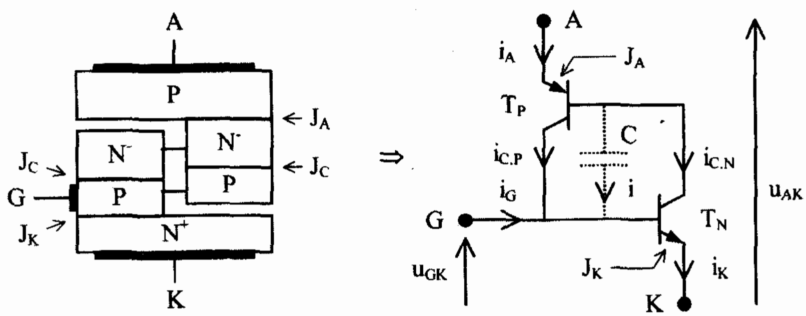


Рис. 19.4. Эквивалентная модель двух наслоенных транзисторов

19.1.4. Вольт-амперная характеристика (рис. 19.5)

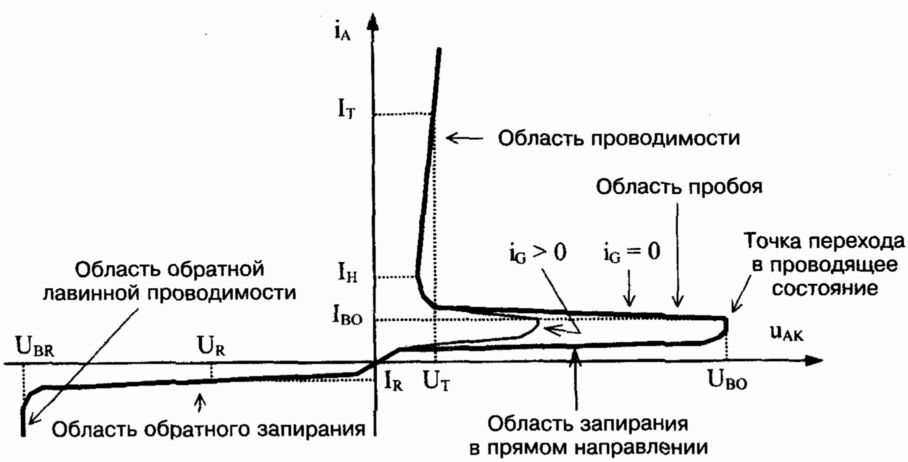


Рис. 19.5. Вольт-амперная характеристика $i_A = f(u_{AK})$

• ***Прямая поляризация*** ($u_{AK} > 0$ и $i_A > 0$). Область запирания в прямом направлении располагается от начала координат до напряжения лавинного перехода в проводящее состояние U_{BO}. Отметим влияние тока управляющего электрода i_G, который снижает напряжение отпирания тиристора.

• ***Обратная поляризация*** ($u_{AK} < 0$ и $i_A < 0$). Характеристика подобна характеристике диода в обратном направлении. Область обратного запирания следует до обратной лавинной проводимости. Превзойти значение U_{BR} значит вызвать опасность разрушения элемента, если не ограничить ток.

• ***Обозначения.*** U_T — прямое напряжение в проводящем состоянии (обычно от 1 до 3 В); I_T — прямой ток в проводящем состоянии; r_T — динамическое сопротивление в проводящем состоянии; U_{BO} — напряжение перехода в проводящее состояние; I_{BO} — ток перехода в проводящее состояние; I_H — ток удержания; I_L — ток включения, всегда больше или равен току удержания I_H; U_R — обратное напряжение; I_R — обратный ток; U_{BR} — обратное напряжение перехода.

19.1.5. Отпирание УВ

Чтобы УВ открылся, нужно одновременно:

- ток управляющего электрода i_G был больше отпирающего тока управляющего электрода, обозначаемого I_{GT};
- анодный ток i_A достиг минимального значения, называемого *током включения* I_L прежде исчезновения тока управляющего электрода;
- напряжения анод-катод $u_{AK} > 0$, т. е. положительно.

Внимание! При $u_{AK} > 0$ отпирание УВ может произойти даже в отсутствие тока управляющего электрода i_G при следующих условиях.

1. Если напряжение u_{AK} достигло значения напряжения перехода в проводящее состояние U_{BO} (см. рис. 19.5). Этот способ отпирания используется для четырехслойных диодов.
2. Если достаточная световая энергия освещает переход управления (J_C). Этот способ отпирания используется для фототиристоров.
3. Если слишком велика производная du_{AK}/dt. Изменение напряжения u_{AK} во времени вызывает появление тока $i \approx Cdu_{AK}/dt$, способного вызвать отпирание. Здесь C — емкость управляющего перехода J_C (пунктирная линия на рис. 19.4).
4. При повышении температуры. Тиристор становится чувствительнее.

19.1.6. Запирание УВ

Для запирания УВ нужно, чтобы анодный ток в течение минимально достаточного времени стал меньше минимального тока, называемого *током удержания* и обозначаемого I_H.

Для этого возможны два решения:

– либо *естественным запиранием*, т. е. при прохождении анодным током нулевого значения (характерно для переменных токов);
– либо *принужденным запиранием*, т. е. приложением обратного напряжения $u_{AK} < 0$, которое вызовет спадание анодного тока i_A до нуля.

Естественное запирание немного препятствует последующему отпиранию цепи.

19.1.7. Аспекты времени

• ***Время включения управляющим электродом.*** Обозначается t_{gt}. Это время, отделяющее мгновения подачи управляющей команды на управляющий электрод и начала проводимости УВ. Чтобы это время уменьшить, следует повысить ток управляющего электрода i_G и уменьшить, насколько это возможно, время нарастания тока управляющего электрода.

• ***Время выключения или время восстановления запирающей способности.*** Обозначается t_q. Это время, отделяющее мгновения достижения анодного тока нулевого значения и появления нового значения прямого напряжения u_{AK} без риска нового включения. Это время определяет максимальную рабочую частоту УВ, так как оно больше времени включения. Время выключения может быть уменьшено путем подачи соответствующего обратного напряжения, вызывающего обратный ток.

19.1.8. Принципиальные ограничения

– Максимальное значение прямого тока в проводящем состоянии I_T.
– Тепловые ограничения I^2t.
– Критическая скорость повышения анодного тока в проводящем состоянии di/dt.
– Максимальное значение прямого напряжения в отключенном состоянии U_D.
– Максимальное обратное напряжение U_R.
– Критическая скорость нарастания напряжения u_{AK} в отключенном состоянии du/dt. С ростом температуры эта величина снижается.

– Наибольшее значение рассеиваемой мощности как функция наибольшей допустимой переходом и тепловым сопротивлением температуры.

19.2. Двухоперационные тиристоры

Другое название — *управляемо отключаемый* (*запираемый*). Это однонаправленный электронный прерыватель с управляемыми включением и отключением. Эти элементы полупроводниковой техники предназначены особенно для работы с источниками постоянного напряжения, например, с мостовыми инверторами.

• ***Обозначение*** (рис. 19.6). A — анод, K — катод, G — управляющий электрод.

• ***Включение и отключение.*** Этот тиристор включается как управляемый выпрямитель (УВ). Но у него есть дополнительная возможность отключения при приложении отрицательного напряжения управляющий электрод — катод, приводящего к повышенному отрицательному току управляющего электрода (обычно треть анодного тока, прежде чем принять нулевое значение). Прямое напряжение в проводящем состоянии обычно составляет 2–3 В.

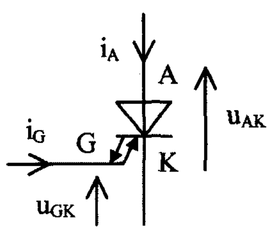


Рис. 19.6. Обозначение

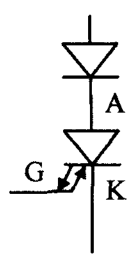


Рис. 19.7. Последовательно включенный диод

• ***Обратная поляризация*** ($u_{AK} < 0$ и $i_A < 0$). В обратном направлении такой тиристор эквивалентен сопротивлению, неспособному запереть напряжение и не позволяющему наличие существенного тока. Для обеспечения устойчивости при обратном напряжении следует включить диод последовательно с двухоперационным диодом (рис. 19.7).

19.3. Семистор

19.3.1. Принцип действия. Условное обозначение.

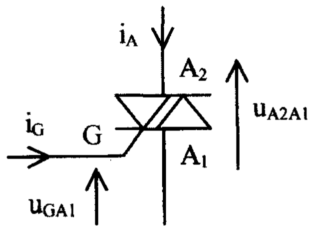


Рис. 19.8. Обозначение

Это двунаправленный электронный прерыватель с управляемым запиранием. Преимущественное предназначение для работы в сетях переменного тока.

- ***Условное обозначение*** (рис. 19.8). A — анод, K — катод, G — управляющий электрод. Два треугольника означают, что ток может проводиться в двух направлениях.

19.3.2. Идеальная модель (рис. 19.9)

Включение семистора (замыкание контакта) осуществляется током управляющего электрода, а его отключение (размыкание контакта) осуществляется *естественным гашением* ($i_A = 0$).

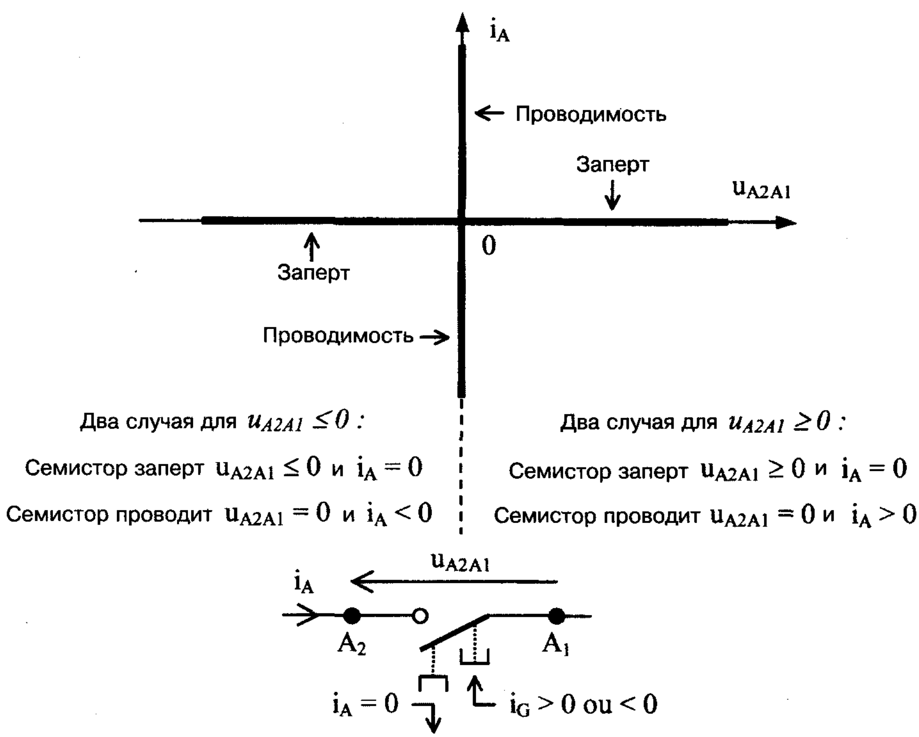


Рис. 19.9. Вольт-амперная характеристика идеальной модели семистора

19.3.3. Устройство. Эквивалентная схема двух УВ (рис. 19.10)

Семистор может быть представленным упрощенно эквивалентной электрической схемой двух встречно параллельно включенных тиристоров. Причем, один из них имеет управляющий катодный электрод, другой — анодный. В действительности у семисторов структура несколько сложнее, она не имеет соединения между двумя эквивалентными тиристорами (S.C.R.1 и S.C.R.2) эквивалентной модели.

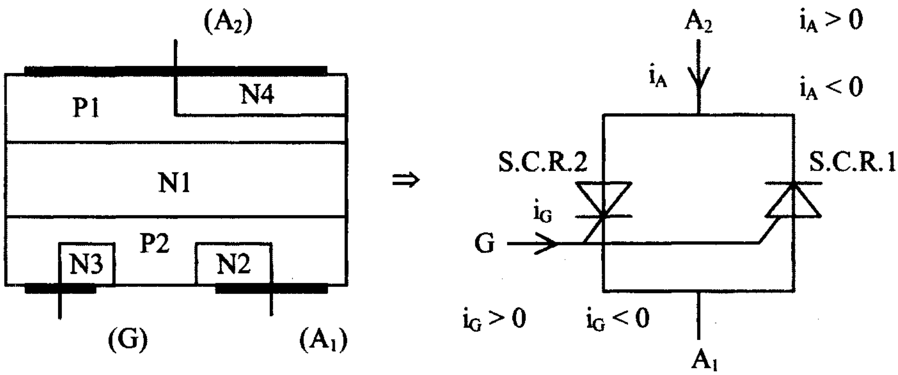


Рис. 19.10. Устройство семистора и эквивалентная схема двух УВ

19.3.4. Вольт-амперная характеристика (рис. 19.11)

- ***Прямая поляризация*** ($u_{A2A1} > 0$ и $i_A > 0$). Характеристика семистора подобна УВ (S.C.R.2 на упрощенной схеме), поляризованному в направлении прямой проводимости.

- ***Обратная поляризация*** ($u_{A2A1} < 0$ и $i_A < 0$). Характеристика семистора подобна УВ (S.C.R.1 на упрощенной схеме), поляризованному в направлении прямой проводимости.

19.3.5. Управление семистором

Для включения семистора нужно одновременно:

- чтобы ток управляющего электрода i_G был больше абсолютного значения тока управляющего электрода на включение, обозначаемого I_{GT};
- чтобы анодный ток достиг абсолютного значения минимального тока, называемого *током включения*, обозначаемого I_L, прежде исчезновения тока управляющего электрода;

– чтобы напряжение u_{A2A1} было положительным или, соответственно, отрицательным.

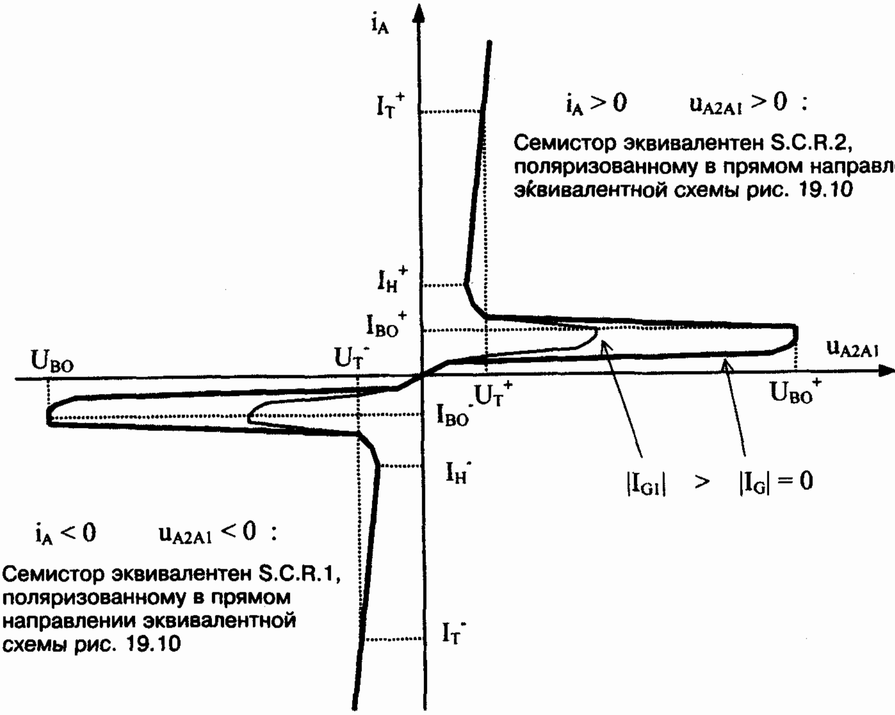
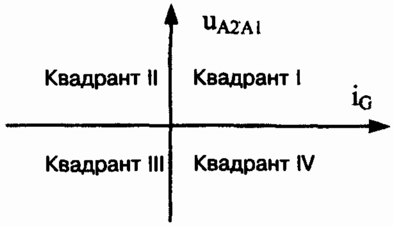


Рис. 19.11. Вольт-амперные характеристики $i_A = f(u_{A2A1})$

Исходя из структуры управления по управляющему электроду, включение семистора может происходить в четырех квадрантах системы координат $u_{A2A1} - i_G$ (рис. 19.12). Отношение I_L/I_H (чувствительность) дается для семисторов, ток которых превышает 10 А.



Квадрант	u_{A2A1}	i_G	I_L/I_H	I_{GT}
I	> 0	> 0	1	слабый
II	> 0	< 0	2–5	средний
III	< 0	< 0	1	средний
IV	< 0	> 0	1,5–3	сильный

I_{GT} — ток управляющего электрода семистора

Рис. 19.12. Включение в четырех квадрантах

Внимание! Включение семистора может произойти также при следующих условиях.

1. Если напряжение между анодами достигает значения положительного U_{BO}^{+} или отрицательного U_{BO}^{-} напряжения переключения. Такое включение используется в импульсном диоде.
2. Если достаточная энергия излучения попадет на управляющий переход. Такой способ включения используется в фотосемисторах.
3. Если, аналогично УВ, слишком велика производная du_{A2A1}/dt. Это определяет так называемую *статическую* производную du/dt. Этот параметр изменяется при запирании семистора из-за важного сочетания двух эквивалентных УВ, чем определяется *коммутационная* производная $(du/dt)_C$, обычно более слабая.
4. С повышением температуры. Включение семистора становится тогда более чувствительным и благоприятным для несвоевременного включения.

19.3.6. Запирание семистора

Запирание семистора, предназначенного для работы в цепях переменного тока, осуществляется исчезновением анодного тока (*естественное отключение*). Точнее, чтобы семистор отключился (заперся), нужно, чтобы ток i_A стал меньше абсолютного значения минимального тока, называемого *током удержания* или *гипостатическим* током, обозначаемым как I_H.

19.3.7. Время

Время включения управляющим электродом, обозначаемое t_{gt}, представляет собой длительность от подачи управления на управляющий электрод до начала проводимости семистора. Это время определено для всех четырех квадрантов.

Примечание. Для семисторов время отключения не определено. Запирание происходит при естественном снижении анодного тока.

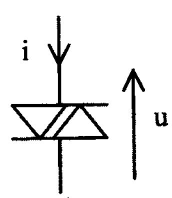


Рис. 19.13. Обозначение

19.4. Импульсный диод

19.4.1. Принцип действия. Обозначение (рис. 19.13)

Это двунаправленный *отключающий* диод, возможностью которого является генерирование положительных и отрицательных импульсов. Он состоит из трех слоев NPN. Согласно двум треугольникам на схеме ток может проводиться в двух направлениях.

19.4.2. Модель, близкая к идеальной

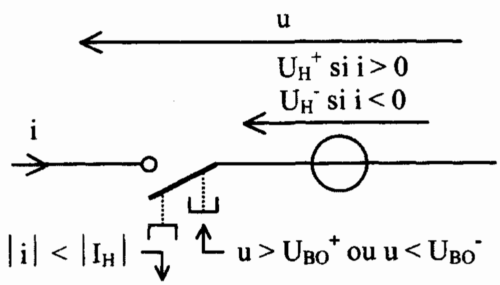


Рис. 19.14. Модель, близкая к идеальной

Очень упрощенно можно полагать, что речь идет о семисторе без управляющего электрода, но имеющего повышенное напряжение в проводящем состоянии (обычно порядка двадцати вольт).

– Включение такого диода (эквивалентно замыканию контакта) осуществляется, когда напряжение достигает значения положительного или отрицательного значения напряжения переключения. Оно обозначается U_{BO} и составляет обычно около тридцати вольт.
– Отключение диода (размыкание контакта) осуществляется, когда ток становится меньше значения удержания I_H.

19.4.3. Вольт-амперная характеристика (рис. 19.15)

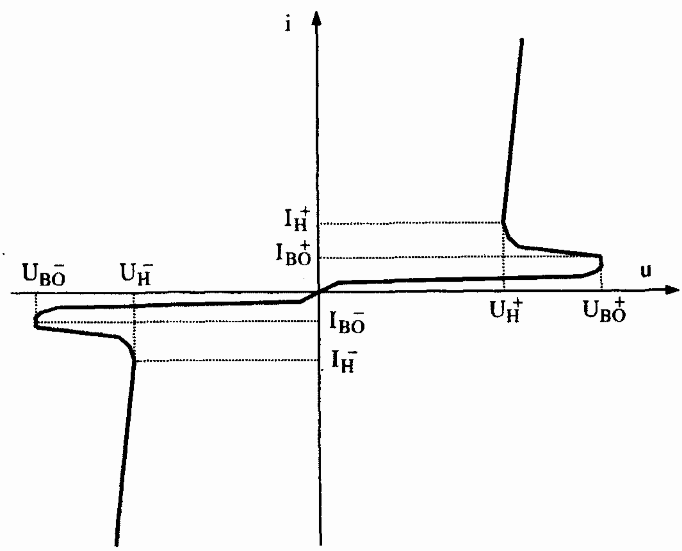


Рис. 19.15. Вольт-амперная характеристика

19.5. Проблемы внедрения тиристоров и семисторов

(см. также гл. 35)

19.5.1. Скорость изменения напряжений u_{AK} и u_{A2A1}

Быстрое изменение напряжения u_{AK} в случае тиристора или u_{A2A1} в случае импульсного диода может привести к их включению.

Метод

Во избежание включения следует соблюдать следующие мероприятия:

– При запертом семисторе скорость нарастания напряжения u_{A2A1} должна оставаться меньше статической.

$$\frac{du_{A2A1}}{dt} < \frac{du}{dt}.$$

– При запертом семисторе скорость нарастания напряжения u_{A2A1} должна оставаться меньше статической коммутационной.

$$\frac{du_{A2A1}}{dt} < \left(\frac{du}{dt}\right)_C.$$

– При запертом тиристоре скорость нарастания напряжения u_{AK} должна оставаться меньше статической, равной статической коммутационной.

$$\frac{du_{AK}}{dt} < \frac{du}{dt}.$$

• ***Демпфирующие цепи.*** Чтобы замедлить изменение этих напряжений, параллельно соответствующему элементу включают RC-цепочку, представленную в табл. 19.1. Сопротивление необходимо для ограничения тока i_A разряда конденсатора, оно осуществляет также управление демпфированием цепи. Если напряжение u_{AK} тиристора всегда положительно, схема может быть улучшена включением диода параллельно резистору (диод замыкает сопротивление накоротко, когда тиристор заперт). Тогда конденсатор сильнее замедляет изменение напряжения u_{AK}.

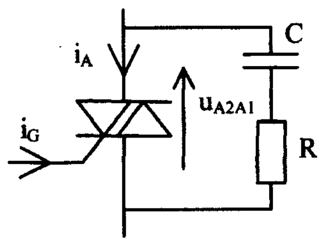
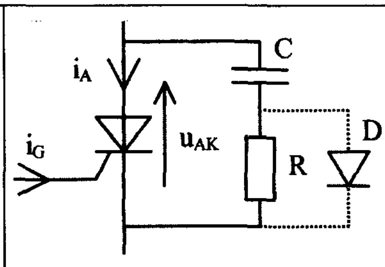
Пример 19.5.1. Схема на рис. 19.16 представляет очень распространенный случай (регуляторы, синхронные переключатели и т. д.). Соотношения, позволяющие определить элементы цепочки RC, справедливы во многих ситуациях.

1) Проблемы статической производной du/dt семистора или тиристора приводят к первому условию относительно C. Это неравенство

определено для значения ступени напряжения U_{Max} при запертом состоянии (подача напряжения в худшем случае).

$$C > \frac{U_{Max}^2}{L(du/dt)^2}.$$

Таблица 19.1. Демпфирующие цепочки

	
RC-цепочка для семистора	RCD-цепочка для тиристора

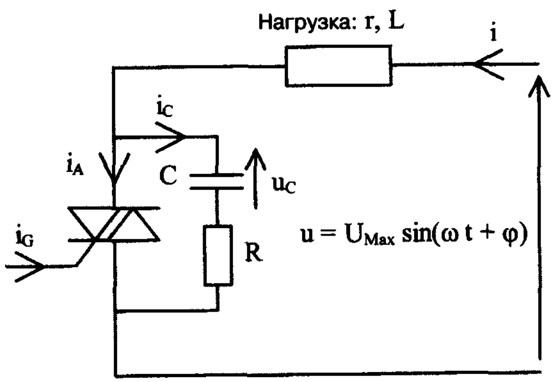


Рис. 19.16. Пример распространенного решения

2) Проблема коммутационной производной семистора $(du/dt)_C$ приводит ко второму условию относительно C. Это неравенство определено, когда семистор запирается при напряжении u, опережающем по фазе φ ток i.

$$C > \frac{(U_{Max}\sin\varphi)^2}{L((du/dt)_C)^2}.$$

3) Сопротивление должно ограничить ток ниже максимального допустимого (I_{TMax} повторяющегося) при включении семистора (или тиристора) в худшем случае ($u_C = U_{Max}$).

$$R > \frac{U_{Max}}{I_{TMax}}.$$

4) Чтобы ограничить амплитуду колебаний (возмущения по излучению) и избежать перенапряжения на зажимах семистора (тиристора),

сопротивление R определяется для критического демпфирования. Оно не должно быть очень большим, чтобы не снизить эффективность конденсатора C.

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - r \text{ (для критического демпфирования).}$$

Примечания.

- В случае тиристора $du/dt = (du/dt)_C$. Следовательно, не нужно учитывать неравенство п. 2).
- В случае семистора при плохо определенном значении сдвига фаз или в случае значительного изменения неравенство п. 2) следует учитывать в наиболее неблагоприятном случае, т. е. при сдвиге фаз 90°. Тогда неравенство 1) учитывать не следует, так как всегда $(du/dt)_C > du/dt$. Это часто встречающийся случай: контакторы и электромагниты (переменные проницаемости), двигатели (переменные нагрузки) и т. д.
- При малых значениях индуктивности L (или неизвестных) рекомендуется добавить последовательно с нагрузкой индуктивность (сотню мкГн), что ограничит емкость C.
- Если нагрузка сильно меняется, следует рассматривать худший случай.
- При использовании варистора можно допустить неизменность расчетов.

19.5.2. Максимальные значения напряжений u_{AK} и u_{A2A1}

Если значение напряжения u_{AK} для тиристора или u_{A2A1} для семистора превышают напряжение переключения U_{BO}, происходит включение элемента. К такому перенапряжению приводят либо особенности схемы (индуктивная нагрузка), либо питающая сеть. В общем случае RC-цепочка ограничивает перенапряжение, вызываемое особенностью схемы, определяется критическое демпфирование (не всегда получаемое). И напротив, RC-цепочка обычно не ограничивает в достаточной мере вызываемые особенностью схемы перенапряжения при наличии в схеме значительного запаса энергии. Использование варистора улучшает такую защиту (рис. 19.17).

Пример 19.5.2. Для напряжения сети 230 В (при наибольшем действующем значении напряжения 244 В имеем: $U_{Max} = 244\sqrt{2} \approx 345$В) определим напряжение отсечки варистора 710 В при токе 100 А (приблизительно вдвое больше). Это предписывает использование тиристора или семистора на соответствующее значение напряжения U_{DRM} ($\approx$ 700 В).

19.5.3. Максимальное значение тока i_A

Обязательно следует добавить защиту, ограничивающую длительность и частоту аварийных перегрузок, вызванных отклонениями от нормального режима работы. Этому требованию соответствует использование быстродействующих предохранителей (рис. 19.17).

> ***Метод***
> Выбор быстродействующего предохранителя.
> – I^2t предохранителя должно быть меньше i^2t защищаемого элемента.
> – Номинальное напряжение предохранителя должно быть больше или равно напряжению питания.
> – Номинальный ток предохранителя должен быть больше тока в элементе в заданном режиме.
> – Пиковый ток предохранителя должен быть больше пикового тока в элементе.

Примечание. Значение i^2t семистора (или тиристора) с пиковым током прямой аварийной перегрузки в проводящем состоянии I_{TSM} за полупериод (10 мс) связано соотношением:

$$i^2t_{(10мс)} = \frac{I^2_{TSM}}{2}0{,}010_{(c)}$$

($I^2_{TSM}/2$ соответствует квадрату действующего синусоидального тока амплитудой I_{TSM}).

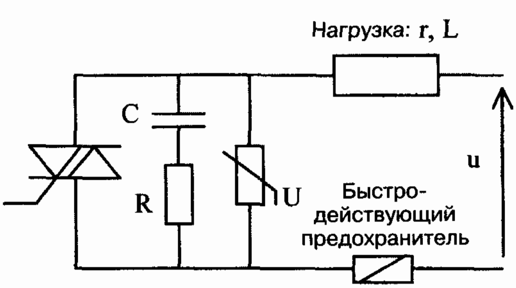


Рис. 19.17. Защита схемы (RC-цепь, варистор, быстродействующий предохранитель)

19.5.4. Скорость изменения тока i_A

Быстрое повышение тока i_A разрушает семистор (или тиристор). Это, в частности, соответствует случаю активной нагрузки, связанному с максимумом напряжений u_{AK} или u_{A1A2}, или случаю емкостной нагрузки. Когда скорость изменения тока превосходит допустимое семистором (или тиристором) значение di/dt, необходимо последовательно с элементом добавить слабую индуктивность. Эта индуктивность может быть насыщаемой.

ГЛАВА 20

ФОТОЭЛЕМЕНТЫ

20.1. Общие вопросы

20.1.1. Фотон. Электромагнитная волна

Фотон — это элементарная частица без массы. Он распространяется со скоростью около 300 000 км/с в вакууме, колеблясь при этом с частотой f (обозначается также ν), формируя таким образом электромагнитную волну в пространстве. Фотон переносит энергию

$$E = h\nu, \quad \text{где} \quad h \approx 6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с (постоянная Планка)}.$$

Мощность, излучаемая монохроматическим (с единственной частотой ν) световым пучком, содержащим n_p фотон в секунду, составит:

$$P = n_p E \text{ с единицами измерения Вт} = \text{Дж/с}.$$

Скорость фотонов зависит от среды распространения. Следовательно, и длина волны λ — тоже. В вакууме, как и в воздухе, $C \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

$$\lambda = \frac{C}{\nu} \text{ с единицами измерения м} = \frac{\text{м/с}}{\text{Гц}} = \frac{\text{м/с}}{\text{с}^{-1}}.$$

Частота определяет цвет (видимого спектра) электромагнитной волны. Хотя длина волны зависит от среды распространения, использование ее предпочтительнее частоты.

20.1.2. Оптические величины и единицы измерения

Существует две системы оптических единиц (табл. 20.1): энергетические единицы и световые единицы в зависимости от визуального восприятия человека.

20.1.3. Зрительное восприятие человека

а) Зрительное восприятие человека зависит от длины волны полученного излучения и от его яркости (рис. 20.1)

- При дневном зрении получаем кривую *дневного зрения* относительной световой эффективности, которое максимально и равно единице при длине волны 555 нм.

– При ночном зрении получаем кривую *ночного зрения* относительной световой эффективности, которое максимально и равно единице при длине волны 507 нм. Ночное зрение смещено к голубому цвету.
– Между областями дневного и ночного зрений располагается плохо определенная область, соответствующая сумеречному зрению.

Таблица 20.1. Величины и единицы измерения

Энергетические величины	Обозначение Единица измерения	Световые или фотометрические величины	Обозначение Единица измерения
Энергетический поток = полная мощность	Φ_e Ватт: Вт	Световой поток	Φ_v Люмен: лм
Энергетическая освещенность = поток на единицу поверхности	E_e Вт/м^2	Световая освещенность	E_v Люкс: лк = лм/м^2
Энергетическая сила света = поток на единицу телесного угла	I_e Вт/ср	Сила света	I_v. Кандела: кд = лм/ср
Энергетическая яркость = излучение по телесному углу	L_e или B Вт/ср/м^2	Яркость	L_v кд/м^2

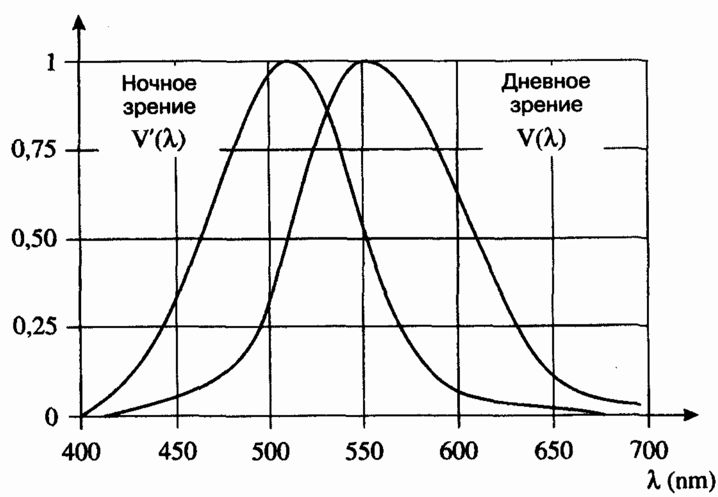


Рис. 20.1. Дневное и ночное зрение «стандартного глаза»

Метод

Чтобы от энергетических единиц перейти к световым и наоборот, используются кривые (рис. 20.1) относительной световой эффективности «стандартного глаза», одобренные Международной комиссией по освещению (C.I.E.), совместно со следующими выражениями, в которых U_e — энергетическая единица и U_v — световая единица.

Дневное зрение:

$$U_v = KV(\lambda)U_e,$$

где K = 683, а $V(\lambda)$ измеряется в лм/Вт.

Ночное зрение:

$$U_v = K'V'(\lambda)U_e,$$

где $K' = 1703$, а $V'(\lambda)$ измеряется в лм/Вт.

Примечание. Было установлено значение коэффициента K = 683 с учетом старой единицы яркости, называемой свечой.

Пример 20.1.1. При дневном зрении с $\lambda = 555$ нм кривая максимальна для $V(\lambda) = 1$ лм/Вт. Имеем: 1 Вт = 683 лм, 1 Вт/м^2 = 683 лк, 1 Вт/ср = = 683 кд и 1 Вт/ср/м^2 = 683 лк/м^2.

Внимание! Эти соотношения справедливы только в случае монохроматического излучения (единственная длина волны). Для полихроматических излучений для перехода от энергетических единиц к визуальным нужно заменить $L_e(\lambda)d\lambda$ на $L_v(\lambda)d\lambda = KV(\lambda)L_e(\lambda)d\lambda$.

б) Световое восприятие человека инерционно

В случае периодической освещенности в зависимости от частоты различают три диапазона.

1) Медленно меняющаяся освещенность (частотой менее нескольких герц). Глаз отслеживает в основном вариации, и наблюдатель их ощущает.

2) Когда частота изменения освещенности располагается между несколькими герцами и специальным значением частоты, называемым *критической частотой*, глаз больше не следит точно за изменениями, наблюдатель ощущает рябь в глазах или мерцание.

3) Когда частота изменения освещенности становится больше критической, глаз больше не отслеживает изменения из-за жесткости сетчатки, и наблюдатель ощущает постоянную освещенность, равную среднему значению реальной переменной освещенности (закон Тальбота).

Примечание. *Критическая частота* зависит от многих параметров, рассматривают, что обычно она изменяется между 5 Гц и 70 Гц.

20.1.4. Инфракрасное излучение

Интенсивность инфракрасного излучения в атмосфере пониженная и составляет около 6 дБ/км (множитель 0,25/км). В случае использования рефлектора для направления луча потери могут достигать в зависимости от состояния поверхности до 60% на отражение и до 20% на преломление. Туман, препятствуя прозрачности, может даже сделать невозможной передачу.

20.1.5. Оптоэлектронные эмиттеры или антенны (рис. 20.2)

Рис. 20.2. Оптоэлектронный эмиттер

– Энергетический КПД:

$$\eta_e = \frac{\text{излучаемая мощность}}{\text{приложенная электрическая мощность}}.$$

– Световой КПД:

$$\eta_v = \frac{\text{световая мощность в люменах}}{\text{приложенная электрическая мощность}}.$$

– Квантовый выход:

$$\eta_q = \frac{\text{число эмиттированных фотонов}}{\text{число инжектированных электронов}}.$$

– Время отклика световой эмиссии по отношению к электрическому сигналу.

20.1.6. Оптоэлектронные приемники (рис. 20.3)

Рис. 20.3. Оптоэлектрический приемник

– Квантовый выход:

$$\eta_q = \frac{\text{число эмиттированных фотонов}}{\text{число инжектированных электронов}}.$$

– Чувствительность. Она выражается в А/Вт, А/Вт/м^2, А/лк.
– Время отклика электрического сигнала по отношению к полученному световому сигналу.

20.2. Светодиоды

Светодиоды испускают электромагнитные излучения видимого спектра (от голубого до красного) или близкого к видимому (инфракрасного и ультрафиолетового). В PN-переходе светодиода рекомбинация электрона с дыркой вызывает *спонтанную эмиссию* фотона (рис. 20.4)

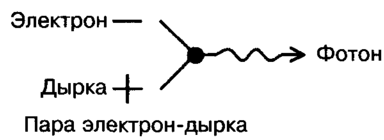


Рис. 20.4. Спонтанная эмиссия

Потеря электроном электрической энергии преобразуется в оптическую энергию $E = h\nu$ в фотоне. Цвет (длина волны) эмиссии зависит в основном от запретной зоны используемого материала.

$$\lambda = \frac{hC}{E_G} \text{ с единицами измерения м} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м/с}}{\text{Дж}},$$

где λ — длина волны в м, $h \approx 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $C \approx 3 \cdot 10^8$м/с — скорость света в вакууме, E_G — ширина запретной зоны в эВ или Дж.

20.2.1. Условное обозначение. Световые величины. Модели

• ***Условное обозначение*** (рис. 20.5). A — анод, K — катод. Направления напряжения u_D и тока i_D условно соответствуют потребителю. Вершина треугольника указывает проводимость в прямом направлении. Светодиод испускает электромагнитное излучение при прямом токе.

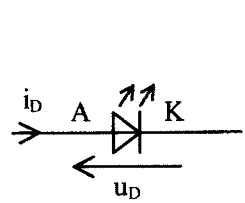


Рис. 20.5. Светодиод

• ***Испускаемый световой поток (или световая мощность).*** Он почти пропорционален току светодиода. Квантовый выход η_q сильно уменьшается при старении светодиода.

$$\varphi_e = \eta_q i_D \text{ с единицами измерения Вт} = \frac{\text{Вт}}{\text{А}}\text{А}.$$

• ***Сила света*** (распределение испускаемого светового потока по направлению). Она пропорциональна току светодиода.

• ***Цвет и длина центральной волны эмиссии*** (табл. 20.2).

Таблица 20.2. Соответствие цвета и длины волны

Длина волны λ (нм)	**Цвет**
> 800, например 900	инфракрасный
660	красный
610	оранжевый
590	желтый
560	зеленый
470	голубой
420	фиолетовый
< 400	ультрафиолетовый

• ***Пороговое напряжение светодиода.*** Его можно получить очень приближенно, исходя из цвета его излучения.

$$U_{D0} \approx \frac{E_G}{q} = \frac{hC}{q\lambda} \approx \frac{1240}{\lambda\ (\text{нм})},$$

где q — абсолютное значение заряда электрона.

• ***Модели.*** Они те же, что и для обычного диода с PN-переходом, изменяются только параметры (см. гл. 16).

> ***Метод***
> На практике каталоги предоставляют кривые, необходимые для определения световых величин (энергетических или фотометрических), исходя из данных поляризации светодиода.

20.2.2. Типы проводимости

Различают два типа управления светодиодами: непрерывная проводимость и пульсирующая или прерывистая проводимость. Для выбора хорошего типа проводимости необходимо учитывать следующие свойства.

– Зрительное восприятие человека не мгновенно (см. § 20.1.3).
– Испускаемый энергетический поток φ_e с ростом температуры перехода θ_J уменьшается. Световой поток и энергетическая интенсивность и сила света подчинены одному и тому же закону.

$$\varphi_e(\theta_J) = \Phi_e\ (25\ °C)\ e^{-k(\theta_J - 25)},$$

где k — тепловой коэффициент светодиода, измеряемый в K^{-1} (порядок величины $k \approx 0{,}01/°C$).

– Температурный отклик перехода θ_J в функции времени на скачок рассеиваемой мощности P_D определяется следующим соотношением (см. гл. 23):

$$\theta_J(t) = \Theta_A + P_D R_{th\,JA}(1 - e^{-t/\tau_{th}}),$$

где τ_{th} — тепловая постоянная времени светодиода, Θ_A — температура окружающей среды.

Внимание! Тепловое сопротивление переход-среда светодиода представляет собой сумму теплового сопротивления переход-слой и теплового сопротивления слой-среда ($R_{thJA} = R_{thJP} + R_{thPA}$). Оно зависит от схемы включения светодиода.

а) Наблюдение человека (визуальные единицы)

В зрительных наблюдениях обычно учитывают среднюю освещенность, воспринимаемую наблюдателем.

– Обычно предпочтительна непрерывная проводимость из-за ее простоты и потому, что пульсирующая проводимость со значительными импульсами тока и малым циклическим отношением не позволяет получить средний световой поток большим, чем при непрерывной проводимости (за исключением арсенидгалиевых светодиодов).

– Пульсирующая проводимость необходима в двух случаях: мультиплексная индикация (например, N семисегментных индикаторов) с целью экономии материальных ресурсов; контроль яркости по циклическому отношению при отношениях от 1 до 2000. Частота пульсаций должна быть выбрана выше 100 Гц (рекомендуемое значение) для устранения эффекта мерцания, а еще лучше — более 1 кГц, так как ниже этого значения максимальная температура перехода значительно превышает среднюю температуру перехода.

б) Оптоэлектронная передача (энергетические единицы)

При ненаблюдаемых использованиях учитывается максимальная энергетическая освещенность, получаемая фотодетектором.

Обычно используют пульсирующую проводимость, так как это позволяет иметь повышенные импульсы тока в светодиоде и, таким образом, излучаемый свет. На уровне фотодетектора это проявляется увеличенным фототоком. Кроме того, для устранения возможности снижения энергетического КПД предпочтительно управлять светодиодом «удаленными» один от другого импульсами, чтобы не допустить чрезмерного повышения температуры перехода.

20.3. Диоды LASER

Диоды LASER[1] могут испускать инфракрасное излучение ($\lambda \approx 0{,}8$–$1{,}6$ мкм в зависимости от материала). В одном таком диоде падающий фотон вызывает рекомбинацию электрона с дыркой, что приводит к эмиссии второго фотона в фазе с первым (рис. 20.6).

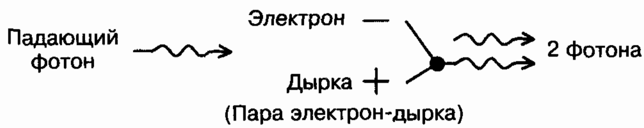


Рис. 20.6. Стимулированная эмиссия

Диод LASER испускает *когерентный* свет. Это означает сочетание:

- когерентности во времени, т. е. волны эмиссии имеют одинаковые фазу и длину волны, таким образом, волны эмиссии монохроматические (только один цвет);
- пространственная когерентность, т. е. однонаправленное распространение фотонов.

На практике рассматривают когерентность света, если спектральная полоса достаточно узкая и диаграмма излучения достаточно прямая (свет, испускаемый диодом LASER, рассматривается как когерентный, светодиодом — не когерентный).

Таблица 20.3. Сравнение диода LASER и светодиода

Сравниваемая величина	Диод LASER	Светодиод
Спектральный диапазон	от 0,1 нм до 5 нм	от 20 нм до 50 нм
Расширение импульса на 1 км волокна 100 пс/нм	от 10 пс до 500 пс	от 2 пс до 5 пс
Время нарастания (от 10% до 90% импульса мощности)	меньше 1 нс	несколько нс
Диаграмма излучения	10°	50°
Излучаемая мощность	несколько мВт	1 мВт
Связанная мощность	несколько мВт	0,1 мВт

[1] Английская аббревиатура: усиление света при индуцированном излучении. — *Прим. перев.*

20.4. Фотодиоды

В PN-переходе фотодиода в направлении, противоположном спонтанной эмиссии, *поглощение* падающего фотона порождает создание пары электрон–дырка (рис. 20.7).

Оптическая энергия фотона $E = h\nu$ преобразуется в приращение электрической энергии E электрона.

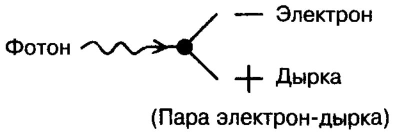


Рис. 20.7. Поглощение

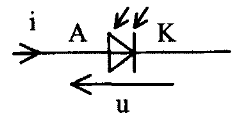


Рис. 20.8. Фотодиод

20.4.1. Условное обозначение (рис. 20.8)

A — анод, K — катод. Напряжение u и ток i по соглашению — приемника. Прямое проводящее направление соответствует вершине треугольника

20.4.2. Основная модель

• ***Уравнение нормального режима.*** Полагаем, что ток фотодиода является суперпозицией тока i_D неосвещенного диода и тока, вызванного освещением. Фототок i_{CC} соответствует току короткого замыкания, т. е. при $u = 0$

$$i = i_D - i_{CC} = I_S(e^{\frac{u}{NU_T}} - 1) - i_{CC}.$$

Чувствительность K. Ток i_{CC} почти пропорционален падающему потоку φ, который в данном случае измеряем, учитывая спектральный отклик фотодиода. Перед фотодиодом можно добавить фильтры для изменения спектрального отклика, например, для его адаптации к измерению светового потока, соответствующего световой эффективности «стандартного глаза»:

$$i_{CC} = K\varphi \text{ с единицами измерения } A = \frac{A}{Вт} Вт.$$

Чувствительность K связана с квантовым выходом и с частотой или длиной волны выражением:

$$K = \eta_q \frac{q}{h\nu} = \eta_q \frac{q\lambda}{hC} \approx \frac{\eta_q \lambda_{(нм)}}{1240}.$$

Темновой ток. Это ток i_D ($\varphi = 0 \Rightarrow i_{CC} = 0$). При обратной поляризации, если $u < -3NU_T$, то $i_D \approx -I_S$.

• ***Работа в области пробоя.*** Процессы аналогичны происходящим в диоде (см. гл. 16).

• ***Характеристики вне области пробоя*** (рис. 20.9). Темновые характеристики ($\varphi = 0$) соответствуют характеристикам классического диода. Мы получаем семейство характеристик $i = f(u)$, связанных с падающим потоком. Фотодиод является приемником в I и III квадрантах и генератором в IV квадранте.

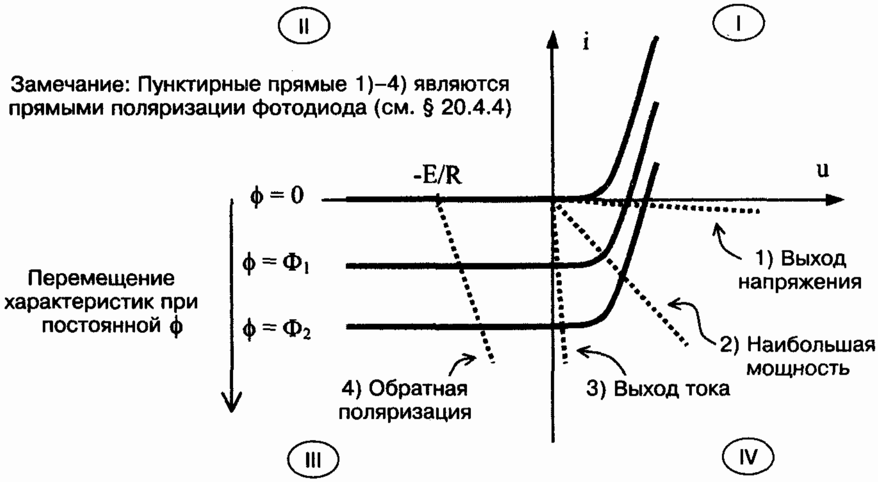


Рис. 20.9. Вольт-амперные характеристики основной модели фотодиода

• ***Эквивалентная схема широких сигналов*** (рис. 20.10). Это управляемый падающим потоком источник тока i_{CC}, включенный параллельно основной модели диода (управляемый напряжением на своих зажимах источник тока i_D).

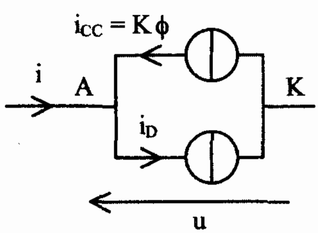


Рис. 20.10. Основная эквивалентная схема широких сигналов

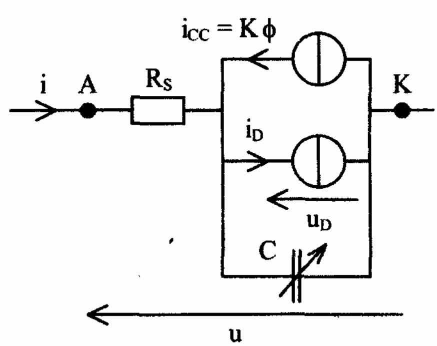


Рис. 20.11. Динамическая эквивалентная схема широких сигналов

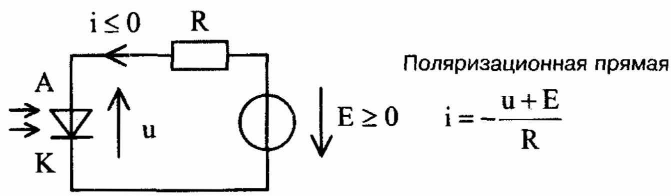
20.4.3. Динамическая модель

Это управляемый падающим потоком источник тока i_{CC}, наложенный на динамическую модель широких сигналов диода (рис. 20.11). Подробнее см. гл. 16.

20.4.4. Рабочие режимы

• ***Поляризация фотодиода*** (рис. 20.12). Здесь мы рассматриваем только поляризацию в III и IV квадрантах (см. рис. 20.9), т. е. при $i \leqslant 0$ и $E \geqslant 0$.

Рис. 20.12. Поляризация фотодиода



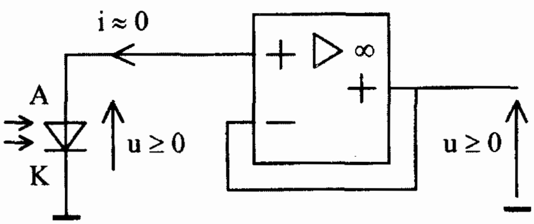
• ***Режим фотонапряжения. IV квадрант.*** Фотодиод является генератором. Различают три случая.

1. Выходная переменная — напряжение: $E = 0$, $R \to +\infty \Rightarrow i \to 0$. Напряжение холостого хода:

$$u_{xx} = NU_T \ln\left(\frac{i_{CC}}{I_S} + 1\right).$$

Чтобы реализовать условие $R \to +\infty$, можно использовать схему, приведенную на рис. 20.13.

Рис. 20.13. Режим фотонапряжения с напряжением на выходе



Примечания.

– Напряжение является логарифмической функцией падающего потока.

– Схема работает очень медленно из-за большой постоянной времени цепи (большое сопротивление параллельно фотодиоду). Ток I_S является функцией многих параметров и очень сильно меняется в зависимости от температуры.

2. На выходе — максимальная мощность: для $E = 0$ ищется оптимальное значение сопротивления R, обеспечивающее на выходе максимальную мощность. Имеем:

$$P_{\text{Макс}} = -U_{\text{опт}} I_{\text{опт}}.$$

Этот режим используется для солнечных батарей (или фотоэлементов) или для передачи светом информации.

3. На выходе — ток: $E = 0$, $R \to 0 \Rightarrow u \to 0$. Ток короткого замыкания i_{CC} пропорционален падающему потоку. Этот режим называют также *фототоковым*. Для реализации условия $R \to 0$ используют схему, приведенную на рис. 20.14.

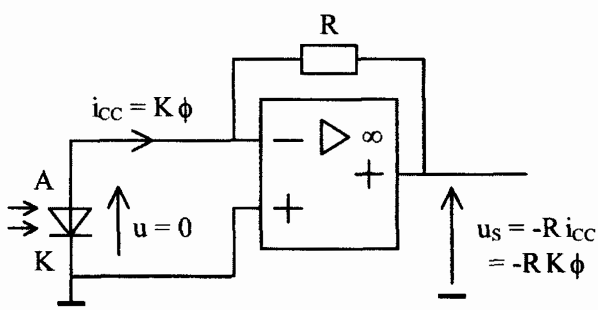


Рис. 20.14. Режим фотонапряжения с током на выходе

Примечания.

- Напряжение на выходе пропорционально падающему потоку. Схема линейная и малошумящая, так как ток на выходе I_S почти нулевой.
- Схема менее быстродействующая, чем при обратной поляризации.

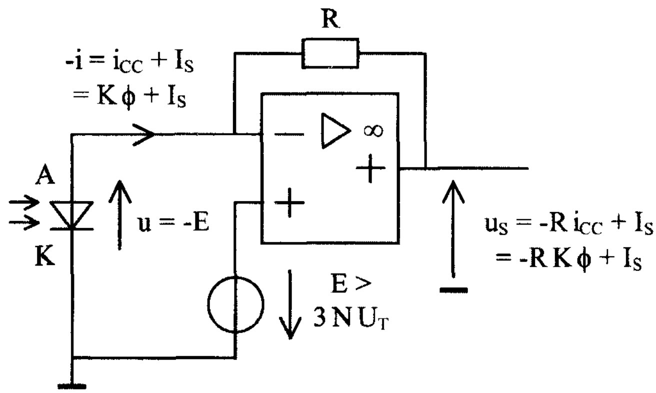
• ***Режим фотопроводимости. III квадрант.*** Фотодиод является обратно поляризованным рецептором.

4. Обратная поляризация: $E > 0$, $i < 0$, $u < 0$.

Примечания.

- Быстродействие.
- Повышение обратного тока утечки из-за поляризации ($i \neq 0$ при $\varphi = 0$) и, как следствие, уровня шума. В эквивалентной схеме фотодиода имеем $i_D = -I_S$.
- Чтобы получить сопротивление $R = 0$ и часть преимуществ фототокового режима, используется схема рис. 20.15.

Рис. 20.15. Режим фотопроводимости с током на выходе



20.5. Фототранзисторы

• ***Условное обозначение*** (рис. 20.16). B — база, C — коллектор, E — эмиттер.

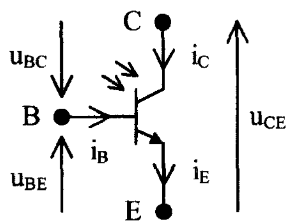


Рис. 20.16. Фототранзистор

• ***Описание.*** Переход CB используется как обратно поляризованный фотодиод. Чувствительность умножена на коэффициент усиления по току β. Его недостатками являются: нелинейность, температурная зависимость и, особенно, медленное действие, так как приведенная ко входу емкость (эффект Миллера) значительна. Рекомендуется выход выполнять через эмиттер, а не через коллектор. База чаще всего недоступна.

• ***Модели.*** Все приводимые для транзистора модели остаются пригодными (см. гл. 17). Достаточно считать, что диод между базой и коллектором является фотодиодом (см. § 20.4). Например, при прямой проводимости, когда $u_{BC} < -3N_RU_T$ (рис. 20.17), уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} i_B + K\varphi = i_{BF} - \frac{I_S}{\beta_R}, \\ i_C = \delta_F(i_B + K\varphi) + I_{CE0}, \\ i_E = i_C + i_B, \end{cases}$$

где $i_{BF} = \frac{I_S}{\beta_F}\left(e^{\frac{u_{BE}}{N_FU_T}} - 1\right)$ и $I_{CE0} = \frac{I_S}{\beta_R}(\beta_F + \beta_R + 1)$.

Примечание. Ток утечки I_{CE0} — это темновой ток при $i_B = 0$.

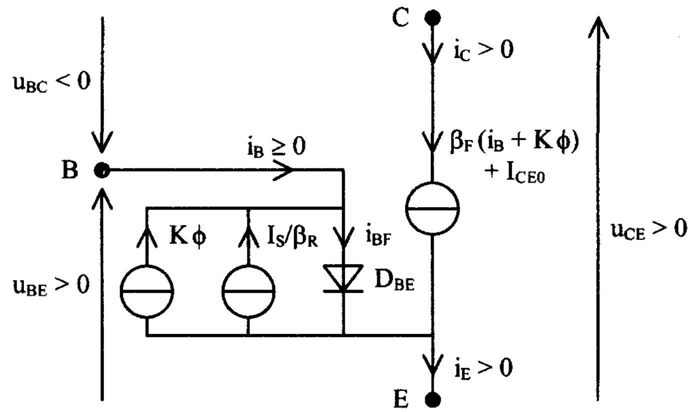


Рис. 20.17. Эквивалентная схема широких сигналов прямой проводимости

20.6. Солнечные батареи

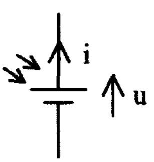


Рис. 20.18. Фотоэлемент

• ***Условное обозначение*** (рис. 20.18). Направления u и i соответствуют генератору. Для использования солнечной энергии переход должен иметь большую поверхность. Элементы работают в IV квадранте фотодиода (см. § 20.4.4). Максимальная мощность, получаемая на земле, порядка 1000 Вт/м^2. Современный КПД кремниевых элементов едва превосходит 15%.

20.7. Оптроны

• ***Описание.*** Оптрон или оптический коммутатор позволяет реализовать гальваническую развязку. Он состоит из эмиттера (светодиод), приемника (фотодиод, фототранзистор, фототиристор, фотосемистор) и возможны специальные схемы, смонтированные в одном корпусе.

• ***Различные типы оптронов.***

– Фотокоммутатор на фототранзисторе: используется широко.
– Фотокоммутатор на фотодиоде и транзисторе: более быстр, чем фототранзистор.
– Фотокоммутатор по схеме Дарлингтона: большое усиление по току, но менее быстр.

– Фотокоммутатор на фотодиоде и по схеме Дарлингтона: большое усиление по току и быстродействие больше предыдущего.
– Фотокоммутатор на фототиристоре: изолирование питания на переменном токе.
– Фотокоммутатор на фотосемисторе: оптический прерыватель переменных токов.
– Фотокоммутатор на фотосемисторе на включение при нулевом напряжении.
– Фотокоммутатор на фотодиоде и логическом элементе: высокое быстродействие и совместимость при логических сигналах.
– Фотокоммутатор на двух светодиодах эмиттерах: входное напряжение переменное.

ГЛАВА 21

ОПЕРАЦИОННЫЕ УСИЛИТЕЛИ

21.1. Условное обозначение. Структура

Операционный усилитель (ОУ) — это дифференциальный усилитель с очень большим коэффициентом усиления, предназначенный для использования с обратной связью. Его название «операционный» происходит от его оригинального использования: реализовывать операции для калькуляторов и аналоговых моделирующих устройств. Здесь рассматриваются только классические ОУ с обратной связью по напряжению.

• ***Условное обозначение*** (рис. 21.1).

Рис. 21.1. Условное обозначение ОУ

• ***Структура*** (рис. 21.2). ОУ обладает инвертирующим входом, обозначаемым знаком «−», и неинвертирующим входом, обозначаемым знаком «+». Проще, ОУ обычно состоит из трех ступеней прямых связей, т. е. проводящих постоянно.

1) Входная дифференциальная ступень с несимметричным выходом. Ее роль состоит в подаче сигнала (ток или напряжение), пропорционального разности потенциалов на входах.

2) Ступень передачи уровня. Ее роль состоит в адаптации сигнала для выходной ступени. При симметричном питании сигнал симметричен относительно нуля.

3) Выходная ступень усиления по току. Ее роль состоит в обеспечении минимально возможного сопротивления на выходе. Усиление по напряжению на этой ступени обычно близко к нулю.

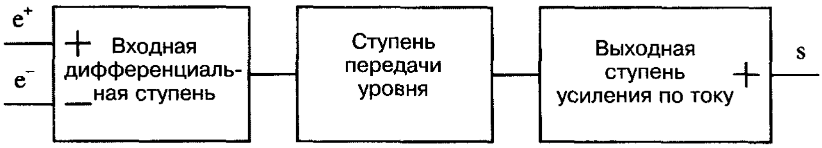


Рис. 21.2. Типовая структура

Примечание. ОУ может питаться от двух источников напряжения: один положительный, обозначаемый U_{CC}^+, а другой отрицательный, обозначаемый U_{CC}^-, но также и от одного источника, обозначаемого U_{CC}.

21.2. Простейшая идеальная модель

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 21.3).

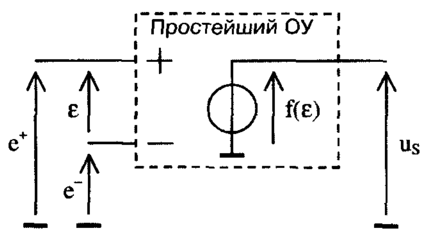


Рис. 21.3. Эквивалентная схема простейшей модели

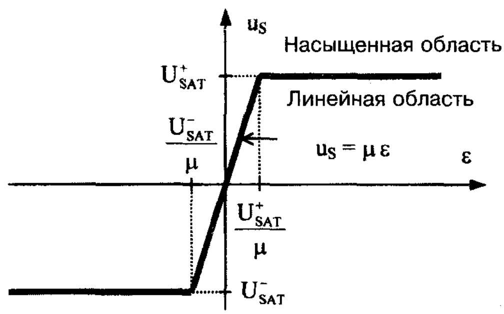


Рис. 21.4. Характеристика $u_S = f(\varepsilon)$ простейшей модели

• ***Характеристика вход–выход*** (рис. 21.4). Выходное напряжение является кусочно-непрерывной функцией ε.

• ***Простейшие свойства ОУ.***

1) Линейная область: $\frac{U_{SAT}^-}{\mu} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{U_{SAT}^+}{\mu}$, где $U_{SAT}^{\pm}$ — напряжение насыщения.

- Выходное напряжение зависит только от разности $\varepsilon = e^+ - e^-$.
- Полоса пропускания бесконечна, в том числе и постоянный ток $\Rightarrow \mu$ не зависит от частоты.
- Полное входное сопротивление бесконечно $\Rightarrow$ нулевой ток на входах «+» и «−».
- Полное выходное сопротивление равно нулю $\Rightarrow u_S = \mu\varepsilon$.

2) Верхняя область насыщения: $\varepsilon \geqslant \frac{U^{+}_{SAT}}{\mu}$.

3) Нижняя область насыщения: $\varepsilon \leqslant \frac{U^{-}_{SAT}}{\mu}$.

– Токи на входах «+» и «-» равны нулю.

– Полное выходное сопротивление равно нулю $\Rightarrow u_S = U^{+}_{SAT}$ или $u_S = U^{-}_{SAT}$.

• ***Идеальная модель.*** Получается из простейшей модели при допущении, что дифференциальное усиление μ бесконечно.

Внимание! Входное дифференциальное напряжение ε рассматривается равным нулю *только* в случае ненасыщенного выхода и если дифференциальное усиление μ может рассматриваться равным бесконечности.

21.3. Ограничения и допущения

Для упрощения анализа выражения обрабатываются одно за другим.

21.3.1. Напряжение смещения. Токи поляризации

Реально имеем непрерывный режим. Ошибки классифицируются как статические.

• ***Напряжение смещения или остаточное входное напряжение.*** Это постоянное напряжение, подаваемое от идеального источника напряжения, соединенного с двумя входами, при котором выходное напряжение U_S было бы равно нулю. Напряжение смещения U_D (или U_{IO}) представляется идеальным источником напряжения последовательно с одним из двух входов ОУ (рис. 21.5). Оно может быть положительным или отрицательным.

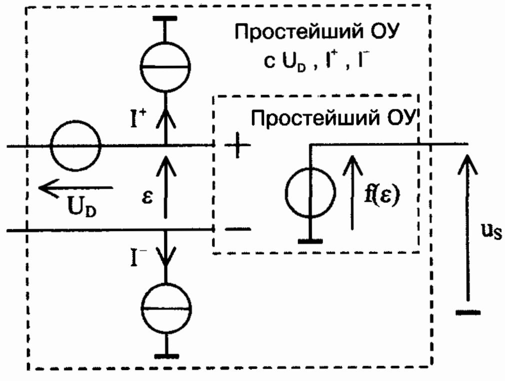


Рис. 21.5. Эквивалентная схема с источниками U_D, I^+, I^-

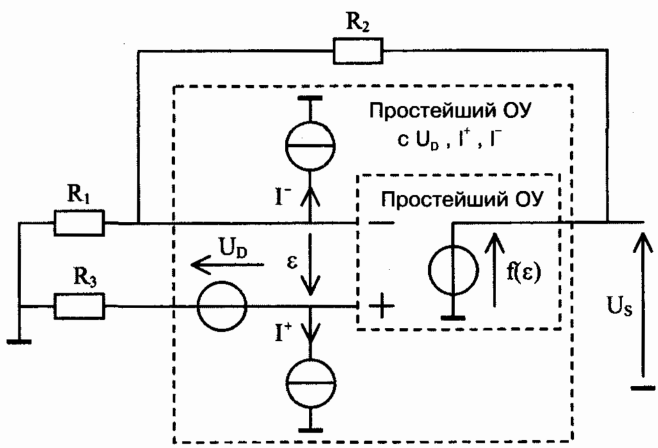
• ***Поляризационный входной ток. Ток смещения или остаточный входной ток.*** Поляризационный ток I_P (или I_{IB}) — среднее значение поляризационных входных токов I^+ (или I_{IB}^+) и I^- (или I_{IB}^-). Ток смещения I_D(или I_{IO}) — это разность входных токов поляризации. Знаки и значения входных токов поляризации зависят от ступени дифференциального входа: биполярный (NPN или PNP), полевой транзистор с PN-переходом или полевой МОП-транзистор (N-канальный или P-канальный). Поляризационные входные токи представлены двумя идеальными источниками тока (см. рис. 21.5).

$$I_P = \frac{I^+ + I^-}{2}, \qquad I_D = I^+ - I^-.$$

• ***Влияние источников*** U_D, I^+, I^- (рис. 21.6). С учетом принятых поляризаций получаем:

$$U_S = -\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_D + R_2 I^- - R_3 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) I^+.$$

Рис. 21.6. Влияние источников U_D, I^+, I^-



Метод

Минимизация влияния входных токов поляризации. Если $R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, то

$$U_S = -U_D - R_2 I_D \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right).$$

– Влияние входных токов поляризации сводится к минимуму, если по каждому входу имеем одинаковое значение сопротивления.

– После минимизации влияния входных токов влияние токов поляризации смещения I_D будет пропорционально R_2.

– Влияние напряжения смещения пропорционально $(1 + R_2/R_1)$.
– При этих условиях, принимая температурные коэффициенты сопротивлений равными нулю, изменение выходного напряжения U_S в функции температуры запишется в виде:

$$\frac{dU_S}{dT} = -\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{dU_D}{dT} - R_2\frac{dI_D}{dT}.$$

Примечание. «Исключение» влияния напряжения смещения и тока смещения теоретически возможно, но реализация этого деликатна, так как эти величины зависят от температуры.

21.3.2. Частотные свойства

Объективно: динамический режим линеен, т. е. с сигналами с пониженной амплитудой (обычно меньше 1 В), такими, что всегда мы можем рассматривать режим линейным. В частности, мы рассматриваем, что влияние скорости изменения выходного напряжения не наблюдается (см. § 21.3.5). Эти погрешности классифицируются как динамические ошибки.

Внимание! Три значительных величины дифференциального коэффициента усиления μ получены только при низких частотах. Для каждого типа ОУ существует полоса с единичным коэффициентом усиления или коэффициент добротности, обозначаемый B_w, который представляет собой частоту, для которой коэффициент усиления $\mu = 1$.

а) Частотно компенсированный ОУ

В хорошем приближении можно рассматривать, что частотно компенсированный ОУ эквивалентен низкочастотной цепи первого порядка, что обеспечивает безусловную устойчивость при наличии обратной связи и выходе на резистивную нагрузку.

• ***Дифференциальное усиление.***

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{f}{f_1}},$$

где f_1 — частота среза при -3 дБ.

Модуль: $\mu = \left|\underline{\mu}\right| = \frac{\mu_0}{\sqrt{1+(f/f_1)^2}}$. Аргумент: $\operatorname{Arg}\underline{\mu} = -\operatorname{arctg}(f/f_1)$.

Если $f > 3f_1$, то $\mu \approx \mu_0 f_1/f$. Произведение μf (амплитуда $\times$ частота), называемое *«произведением усиление - полоса»* остается постоянным в широкой полосе частот — от $3f_1$ до B_w как минимум.

$$\mu f \approx \mu_0 f_1 = B_w.$$

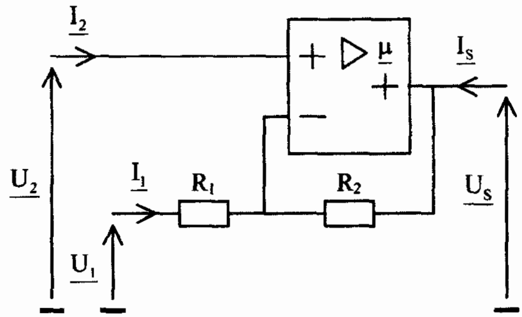
• ***Влияния на базовый усилитель*** (рис. 21.7). Общее соотношение между напряжениями выходным и входным напряжениями:

$$\underline{U_S} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+\frac{1}{\underline{\mu}\beta}}\left[\underline{U_2} - (1-\beta)\underline{U_1}\right], \quad \text{где} \quad \beta = \frac{R_1}{R_1+R_2}.$$

Заменяя $\underline{\mu}$ его выражением, получим:

$$\underline{U_S} = \frac{A_0}{1+j\frac{f}{f_C}}\left[\underline{U_2} - (1-\beta)\underline{U_1}\right], \quad \text{где} \quad f_C = (1+\mu_0\beta)f_1 \quad \text{и} \quad A_0 = \frac{\mu_0}{1+\mu_0\beta}.$$

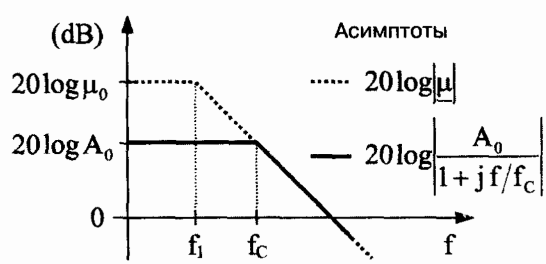
Рис. 21.7. Базовый усилитель



Примечания (рис. 21.8):

- Частота среза при −3 дБ умножается на $(1+\mu_0\beta)$.
- Усиление делится на $(1+\mu_0\beta)$.
- Произведение «усиление-полоса» постоянно: $A_0 f_C = \mu_0 f_1 = B_w$.
- Для $\mu_0\beta \gg 0$ имеем $f_C \approx \mu_0\beta f_1$ и $A_0 \approx \frac{1}{\beta}$.
- Эти эффекты вызваны обратной связью (см. гл. 27).

Рис. 21.8. Усиление и частота среза



Метод

В линейном динамическом режиме время нарастания (или спадания) сигнала, измеренное между 10% и 90% скачка амплитуды, рассчитывается согласно классическому соотношению:

$$t_{\text{откл}} \approx \frac{0{,}35}{f_C} = \frac{0{,}35A_0}{B_w}.$$

б) Общий случай

Обычно ОУ подобен низкочастотному звену второго порядка. Будучи теоретически устойчивой при замыкании обратной связью и с выходом на резистивную нагрузку, схема исследуется на перерегулирование в переходном режиме и даже на возможную неустойчивость (колебания) из-за наличия паразитных элементов, которые в действительности приводят к передаточной функции порядка $\geqslant 3$.

• ***Дифференциальное усиление.*** Рассмотрим классический ОУ приведенный к двум ступеням первого порядка с удаленными частотами среза, включенными последовательно.

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{\left(1 + j\frac{f}{f_1}\right)\left(1 + j\frac{f}{f_2}\right)},$$

где f_1 и f_2 — частоты среза при -3 дБ. Или также:

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + 2mj\frac{f}{f_0} + j^2\frac{f^2}{f_0^2}},$$

где

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \quad \text{и} \quad m = \frac{f_1 + f_2}{2\sqrt{f_1 f_2}}.$$

• ***Влияния на базовый усилитель*** (см. рис. 21.7). Получаем:

$$\underline{U_S} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \cdot \frac{1}{1 + 2\frac{m}{\sqrt{1+\mu_0\beta}}j\frac{f}{f_0\sqrt{1+\mu_0\beta}} + j^2\frac{f^2}{f_0^2(1+\mu_0\beta)}}\left[\underline{U_2} - (1-\beta)\underline{U_1}\right].$$

Примечания.

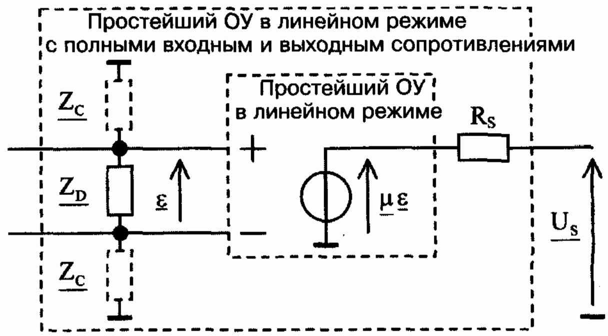
- Резонансная частота умножается на $\sqrt{1+\mu_0\beta}$: $f'_0 = f_0\sqrt{1+\mu_0\beta}$.
- Усиление делится на $(1+\mu_0\beta)$: $A'_0 = \frac{\mu_0}{1+\mu_0\beta}$.
- Затухание делится на $\sqrt{1+\mu_0\beta}$: $m' = \frac{m}{\sqrt{1+\mu_0\beta}}$.
- При $\mu_0\beta \gg 1$ имеем $f'_0 \approx f_0\sqrt{\mu_0\beta}$, $m' = \frac{m}{\sqrt{\mu_0\beta}}$ и $A'_0 \approx \frac{1}{\beta}$.
- Затухание базового усилителя становится настолько малым, что его усиление A'_0 становится слабым. Чем меньше затухание m', тем больше вероятность перерегулирований в переходном режиме и даже возможной неустойчивости. Обычно ОУ, не имея внутренней компенсации, должен быть компенсирован извне.

21.3.3. Полные входное и выходное сопротивления

Объективно: динамический режим линеен.

• ***Эквивалентная схема*** (рис. 21.9). $\underline{Z_D}$ — полное сопротивление дифференциального входа слабого влияния; $\underline{Z_C}$ — полными сопротивлениями общего режима пренебрегается, учитывая их очень большую величину. $\underline{Z_D}$ и $\underline{Z_C}$ сильно зависят от частоты. Это *резистор*, шунтированный емкостью.

Рис. 21.9. Полные входное и выходное сопротивления



• ***Влияние одного полного сопротивления дифференциального входа*** $\underline{Z_D}$ ***на полные входные сопротивления*** Z_{E1} ***и*** Z_{E2} ***базового усилителя*** (рис. 21.7).

$$Z_{E1} = \frac{\underline{\underline{U_1}}}{\underline{I_1}} = R_1 + \frac{R_2}{1+\underline{\mu} + R_2/\underline{Z_D}}; \qquad Z_{E2} = \frac{\underline{\underline{U_2}}}{\underline{I_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \underline{Z_D}(1+\underline{\mu}\beta).$$

Учитывая обычные порядки величин ($Z_D \gg R_2$, $Z_D \gg R_1//R_2$ и $\mu_0 \gg 1$) при низкочастотном приближении первого порядка для ОУ, получим:

$$\underline{Z_{E1}} = \frac{\underline{\underline{U_1}}}{\underline{I_1}} \approx R_1 + \frac{R_2}{\mu_0}\frac{1+j\frac{f}{f_1}}{1+j\frac{f}{B_w}}; \quad \underline{Z_{E2}} = \frac{\underline{\underline{U_2}}}{\underline{I_2}} \approx \underline{Z_D}\left(1 + \frac{\mu_0\beta}{1+j\frac{f}{f_1}}\right).$$

Примечание. При входной инвертирующей стороне полное входное сопротивление приблизительно равно R_1, затем повышается с частотой, стремясь к $R_1 + R_2$, так как $B_w = \mu_0 f_1$. При входной неинвертирующей стороне полное входное сопротивление всегда больше Z_D.

• ***Влияние одного выходного сопротивления*** R_S ***на полное выходное сопротивление*** Z_S ***базового усилителя*** (рис. 21.7). Получим:

$$\frac{1}{\underline{Z_S}} = \frac{\underline{\underline{I_S}}}{\underline{U_S}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1+\underline{\mu}\beta}{R_S}.$$

Учитывая обычные порядки величин ($R_S \ll R_1 + R_2$) при низкочастотном приближении первого порядка для ОУ, получим:

$$\underline{Z_S} \approx \frac{R_S}{1+\mu_0\beta}\frac{1+j\frac{f}{f_1}}{1+j\frac{f}{f_C}}.$$

Примечание. Полное выходное сопротивление очень маленькое, так как делится на $(1+\mu_0\beta)$, с ростом частоты повышается, достигая значения R_S.

21.3.4. Коэффициент подавления синфазной составляющей

Объективно: динамический режим линеен.

Выходное напряжение ОУ реально соответствует классическому закону дифференциального усилителя.

$$\underline{U_S} = \underline{\mu\varepsilon}(\underline{E^+} - \underline{E^-}) + \underline{\mu_C}\frac{\underline{E^+} + \underline{E^-}}{2},$$

где $\underline{\mu_C}$ — усиление при обычном режиме. Или $\underline{U_S} = \underline{\mu\varepsilon} + \underline{\mu_C U_C}$, полагая $\underline{U_C} = \frac{\underline{E^+ + E^-}}{2}$ (u_C — напряжение при обычном режиме).

ОУ — это дифференциальный усилитель с очень большим усилением. Следовательно, $u_C \approx e^+ \approx e^-$. Коэффициент подавления синфазной составляющей определяется как

$$K_C = 20 \log \frac{|\underline{\mu}|}{|\underline{\mu_C}|},$$

измеряемый в дБ.

Примечание. Обычно K_C высокий (100 дБ), но он снижается с ростом частоты подобно дифференциальному усилению μ. Если неинвертирующий вход связан с массой, напряжение при обычном режиме u_C практически равно нулю.

21.3.5. Максимальная скорость изменения выходного напряжения

Объективно: динамический режим «широких сигналов».

- ***Происхождение понятия.*** Скорость изменения выходного напряжения ограничена пределами внутреннего тока: имеющийся максимальный выходной ток первой ступени должен обеспечить заряд емкости C_S (рис. 21.10).

Рассматривая усилитель идеальным с усилением $-A$ (входное сопротивление бесконечное, выходное сопротивление равно нулю), в соответствии с теоремой Миллера получим эквивалентную схему (рис. 21.11).

Максимальное значение скорости изменения выходного напряжения составит:

$$SR = \left.\frac{du_S}{dt}\right|_{\text{Макс}} = \frac{AI_{1\,\text{Макс}}}{(1+A)C_S} \text{ с единицами измерения В/мкс.}$$

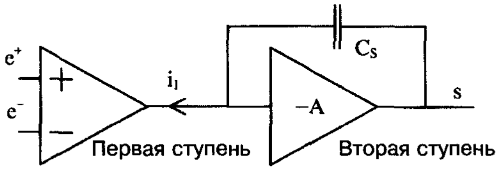


Рис. 21.10. Две ступени ОУ

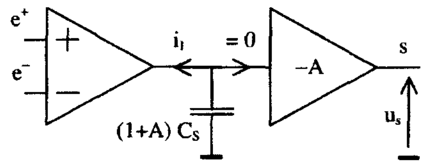


Рис. 21.11. Эквивалентная схема

Примечание. При больших сигналах максимальная скорость выходного напряжения вызывает деформацию сигнала и ограничение максимального значения используемой частоты. Синусоидальный сигнал не испытывает искажений только при скорости изменения его равной или меньшей максимальной скорости изменения выходного напряжения.

Пусть выходное напряжение синусоидально: $u_S = U_{Max}\sin(\omega t)$.

Скорость изменения его составит: $u_S = U_{S\,Max}\omega\cos(\omega t)$.

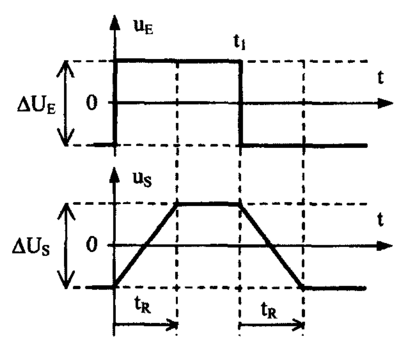
Максимальная скорость изменения его: $\left.\frac{du_S}{dt}\right|_{\text{Макс}} = U_{S\,Max}\omega$.

Следовательно, синусоидальное напряжение на выходе не искажается, если, и только если:

$$2\pi U_{S\,Max} f \leqslant SR.$$

При прямоугольном сигнале скачок ΔU_E на входе преобразуется в линейно нарастающую функцию с наклоном SR с временем достижения желаемой величины t_R (рис. 21.12). Длительность линейного нарастания составит $t_R = \Delta U_S/SR$.

Рис. 21.12. Прямоугольный сигнал



Примечание. Для сигналов с пониженной амплитудой, которые можно рассматривать как при линейном режиме (линейный динамический режим), скорость изменения выходного напряжения ограничивается полосой пропускания (см. § 21.3.2).

ГЛАВА 22

АНАЛОГОВЫЕ КОМПАРАТОРЫ

22.1. Условные обозначения. Описание

Компаратор — это специализированное устройство, предназначенное для сравнения аналоговых переменных. Хотя с функциональной точки зрения он близок к ОУ, его структура, функционирование и свойства оптимизированы и приспособлены к потребностям промышленного аналогового сравнения. Можно назвать в особенности: отличные времена отклика, точность, отсутствие выходной неустойчивости и конфигурации выходов.

• ***Условные обозначения*** (рис. 22.1).

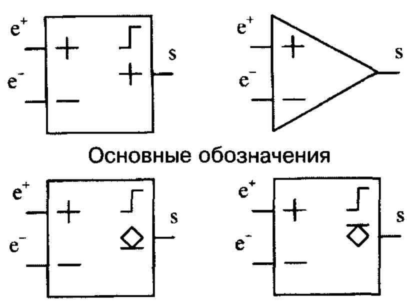


Рис. 22.1. Обозначения компараторов

• ***Описание.*** У компаратора имеется один инвертирующий вход, обозначаемый знаком «—», и один неинвертирующий вход, обозначаемый знаком «+», и один неинвертируемый выход, обозначаемый знаком «+». Входные сигналы аналоговые, а выходной сигнал типа «все или ничего».

Примечания.

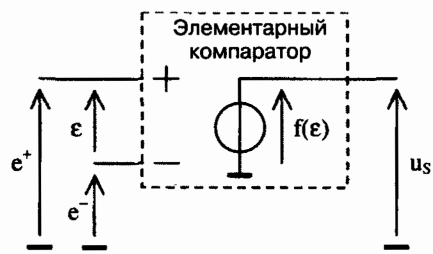
– Существуют выходы различных типов: открытый коллектор или затвор, открытый эмиттер или исток и т. п., обеспечивающие совместимость с логическими элементами ТТЛ, КМОП, ЭСЛ и т. д. Выходы могут быть симметричными или асимметричными по отношению к нулю. Они могут иногда управлять нагрузками непосредственно как реле или быть передаточными линиями.

– Выходы открытый коллектор или затвор, открытый эмиттер или исток позволяют реализовать функции жесткой логики.
– Питания могут быть сдвоенными (не обязательно симметричными) или единичными. Дозволенные значения могут быть относительно высокими.

22.2. Элементарная модель. Идеальная модель

Рассматриваемая здесь модель компаратора учитывает возможные внешние элементы, обеспечивающие его поляризацию. Например, в случае выхода открытый коллектор или затвор напряжение насыщения с высокой стороны фиксируется сопротивлением обратной связи, а с низкой стороны внутренним транзистором схемы.

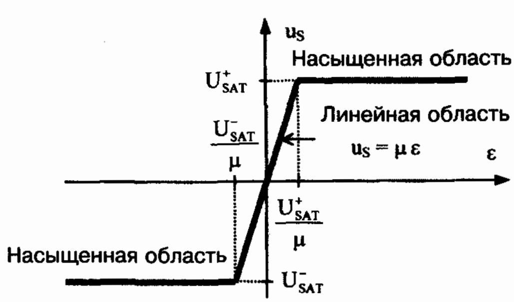
Рис. 22.2. Эквивалентная схема



• ***Эквивалентная схема*** (рис. 22.2). Выходное напряжение u_S является кусочно-непрерывной функцией значения ε (см. рис. 22.3).

• ***Характеристика дифференциальный вход–выход*** (рис. 22.3).

Рис. 22.3. Характеристика $u_S = f(\varepsilon)$ элементарной модели



• ***Идеальная модель.*** Она получена из простейшей модели, рассматривая дополнительно, что дифференциальное усиление μ бесконечно.

22.3. Ограничения и допущения

Многие из них подобны ранее рассмотренным для операционных усилителей (см. гл. 21). Другие более специфичны или должны быть рассмотрены с особых позиций.

• ***Напряжение смещения U_D и токи поляризации I^+ и I^-*** (рис. 22.4). Если полным сопротивлением генератора на входе компаратора нельзя пренебречь, входной ток поляризации вызывает дополнительное напряжение смещения. Тогда условием изменения состояния выхода будет:

$$\begin{cases} U_E = E_G - R_G I^+, \\ U_E = U_{Ref} + U_D, \end{cases} \Rightarrow E_G = U_{Ref} + U_D + R_G I^+.$$

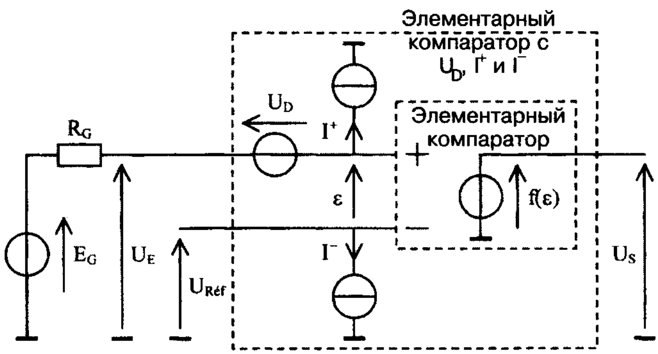


Рис. 22.4. Влияние генераторов U_D, I^+ и I^-

Примечание. Наличие полного сопротивления источника может привести также к паразитным колебаниям на выходе, когда входной сигнал изменяется медленно. Чтобы избежать этой проблемы, следовало бы использовать компараторы со слабыми токами поляризации (входы с полевым транзистором с PN-переходом или с полевым МОП-транзистором). Или же следует обеспечить малое значение сопротивления генератора. Другим решением может быть использование схемы с триггером Шмитта.

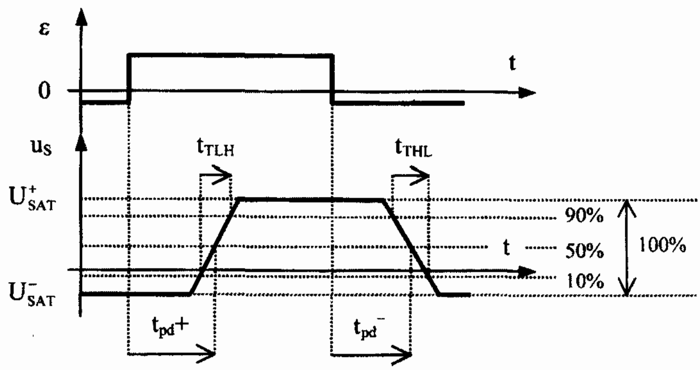
• ***Выходное напряжение высокого и низкого уровней.*** Это напряжения насыщения с высокой и с низкой стороны. Они зависят от конфигурации выхода.

• ***Время отклика или задержки*** (рис. 22.5). Не следует путать время отклика (t^+_{pd} и t^-_{pd}) с временем перехода (t_{TLH} и t_{THL} или время нарастания t_r и время спада t_f) выходного напряжения, измеренного между 10% и 90% полного отклонения.

Вопрос. Имеем схему инвертирующего триггера Шмитта (рис. 22.6), в которой R_1 = 500 кОм, R_2 = 1 Мом, R_3 = 3,3 кОм, $U_{Ref} = V_{CC}/2$ и

$V_{CC} = 10$ В. Выход компаратора на открытый коллектор; напряжение насыщения выходного транзистора $U_{CE\,нас} \approx 0{,}2V$. Питание компаратора включено между V_{CC} и массой. Дать выражения и рассчитать напряжения высокого и низкого порогов.

Рис. 22.5. Время отклика



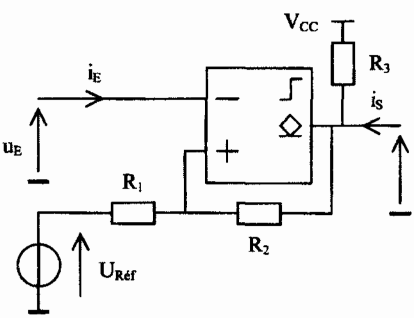


Рис. 22.6. Инвертирующий триггер Шмитта

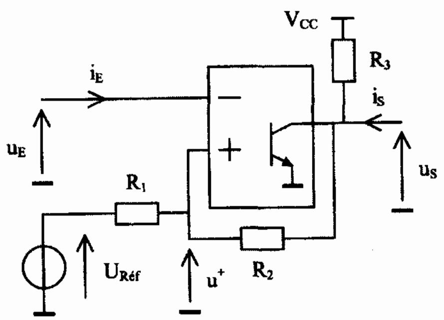


Рис. 22.7. Триггер Шмитта с транзистором на выходе

Ответ. Следует начать с установки транзистора на выходе компаратора (рис. 22.7). Тогда становится ясным, что низкий выходной уровень устанавливается этим транзистором, а высокий уровень — сопротивлением R_3, называемым «pull-up».

Низкий порог. Изначально транзистор насыщен, откуда:

$$u^{+} = \frac{R_1 U_{CE\,\text{нас}} + R_2 U_{Ref}}{R}{}_{1} + R_2.$$

Транзистор переходит от насыщения к запертому состоянию при $u_E = u^{+}$, откуда:

$$U_{E\,\text{низк}} = \frac{R_1 U_{CE\,\text{нас}} + R_2 U_{Ref}}{R}{}_{1} + R_2 \Rightarrow U_{E\,\text{низк}} \approx 3{,}4 \text{ В}.$$

Высокий порог. Транзистор изначально заперт, откуда, полагая $i_S = 0$, получим:

$$u^+ = \frac{R_1 V_{CC} + (R_2 + R_3) U_{Ref}}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Транзистор переходит от запертого состояния к насыщению при $u_E = u^+$, откуда:

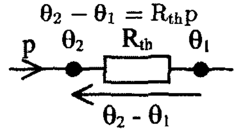
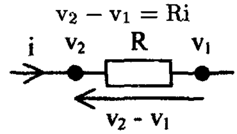
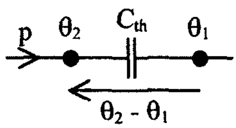
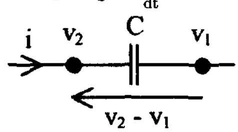
$$U_{E\,\text{выс}} = \frac{R_1 V_{CC} + (R_2 + R_3) U_{Ref}}{R_1 + R_2 + R_3} \Rightarrow U_{E\,\text{выс}} \approx 6{,}7\ \text{В}.$$

ГЛАВА 23

ТЕПЛОВЫЕ ПОТЕРИ

23.1. Электрические аналоги тепловой модели

Таблица 23.1. Тепловые и электрические аналогии

Тепловая модель		Электрический аналог	
Величины-соотношения	**Единицы**	**Величины-соотношения**	**Единицы**
Температура θ	Кельвин К	Потенциал v	вольт В
Разность температур $\theta_2 - \theta_1$	Кельвин К	Разность потенциалов $v_2 - v_1$	вольт В
Мощность p	Ватт Вт	Ток i	ампер А
Тепловое сопротивление R_{th}	Кельвин на ватт К/Вт	Электрическое сопротивление R	Ом
Тепловой закон Ома $\theta_2 - \theta_1 = R_{th}p$ 	$К = Вт \cdot К/Вт$	Закон Ома $v_2 - v_1 = Ri$ 	$В = Ом \cdot А$
Тепловая емкость C_{th}	Джоуль на кельвин Дж/К	Электрическая емкость C	фарада Ф
$p = C_{th}\frac{d(\theta_2-\theta_1)}{dt}$ 	$Вт = Дж/К\frac{К}{с}$	$i = C\frac{d(v_2-v_1)}{dt}$ 	$А = Ф\frac{В}{с}$

Примечания.

– *Тепловая модель* описывает здесь модель с локальными постоянными, и это предполагает, что температура в каждом элементе однородна. Она предполагает аналогичную электрическую схему.
– Абсолютная температура выражается в градусах Кельвина. Если в расчетах возникает разность температур, то можно выражать

ее как в градусах Кельвина, так и в градусах Цельсия (0 °C ≈ ≈ 273,15 K).

– Соединения (последовательно или параллельно) тепловых сопротивлений подчиняются тем же правилам, что и соединение электрических сопротивлений. То же следует и для емкостей.

23.2. Пути тепловых потерь

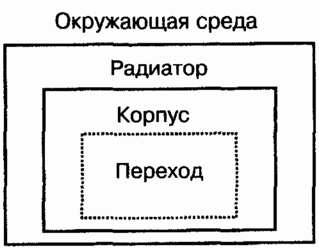


Рис. 23.1. Схема сборки

Не отходя от общих принципов, покажем решение с электронным полупроводниковым элементом (диод, транзистор, регулятор, интегральная схема и т. д.), смонтированным на радиаторе. Такая сборка элементов схематизирована на рис. 23.1.

• ***Пути тепловых потерь*** (рис. 23.2). Переход находится полностью в корпусе. Через корпус передается вся мощность. С радиатором мощность p_2 мала по сравнению с p_1, а без радиатора $p_2 = p$.

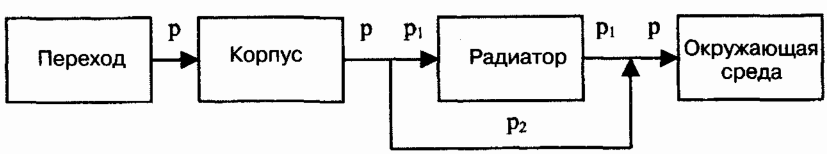


Рис. 23.2. Цепь тепловых потерь

23.3. Статическая тепловая модель (непрерывная)

Аналогия с электрическими цепями позволяет привести схему рис. 23.3.

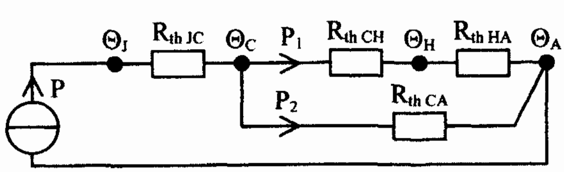


Рис. 23.3. Статическая тепловая модель

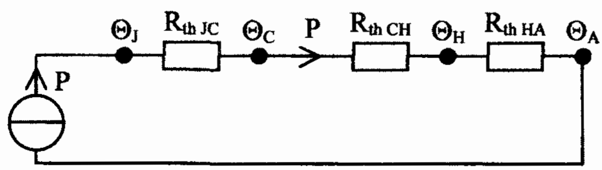
Здесь P — непрерывная мощность, выделяемая в переходе и рассеиваемая в форме тепла; Θ_J, Θ_C, Θ_H, Θ_A — непрерывные значения температуры соответственно перехода (J), корпуса (C), радиатора (H), окружающей атмосферы (A); $R_{th\,JC}$, $R_{th\,CH}$, $R_{th\,HA}$, $R_{th\,CA}$ — тепловые сопротивления соответственно переход – корпус, корпус – радиатор, радиатор – окружающая среда, корпус – окружающая среда.

Внимание! Значение теплового сопротивления корпус – окружающая среда от изготовителя элемента не соответствует схемному значению (рис. 23.3). Это значение может использоваться при отсутствии радиатора.

Метод

Если реальное значение теплового сопротивления корпус – окружающая среда неизвестно, следует использовать схему рис. 23.4, чтобы не переоценить тепловое сопротивление пары радитор – среда.

Рис. 23.4. Тепловая статическая модель без R_{thCA}



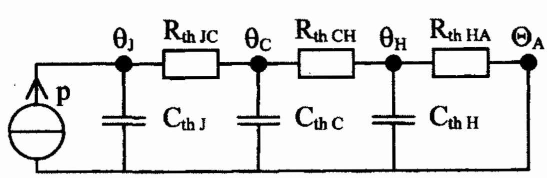
«Тепловой» закон Ома, примененный к рис. 23.4, позволяет определить максимальное значение $R_{th\,HA}$ в случае постоянной мощности.

$$\theta_J - \theta_A = P(R_{th\,JC} + R_{th\,CH} + R_{th\,HA}).$$

23.4. Динамическая тепловая модель (переходная)

Статическая модель недостаточна для оценки максимальной температуры перехода при импульсных процессах. Аналогия с электрическими величинами позволяет разработать схему рис. 23.5.

Рис. 23.5. Тепловая динамическая модель



Здесь p — мгновенная мощность, выделяемая в переходе и рассеиваемая в форме тепла; Θ_J, Θ_C, Θ_H — мгновенные значения температур соответственно перехода (J), корпуса (C), радиатора (H); θ_A — предполагаемая постоянной температура окружающей атмосферы; $R_{th\,JC}$, $R_{th\,CH}$,

$R_{th\,HA}$, R_{thCA} — тепловые сопротивления соответственно переход – корпус, корпус – радиатор, радиатор – окружающая атмосфера, корпус – окружающая атмосфера; C_{thJ}, C_{thC}, C_{thH} — тепловые емкости соответственно перехода, корпуса, радиатора.

23.4.1. Последовательность импульсов мощности в установившемся режиме

Имеем мощность p (рис. 23.6) с периодом T и коэффициентом импульсного заполнения $\alpha = t_1/T$. Здесь P_{Moy} — средняя мощность последовательности импульсов.

$$P_{Moy} = \alpha P_{Max}$$

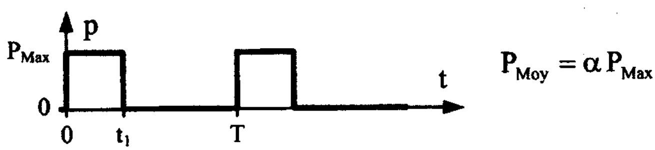


Рис. 23.6. Последовательность импульсов мощности в установившемся режиме

• ***Средняя температура перехода*** θ_{Moy}. Она определяется из статической модели (рис. 23.7).

$$\theta_{JMoy} - \theta_A = P_{Moy}(R_{th\,JC} + R_{th\,CH} + R_{th\,HA}).$$

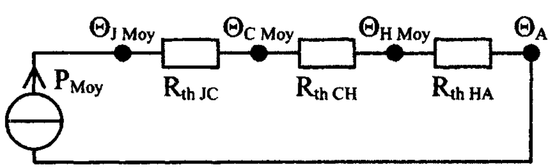


Рис. 23.7. Тепловая статическая модель средних значений

• ***Максимальная температура перехода, полагая температуру корпуса постоянной.*** В установившемся режиме, если температура корпуса может рассматриваться постоянной, она равна своему среднему значению (рис. 23.8).

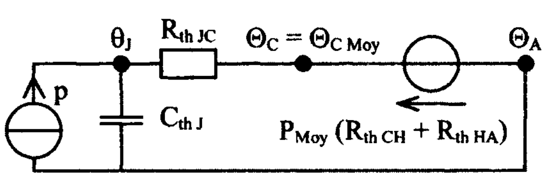


Рис. 23.8. Динамическая модель при $\theta_C = \theta_{Ccp}$

Дифференциальное уравнение динамической модели при $\theta_C = \theta_{Ccp}$

$$\tau_{th}\frac{d(\theta_J - \theta_C)}{dt} + (\theta_J - \theta_C) = pR_{th\,JC}, \quad \text{где} \quad \tau_{th} = R_{th\,JC}C_{thJ}.$$

Решение дифференциального уравнения для последовательности импульсов мощности позволяет построить временнýю диаграмму в установившемся режиме (рис. 23.9).

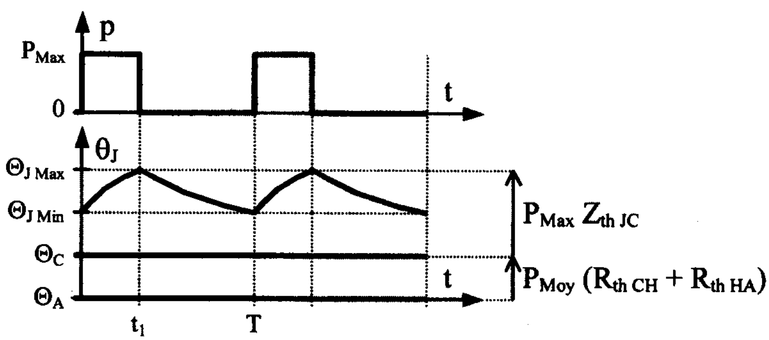


Рис. 23.9. Временнáя диаграмма в установившемся режиме

Метод

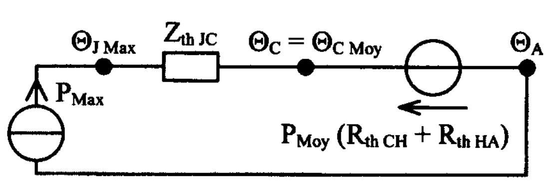
Можно определить $\theta_{J\,Max}$ проще, исходя из «*полного теплового сопротивления*» или «*переходного теплового сопротивления*» между переходом и корпусом, обозначаемое $Z_{th\,JC}$, которое зависит от коэффициента импульсного заполнения и от длительности импульса.

$$\theta_{J\,Max} - \theta_C = P_{Max}Z_{th\,JC}, \quad \text{где} \quad Z_{th\,JC} = R_{th\,JC}\frac{1 - e^{-t_1/\tau_{th}}}{1 - e^{-T/\tau_{th}}}.$$

Практически для каждой составляющей каталоги дают граф полного теплового сопротивления $Z_{th\,JC}$ в функции длительности импульса t_1, связанного с коэффициентом импульсного заполнения α. Полное уравнение модели с полным тепловым сопротивлением (рис. 23.10) запишется:

$$\theta_{J\,Max} - \theta_A = P_{Max}Z_{th\,JC} + P_{Moy}(R_{th\,CH} + R_{th\,HA}).$$

Рис. 23.10. Модель № 1 с полным тепловым сопротивлением



Поскольку $P_{Moy} = \alpha P_{Max}$, получим (рис. 23.11):

$$\theta_{J\,Max} - \theta_A = P_{Max} Z_{th\,JC} + \alpha P_{Max}(R_{th\,CH} + R_{th\,HA}).$$

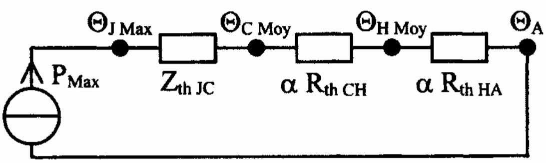


Рис. 23.11. Модель № 2 с полным тепловым сопротивлением

Примечание. Мы рассматривали здесь температуру корпуса θ_C постоянной (и равной θ_{CMoy}). Обычно это верно при длительности импульса меньше приблизительно 1 с, учитывая тепловые постоянные времени.

• ***Максимальная температура перехода для длительности импульса*** t_1 ***по сравнению с тепловой постоянной времени*** $\tau_{th} = R_{th\,JC}C_{thJ}$. Обычно это верно для длительности импульса больше приблизительно 1 с.

$$t_1 \gg \tau_{th} \Rightarrow T \gg \tau_{th} \Rightarrow Z_{th} = R_{thLC}.$$

Если θ_C может рассматриваться постоянной (рис. 23.12), то:

$$\theta_{J\,Max} - \theta_A = P_{Max} R_{th\,JC} + \alpha P_{Max}(R_{th\,CH} + R_{th\,HA}).$$

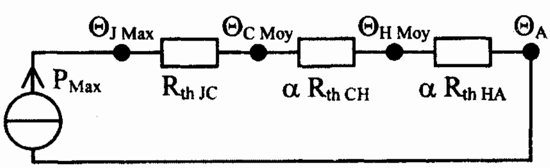


Рис. 23.12. $t_1 \gg \tau_{th}$ и $\theta_C = \mathrm{const}$

Если θ_H может рассматриваться постоянной (рис. 23.13), то:

$$\theta_{J\,Max} - \theta_A = P_{Max}(R_{th\,JC} + Z_{th\,CH}) + \alpha P_{Max} R_{th\,HA}.$$

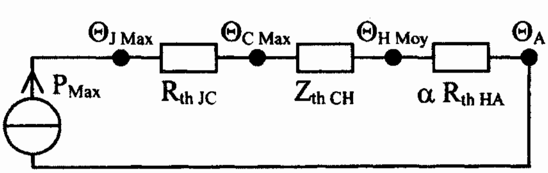
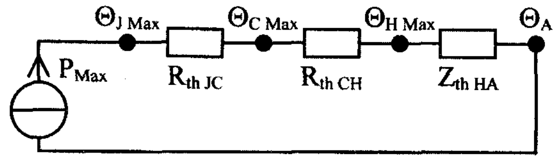


Рис. 23.13. $\theta_H = \mathrm{const}$

Если θ_H не может рассматриваться постоянной (рис. 23.14), то:

$$\theta_{J\,Max} - \theta_A = P_{Max}(R_{th\,JC} + R_{th\,CH} + Z_{th\,HA}).$$

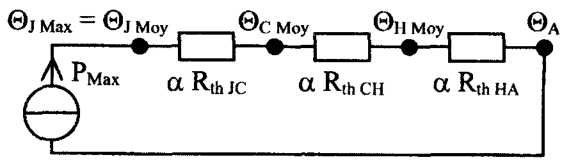
Рис. 23.14. $\theta_H \neq \text{const}$



• ***Максимальная температура перехода для периода T, малого по сравнению с тепловой постоянной времени*** $\tau_{th} = R_{th\,JC}C_{thJ}$ (рис. 23.15).

$$T \ll \tau_{th} \Rightarrow t_1 \ll \tau_{th} \Rightarrow Z_{th\,JC} = \frac{t_1}{T}R_{th\,JC} = \alpha R_{th\,JC}.$$

Рис. 23.15. $T \ll \tau_{th}$



23.4.2. Единственный импульс мощности

Имеем импульс мощности p (рис. 23.16). Считается, что период T очень большой (теоретически равный бесконечности) по сравнению с тепловой постоянной времени τ_{th}. Тогда:

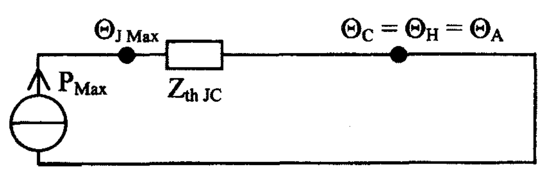
$$Z_{th\,JC} = R_{th\,JC}\left(1 - e^{-t_1/\tau_{th}}\right).$$

Рис. 23.16. Единственный импульс мощности

• ***Максимальная температура перехода при температуре корпуса предположительно постоянна.*** Если температура корпуса может рассматриваться постоянной, то она равна температуре окружающей среды θ_A (рис. 23.17). Тогда:

$$\theta_{J\,Max} - \theta_C = P_{Max}Z_{th\,JC}, \quad \text{где} \quad \theta_C = \theta_H = \theta_A.$$

Рис. 23.17. $\theta_C = \text{const}$



23.4.3. Наложение последовательности импульсов мощности на постоянную составляющую

При мощности p (рис. 23.18) с периодом T и коэффициентом импульсного заполнения $\alpha = t_1/T$ средняя мощность определится как:

$$P_{Moy} = \alpha P_{Max} + (1 - \alpha)P_{Min} = \alpha(P_{Max} - P_{Min}) + P_{Min}.$$

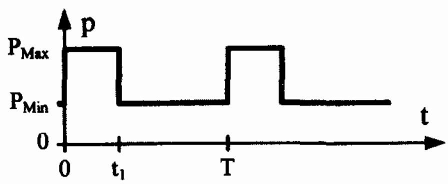


Рис. 23.18. Последовательность импульсов + + постоянная составляющая

> ***Метод***
> 1) Последовательность импульсов мощности $P_{Pulse} = P_{Max} - P_{Min}$ дает $\theta_{J\,Max\,Pulse}$.
> 2) Постоянная составляющая мощности $P_{Direct} = P_{Min}$ дает $\theta_{J\,Direct}$.
> 3) Рассчитываем $\theta_{J\,Max} = \theta_{J\,Max\,Pulse} + \theta_{J\,Direct}$.

23.5. Составляющие охлаждения

> ***Метод***
> Принцип расчета тот же, что и при одной составляющей. Нужно выбрать радиатор, тепловое сопротивление которого $R_{th\,HA}$ обеспечивает каждому переходу температуру, меньшую максимально допустимой.

Вопрос. Имеем статическую модель (рис. 23.19) двух составляющих, смонтированных на один радиатор. Определить соотношение, позволяющее выбрать $R_{th\,HA}$.

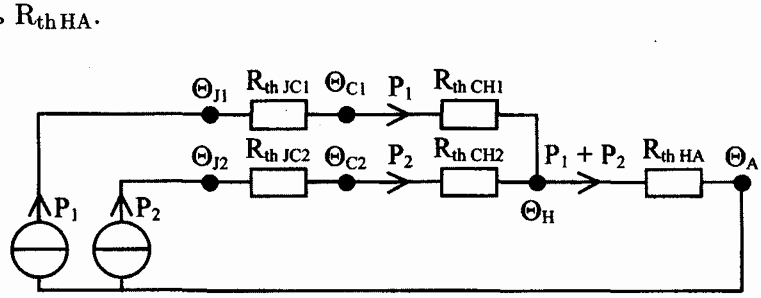


Рис. 23.19. Статическая модель двух составляющих на одном радиаторе

Ответ. «Тепловой» закон Ома позволяет записать:

$$\theta_{H} - \theta_{A} = (P_1 + P_2)R_{th\,HA},$$

$$\theta_{J1} - \theta_{H} = P_1(R_{thJC1} + R_{thCH1}), \qquad \theta_{J2} - \theta_{H} = P_2(R_{thJC2} + R_{thCH2}).$$

Отсюда:

$$R_{th\,HA} < \frac{\theta_{J1} - \theta_{A} - P_1(R_{thJC1} + R_{thCH1})}{P_1 + P_2}$$

и

$$R_{th\,HA} < \frac{\theta_{J2} - \theta_{A} - P_2(R_{thJC2} + R_{thCH2})}{P_1 + P_2}.$$

ЧАСТЬ III

ЭЛЕКТРОННЫЕ УСТРОЙСТВА

ГЛАВА 24

АНАЛОГОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

24.1. Назначение. Идеальные фильтры

• ***Назначение.*** *Аналоговый частотный фильтр* (постоянного действия) реализует линейную операцию над изменяющимся во времени сигналом с целью его изменения. Например: регулирование высоких и низких аудиочастот, извлечение некоторых частот, снижение шума и т. д.

• ***Определение комплексной передаточной функции*** (См. гл. 5).

$$\underline{\mathrm{T}} = \frac{\underline{\mathrm{S}}}{\underline{\mathrm{E}}} = \frac{\mathrm{S}_{\mathrm{M}ax}}{\mathrm{E}_{\mathrm{M}ax}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_{\mathrm{S}}-\varphi_{\mathrm{E}})} = |\underline{\mathrm{T}}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}.$$

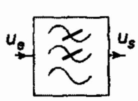
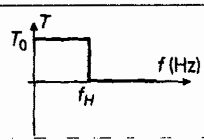
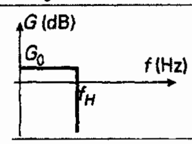
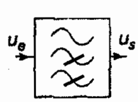
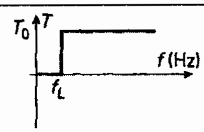
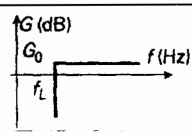
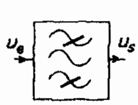
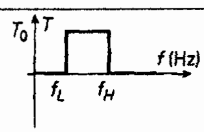
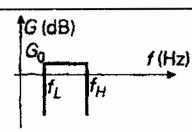
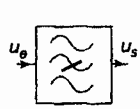
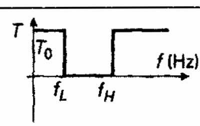
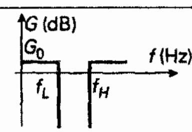
Примечание. Переход к передаточной функции в области преобразования Лапласа осуществляется простой заменой $\mathrm{j}\omega$ оператором p (см. гл. 10).

• ***Идеальные фильтры.*** В дополнение к кривым модулей и коэффициентов усиления, приведенных в табл. 24.1, следует отметить, что фазовый сдвиг идеального фильтра должен быть линейным.

Примечания. Некоторые физически реализуемые фильтры.

- Выходной сигнал всех физически реализуемых фильтров сдвинут по фазе относительно входного сигнала, так как комплексная передаточная функция всегда содержит не равную нулю мнимую часть. Это следствие связи воздействия и отклика (когда на входе фильтра нет сигнала, его нет и на выходе).
- Чтобы отфильтрованный сигнал не был деформирован из-за фазовых искажений, нужно, чтобы фазовый сдвиг фильтра был линейным (групповая задержка постоянна). Поскольку фильтр с линейным фазовым сдвигом не реализуем в аналоговой форме, выходной сигнал аналогового фильтра всегда деформирован. На практике, если этот критерий первостепенный, выбирают аналоговый фильтр, наиболее близкий по своим свойствам к линейному фазовому сдвигу в полосе пропускания сигнала.
- Чем круче срез фильтра, тем быстрее меняется его фазовый сдвиг (следствие закона Боде–Бейарда).

Таблица 24.1. Идеальные фильтры

Типы фильтров	**Обозначения**	**Идеальные передаточные функции**	**Идеальные кривые коэффициента усиления**	**Идеальная полоса пропускания**
Низкой частоты				$[0, f_H]$
Высокой частоты				$[f_L, \infty]$
Полосный фильтр				$[f_L, f_H]$
Заграждающий фильтр				$[0, f_L]$ и $[f_H, \infty]$

24.2. Элементарные передаточные функции

Приведение частоты:

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}, \quad \text{где} \quad \omega = 2\pi f.$$

24.2.1. Передаточные функции первого порядка

а) Низкочастотный фильтр 1-го порядка. Передаточная функция и диаграмма Боде (табл. 24.2 и рис. 24.1)

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + jx}.$$

Таблица 24.2.

	$T = \lvert\underline{T}\rvert = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$G = -20\log\sqrt{1+x^2}$	$\varphi = -\operatorname{arctg}(x)$
$x = 1$	$T = 1/\sqrt{2}$	$G \approx -3$ дБ	$\varphi = -45°$
Асимптоты для $x \ll 1$	$T \approx 1$	$G \approx 0$ дБ	$\varphi \approx 0°$
Асимптоты для $1 \ll x$	$T \approx 1/x$	$G \approx -20\log(x)$ (−20 дБ на декаду)	$\varphi \approx -90°$

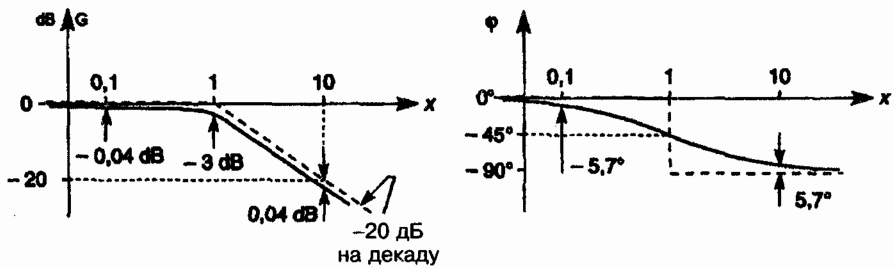


Рис. 24.1. Низкочастотный (НЧ) фильтр 1-го порядка

Пример 24.2.1. (Рис. 24.2 и рис. 24.3)

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_0}}, \quad \text{где} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

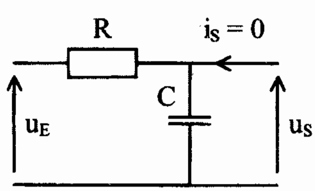


Рис. 24.2. Низкочастотный RC-фильтр 1-го порядка

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{1}{1 + j\,\dfrac{f}{f_0}}, \quad \text{где} \quad f_0 = \frac{R}{2\pi L}$$

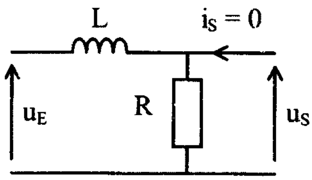


Рис. 24.3. Низкочастотный LR-фильтр 1-го порядка

б) Высокочастотный фильтр 1-го порядка. Передаточная функция и диаграмма Боде (табл. 24.3 и рис. 24.4)

$$\underline{T} = \frac{jx}{1 + jx}.$$

Таблица 24.3.

	$T = \lvert\underline{T}\rvert = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$G = 20\log x - 20\log\sqrt{1+x^2}$	$\varphi = -\operatorname{arctg}(x)$
$x = 1$	$T = 1/\sqrt{2}$	$G \approx -3$ дБ	$\varphi = +45°$
Асимптоты для $x \ll 1$	$T \approx x$	$G \approx 20\log(x)$ +20 дБ на декаду)	$\varphi \approx +90°$
Асимптоты для $1 \ll x$	$T \approx 1$	$G \approx 0$ дБ	$\varphi \approx 0°$

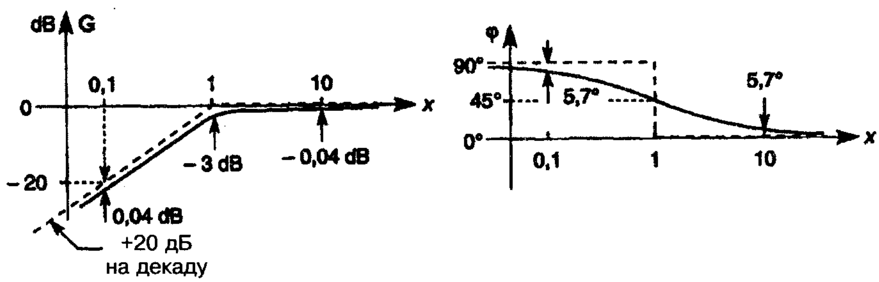


Рис. 24.4. Высокочастотный (ВЧ) фильтр 1-го порядка

Пример 24.2.2. (Рис. 24.5 и рис. 24.6)

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{j\,\dfrac{f}{f_0}}{1 + j\,\dfrac{f}{f_0}}, \quad \text{где} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

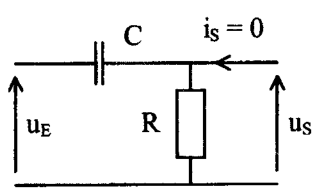


Рис. 24.5. Высокочастотный RC-фильтр 1-го порядка

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{j\,\dfrac{f}{f_0}}{1 + j\,\dfrac{f}{f_0}}, \quad \text{где} \quad f_0 = \frac{R}{2\pi L}$$

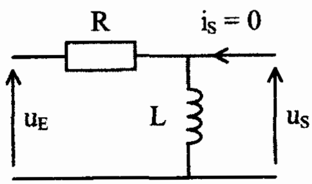


Рис. 24.6. Низкочастотный LR-фильтр 1-го порядка

Вопрос. Получить выражение передаточной функции RC-фильтра (см. рис. 24.5).

Ответ. Используя делитель напряжения, получим:

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{R}{R + 1/jC\omega} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

24.2.2. Передаточные функции второго порядка

Мы обозначаем: f_0 — собственная частота, ω_0 — собственная угловая частота, m — коэффициент затухания, $Q_0 = 1/(2m)$ — кратность перенапряжения.

а) Низкочастотный фильтр 2-го порядка

Каким бы ни было затухание $m > 0$, общие выражения передаточной функции, ее модуля, ее фазового сдвига запишутся как:

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + 2mjx + j^2x^2}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2mx)^2}} \qquad \begin{cases} x < 1\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{2mx}{1-x^2}, \\ x = 1\varphi = -90^\circ, \\ x > 1\varphi = -180^\circ + \operatorname{arctg}\frac{2mx}{1-x^2}. \end{cases}$$

В зависимости от значения затухания m возможны три случая.

$m > 1$ (два действительных корня). Диаграмма Боде приведена на рис. 24.7.

$$\underline{T} = \frac{1}{(1 + ja^{-1}x)(1 + jax)},$$

где $a^{-1} = m - \sqrt{m^2 - 1}$, $a = m + \sqrt{m^2 - 1}$, $a^{-1} + a = 2m$;

$$T = |\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (a^{-1}x)^2}\sqrt{1 + (ax)^2}};$$

$$G = -20\log\sqrt{1 + (a^{-1}x)^2} - 20\log\sqrt{1 + (ax)^2};$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}(a^{-1}x) - \operatorname{arctg}(ax).$$

Таблица 24.4.

	T	G	φ
$x = 1$	$T = 1/2m$	$G = -20\log(2m) \approx$ $\approx -6 - 20\log(m)$	$\varphi = -90°$
$x_L = -m + \sqrt{m^2+1}$			$\varphi = -45°$
$x_H = +m + \sqrt{m^2+1}$			$\varphi = -135°$
Асимптоты для $x \ll 1/a$	$T \approx 1$	$G \approx 0$ дБ	$\varphi \approx 0°$
Асимптоты для $1/a \ll x \ll a$	$T \approx 1/ax$	$G \approx -20\log(x)$ (−20 дБ на декаду)	$\varphi = -90°$
Асимптоты для $a \ll x$	$T \approx 1/x^2$	$G \approx -40\log(x)$ (−40 дБ на декаду)	$\varphi \approx -180°$

Примечание. $x_H - x_L = 2m$.

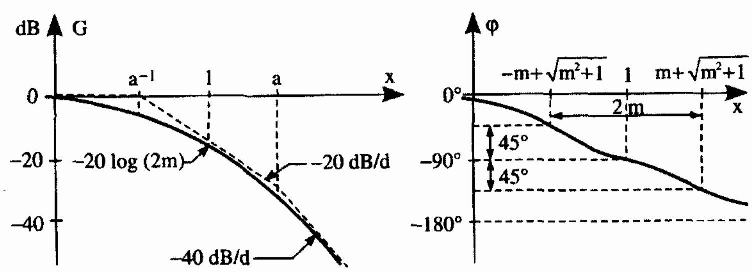


Рис. 24.7. Низкочастотный фильтр 2-го порядка при $m > 1$

$m = 1$ (два равных действительных корня). Диаграмма Боде приведена на рис. 24.8

$\underline{T} = \frac{1}{(1+jx)^2}$ (два одинаковых последовательно соединенных фильтра 1-го порядка)

Таблица 24.5.

	$T = \lvert\underline{T}\rvert = 1/(1+x^2)$	$G = -20\log(1+x^2)$	$\varphi = -2\,\mathrm{arctg}(x)$
$x = 1$	$T = 1/2$	$G =$ $-20\log(2m) \approx$ $\approx -6 - 20\log(m)$	$\varphi = -90°$
$x_L = -m + \sqrt{m^2+1}$			$\varphi = -45°$
$x_H = +m + \sqrt{m^2+1}$			$\varphi = -135°$
Асимптоты для $x \ll 1$	$T \approx 1$	$G \approx 0$ дБ	$\varphi \approx 0°$
Асимптоты для $1 \ll x$	$T \approx 1/x^2$	$G \approx -40\log(x)$ (−40 дБ на декаду)	$\varphi \approx -180°$

$m < 1$ (два комплексных сопряженных корня). Диаграмма Боде приведена на рис. 24.9.

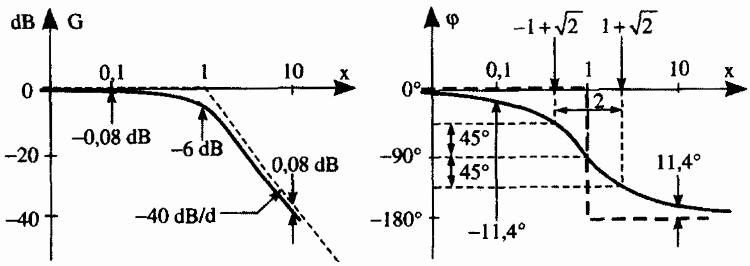


Рис. 24.8. Низкочастотный фильтр 2-го порядка при m = 1

Таблица 24.6.

	T	G	φ
$x = 1$	T = 1/2m	G = −6 дБ	φ = −90°
$x_L = -1 + \sqrt{2}$			φ = −45°
$x_H = 1 + \sqrt{2}$			φ = −135°
Асимптоты для $x \ll 1$	T ≈ 1	G ≈ 0 дБ	φ ≈ 0°
Асимптоты для $1 \ll x$	$T \approx 1/x^2$	$G \approx -40\log(x)$ (−40 дБ на декаду)	φ ≈ −180°

Возможно несколько случаев.

а) $\sqrt{2}/2 < m < 1$. Выходная переменная не имеет максимума и остается ниже асимптот.

б) $m = \sqrt{2}/2$. Процесс предельно апериодический. Для $x = 1$, $T = 1/\sqrt{2}$ и $G \approx -3$ дБ.

в) $m < \sqrt{2}/2$. При $x = \sqrt{1 - 2m^2}$ выходная переменная содержит максимум.

$$G_{Max} = 20\log(T_{Max}), \qquad T_{Max} = \frac{1}{2m\sqrt{1-2m^2}}.$$

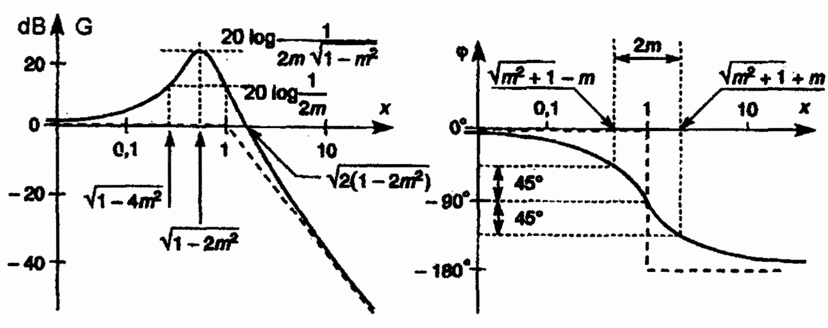


Рис. 24.9. Низкочастотный фильтр 2-го порядка при $m < \sqrt{2}/2$

Пример 24.2.3. (Рис. 24.10 и рис. 24.11)

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{1}{1 + 2mj\,\frac{f}{f_0} + j^2\,\frac{f^2}{f_0^2}},$$

где $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ и $m = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

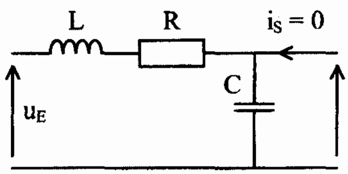


Рис. 24.10. Пассивный низкочастотный RLC-фильтр 2-го порядка

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{1}{1 + 2mj\,\frac{f}{f_0} + j^2\,\frac{f^2}{f_0^2}},$$

где $f_0 = \dfrac{1}{2\pi R\sqrt{C_1C_2}}$ и $m = \sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}$

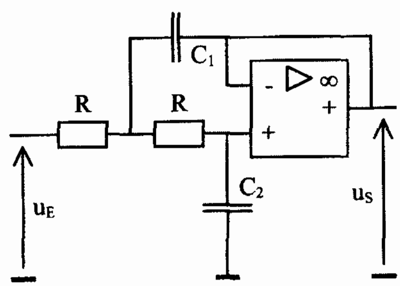


Рис. 24.11. Активный низкочастотный фильтр Салена и Кея 2-го порядка

б) Высокочастотный фильтр 2-го порядка

Каким бы ни было затухание $m > 0$, общие выражения передаточной функции, ее модуля, ее фазового сдвига запишутся как:

$$\underline{T} = \frac{j^2x^2}{1 + 2mjx + j^2x^2},$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2mx)^2}} \qquad \begin{cases} x < 1\varphi = 180° - \operatorname{arctg}\frac{2mx}{1-x^2}, \\ x = 1\varphi = +90°, \\ x > 1\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2mx}{x^2-1}. \end{cases}$$

Диаграмма Боде (рис. 24.12) передаточной функции высокочастотного фильтра 2-го порядка получается из такой же диаграммы передаточной функции низкочастотного фильтра 2-го порядка:

– Для усиления G, обеспечив симметрию по отношению к уравнению прямой $x = 1$.

– Для фазы φ, обеспечив перемещение на $+180°$.

Пример 24.2.4. (Рис. 24.13)

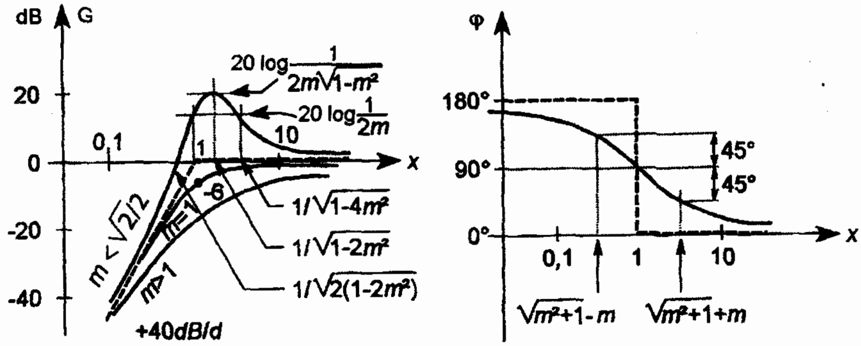


Рис. 24.12. Высокочастотный фильтр 2-го порядка

$$\underline{T} = \frac{\underline{\underline{U_S}}}{\underline{U_E}} = \frac{j^2\,\dfrac{f^2}{f_0^2}}{1 + 2mj\,\dfrac{f}{f_0} + j^2\,\dfrac{f^2}{f_0^2}},$$

где $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ и $m = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

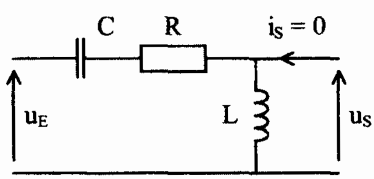


Рис. 24.13. Пассивный высокочастотный фильтр 2-го порядка

Вопрос. Получить выражение передаточной функции RLC-фильтра (см. рис. 24.13).

Ответ. Используя делитель напряжения, получим:

$$\underline{T} = \frac{\underline{\underline{U_S}}}{\underline{U_E}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + 1/(jC\omega)} = \frac{j^2LC\omega^2}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2},$$

откуда:

$$\underline{T} = \frac{\underline{\underline{U_S}}}{\underline{U_E}} = \frac{j^2\omega^2/\omega_0^2}{1 + 2mj\omega/\omega_0 + j^2\omega^2/\omega_0^2},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{2m}{\omega_0} = RC \Rightarrow m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

в) Полосный фильтр 2-го порядка

Каким бы ни было затухание $m > 0$, общие выражения передаточной функции, ее модуля, ее фазового сдвига запишутся как:

$$\underline{T} = \frac{2mjx}{1 + 2mjx + j^2x^2} = \frac{1}{1 + jQ_0(x - 1/x)}, \quad \text{где} \quad Q_0 = 1/2m.$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2mx)^2}} \qquad \begin{cases} x < 1\varphi = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{2mx}{1-x^2}, \\ x = 1\varphi = 0^\circ, \\ x > 1\varphi = -90^\circ + \operatorname{arctg}\frac{2mx}{x^2-1}. \end{cases}$$

Таблица 24.7.

	T	G	φ
$x = 1$	$T = 1$	$G = 0$	$\varphi = 0°$
$x_L = -m + \sqrt{m^2+1}$	$T = 1/\sqrt{2}$	$G \approx -3$ дБ	$\varphi = 45°$
$x_H = +m + \sqrt{m^2+1}$		$G \approx -3$ дБ	$\varphi = -45°$
Асимптоты для $x \ll 1$	$T \approx 2mx$	$G \approx 20\log(2m) + 20\log(x)$ (+20 дБ на декаду)	$\varphi \approx 90°$
Асимптоты для $1 \ll x$	$T \approx 2m/x$	$G \approx 20\log(2m) - 20\log(x)$ (−20 дБ на декаду)	$\varphi \approx -90°$
Два асимптотических приближения пересекаются на прямой с уравнением $x = 1$, являющейся осью симметрии кривой амплитуды. Они пересекаются при 0 дБ и $m = 1/2$, ниже — при $m < 1/2$ и выше — при $m > 1/2$.			

Полоса пропускания (ПП) при −3 дБ:

$$\frac{\text{ПП}_{(-3\text{ дБ})}}{f_0} = x_H - x_L = 2m = \frac{1}{Q_0}.$$

Диаграмма Боде (рис. 24.14) передаточной функции полосного фильтра 2-го порядка получается из такой же диаграммы передаточной функции низкочастотного фильтра 2-го порядка:

- Для усиления G, добавив $20\log(2mx)$ к усилению низкочастотного фильтра 2-го порядка.
- Для фазы φ, обеспечив перемещение на +90°.

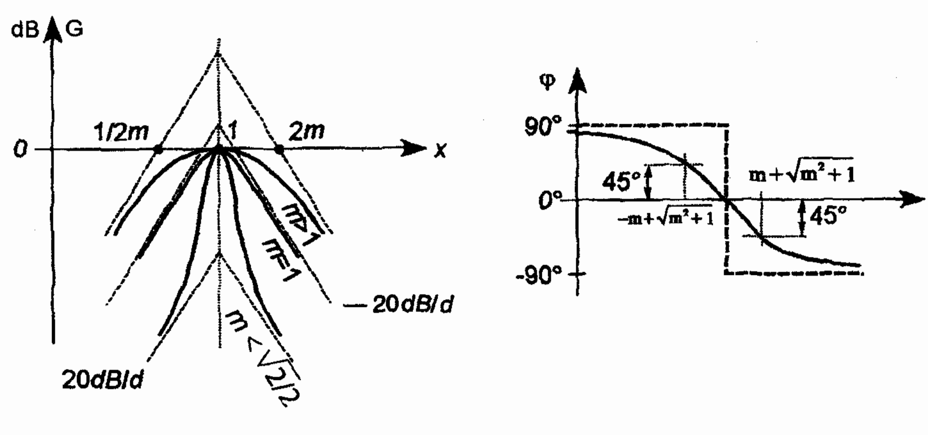


Рис. 24.14. Полосный фильтр 2-го порядка

Пример 24.2.5. (Рис. 24.15)

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{2mj\,\dfrac{f}{f_0}}{1 + 2mj\,\dfrac{f}{f_0} + j^2\,\dfrac{f^2}{f_0^2}},$$

где $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ и $m = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

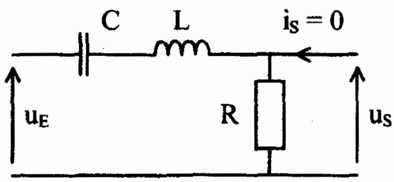


Рис. 24.15. Пассивный полосный RLC-фильтр 2-го порядка

Вопрос. Получить выражение передаточной функции RLC-фильтра (см. рис. 24.15).

Ответ. Используя делитель напряжения, получим:

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{R}{R + jL\omega + 1/(jC\omega)} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2},$$

откуда:

$$\underline{T} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{2mj\omega/\omega_0}{1 + 2mj\omega/\omega_0 + j^2\omega^2/\omega_0^2},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\frac{2m}{\omega_0} = RC \Rightarrow m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

г) Заграждающий фильтр 2-го порядка

Каким бы ни было затухание $m > 0$, общие выражения передаточной функции, ее модуля, ее фазового сдвига запишутся как:

$$\underline{T} = \frac{1 + j^2x_2}{1 + 2mjx + j^2x^2} = 1 - \frac{2mjx}{1 + jQ_0(x - 1/x)}, \quad \text{где} \quad Q_0 = 1/2m.$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2mx)^2}} \qquad \begin{cases} x < 1 & \varphi = -\operatorname{arctg}\frac{2mx}{1-x^2}, \\ x = 1^- & \varphi = -90^\circ, \\ x = 1^+ & \varphi = +90^\circ \\ x > 1 & \varphi = +\operatorname{arctg}\frac{2mx}{x^2-1}. \end{cases}$$

Примечание. Передаточная функция заграждающего фильтра 2-го порядка равна передаточной функции низкочастотного фильтра второго порядка за вычетом передаточной функции полосного фильтра 2-го порядка. Это можно рассматривать также как сумму передаточной функции низкочастотного фильтра 2-го порядка и высокочастотного фильтра 2-го порядка.

24.3. Аппроксимация идеальных аналоговых фильтров

При невозможности реализации идеальных фильтров мы стремимся приблизиться к ним, используя передаточные функции вида:

$$\underline{T} = \frac{N(jx)}{D(jx)} = \frac{b_0 + b_1 jx + b_2(jx)^2 + \cdots + b_m(jx)^m}{a_0 + a_1 jx + a_2(jx)^2 + \cdots + a_n(jx)^n}, \quad \text{где} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}.$$

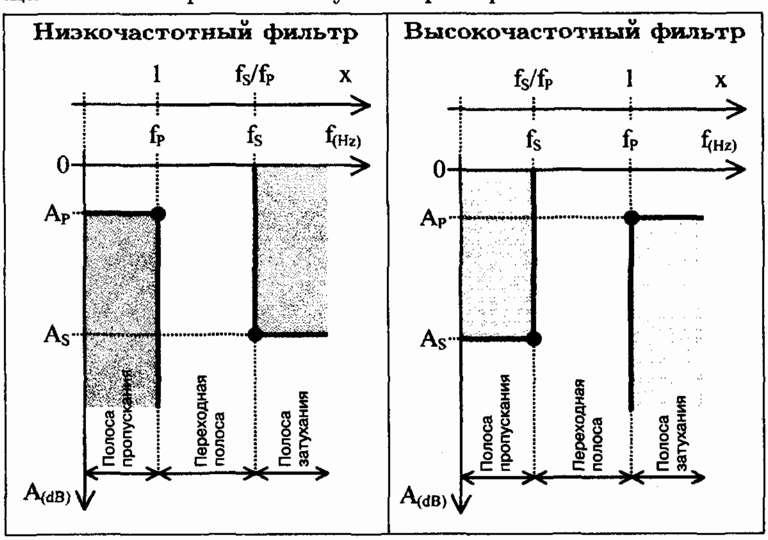
Примечание. Часто рассматривают функцию ослабления (или затухания) $\underline{A}$ вместо передаточной функции $\underline{T}$.

$$\underline{A} = \frac{1}{\underline{T}} = \frac{D(jx)}{N(jx)}.$$

> ***Метод***
>
> Эти передаточные функции реализуемы последовательным соединением элементарных функций 1-го и 2-го порядков. Практически мы выбираем габариты и тип желаемого фильтра, затем по программе или с помощью таблиц мы определяем различные элементарные передаточные функции для их последовательного соединения. Принцип последовательного соединения передаточных функций см. гл. 5.

• ***Степень ослабления фильтров*** (табл. 24.8)

Таблица 24.8. Размеры полос затухания фильтров



A_P — максимальное ослабление в полосе пропускания в дБ.

A_S — минимальное ослабление в полосе затухания в дб.

f_P — предельная частота полосы пропускания.

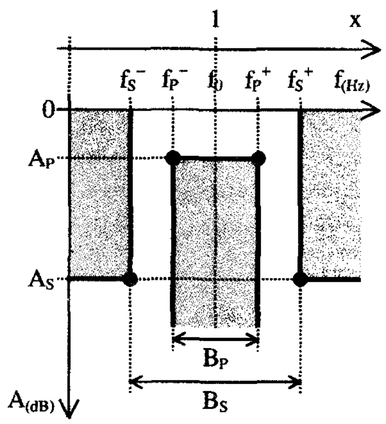
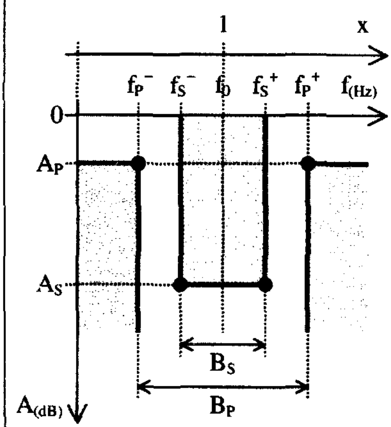
f_S — предельная частота полосы затухания.
B_P — ширина полосы на уровне полосы пропускания.
B_S — ширина полосы на уровне полосы затухания.

$$B_P = f_P^+ - f_P^- B_S = f_S^+ + f_S^-.$$

f_0 — центральная частота.

$$f_0 = \sqrt{f_S^+ f_S^-} = \sqrt{f_P^+ f_P^-}.$$

Таблица 24.8 (окончание)

Симметричный полосный фильтр	**Симметричный полосно-заграждающий фильтр**
	

• ***Типы фильтров*** (табл. 24.9).

Таблица 24.9. Типы фильтров

	Свойства
Баттерворта (Butterworth)	– Самое плоское ослабление в полосе пропускания. – Частота среза всегда определяется при $G \approx -3$ дБ. – Для заданных габаритов порядок фильтра относительно высок.
Лежандра (Legendre)	– Равномерность ослабления в полосе пропускания. – Крутой срез в переходной полосе. – Почти столь же равномерный, как и Баттерворт, для меньшего порядка. – Равномерная групповая задержка
Чебышева	– Амплитудные колебания в полосе пропускания постоянны. – Крутой срез в переходной полосе.
Чебышева инверсный	– Для заданных габаритов порядок фильтра относительно невысок. – Групповая задержка слабая и равномерная. – Хороший компромисс крутизна/сложность/равномерность/групповая задержка.

Таблица 24.9 (окончание)

Кауэра (Cauer) (эллиптический)	– Колебания в полосе пропускания. – Крутой срез в переходной полосе. – Относительно малый порядок фильтра при заданном габарите. – Нет передачи в полосе затухания
Бесселя (Bessel)	– Фазовый сдвиг явно линеен в полосе пропускания.

Пример 24.3.6. Тип Баттерворта. Модуль некоторого полинома Баттерворта (табл. 24.10) n-й степени есть:

$$|\underline{\mathrm{A}}(\mathrm{j}x)| = \sqrt{1 + x^{2\mathrm{n}}}.$$

Таблица 24.10. Полиномы Баттерворта до 6-го порядка

Порядок n	**Полином Баттерворта $\underline{\mathrm{A}}(\mathrm{s})$, где $\mathrm{s} = \mathrm{j}x$, для реализации последовательным соединением**	**Затухания для 2-го порядка**
1	$\mathrm{s}+1$	
2	$\mathrm{s}^2 + \sqrt{2}\mathrm{s} + 1$	0,707
3	$\mathrm{s}^3 + 2\mathrm{s}^2 + 2\mathrm{s} + 1 = (\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}^2 + \mathrm{s} + 1)$	0,5
4	$\mathrm{s}^4 + 2{,}613\mathrm{s}^3 + 3{,}414\mathrm{s}^2 + 2{,}613\mathrm{s} + 1 =$ $= (\mathrm{s}^2 + 0{,}765\mathrm{s} + 1)(\mathrm{s}^2 + 1{,}848\mathrm{s} + 1)$	0,383–0,924
5	$\mathrm{s}^5 + 3{,}236\mathrm{s}^4 + 5{,}236\mathrm{s}^3 + 5{,}236\mathrm{s}^2 + 3{,}236\mathrm{s} + 1 =$ $= (\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}^2 + 0{,}618\mathrm{s} + 1)(\mathrm{s}^2 + 1{,}618\mathrm{s} + 1)$	0,309–0,809
6	$\mathrm{s}^6 + 3{,}863\mathrm{s}^5 + 7{,}464\mathrm{s}^4 + 9{,}141\mathrm{s}^3 + 7{,}464\mathrm{s}^2 + 3{,}863\mathrm{s} + 1 =$ $= (\mathrm{s}^2 + 0{,}518\mathrm{s} + 1)(\mathrm{s}^2 + \sqrt{2}\mathrm{s} + 1)(\mathrm{s}^2 + 1{,}932\mathrm{s} + 1)$	0,259–0,707 0,966

Метод

Фильтр типа Баттерворта.

1) *Низкочастотный фильтр.* Модуль нормализованной передаточной функции низкочастотного фильтра Баттерворта n-го порядка, т. е. имеющего в качестве знаменателя многочлен Баттерворта n-й степени:

$$|\underline{\mathrm{T}}(\mathrm{j}x)| = \frac{1}{|\underline{\mathrm{A}}(\mathrm{j}x)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2\mathrm{n}}}},$$

где $x = \mathrm{f}/\mathrm{f}_0$. Исходя из габарита, n-й порядок такого фильтра определяется из:

$$\mathrm{n} \geqslant \frac{\log \frac{10^{0,1\mathrm{A}_{(\text{дБ})\mathrm{S}}} - 1}{10^{0,1\mathrm{A}_{(\text{дБ})\mathrm{P}}} - 1}}{2 \log \frac{\mathrm{f_S}}{\mathrm{f_P}}}.$$

2) *Высокочастотный фильтр.* Обычно исследование высокочастотного фильтра сводят к низкочастотному, используя следующее преобразование по габаритам и передаточной функции:

$$\mathrm{s} \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{s}} \qquad (\Rightarrow x \leftrightarrow \frac{1}{x} \text{ для сниженной частоты в габарите}).$$

Учитывая симметрию коэффициентов многочленов Баттерворта, модуль нормализованной передаточной функции низкочастотного фильтра Баттерворта n-го порядка составит:

$$|\underline{\mathrm{T}}(\mathrm{j}x)| = \frac{x^{\mathrm{n}}}{|\underline{\mathrm{A}}(\mathrm{j}x)|} = \frac{x^{\mathrm{n}}}{\sqrt{1+x^{2\mathrm{n}}}}.$$

3) *Полосный фильтр.* Обычно исследование полосного фильтра сводят к низкочастотному, используя следующее преобразование по габаритам и передаточной функции:

$$\mathrm{s} \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{B}}(\mathrm{s}+1/\mathrm{s}), \quad \text{где} \quad \mathrm{B} = \mathrm{B_P}/\mathrm{f_0}.$$

Тогда передаточная функция n-го порядка заменяется на другую 2n-го порядка, что не очень просто решить. Можно реализовать полосный фильтр, используя одновременно низко- и высокочастотный фильтры n-го порядка каждый.

4) *Полосно-заграждающий фильтр.* Обычно исследование высокочастотного фильтра сводят к низкочастотному, используя следующее преобразование по габаритам и передаточной функции. Его можно реализовать также, используя одновременно высоко- и низкочастотный фильтры.

$$\mathrm{s} \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{B}}(\mathrm{s}+1/\mathrm{s}), \quad \text{где} \quad \mathrm{B} = \mathrm{B_P}/\mathrm{f_0}.$$

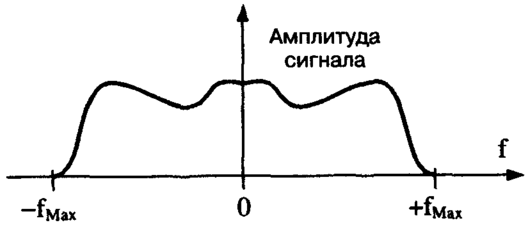
24.4. Эталонная частота. Неискажающий фильтр

Представление сигнала в цифровой форме связано с необходимостью его эталонирования. Чтобы избежать искажения сигнала при этом, эталонирующему устройству обязательно должен предшествовать так называемый неискажающий фильтр, которым может быть только аналоговый фильтр непрерывного действия.

• ***Частота эталонирования. Теорема Шеннона.*** Сигнал, частотный предел которого составляет $\mathrm{f_{Max}}$ (рис. 24.16) может быть преобразован, исходя из эталонированного сигнала частотой $\mathrm{f_{эт}}$, если:

$$\mathrm{f_{эт}} > 2\mathrm{f_{Max}}.$$

Рис. 24.16. Частотный предел сигнала



Пример 24.4.7. Частота эталонирования информации для числового аудиодиска составляет $f_{эт} = 44{,}1$ кГц, чтобы позволить воспроизведение качественного сигнала с высокой надежностью ($f_{Max} = 20$ кГц).

- ***Неискажающий фильтр.*** Если условия теоремы Шеннона не соблюдены, эталонирование необратимо исказит сигнал. Таким образом, содержащийся в отклике свыше f_{Max} паразитный шум мог бы опасно исказить эталонируемый сигнал в процессе эталонирования. Поэтому предотвращающий искажение низкочастотный фильтр устанавливается до эталонирующего устройства для ограничения входной полосы пропускания $f_{Lim} > f_{Max}$, чтобы не ослабить полезный сигнал.

Метод

Пусть α — коэффициент эталонирования, определяемый из выражения:

$$f_{эт} = 2\alpha f_{Lim}.$$

Для фильтра (рис. 24.17) он определяется как:

$$\alpha = \frac{1}{2}(10^{A/S} + 1),$$

где A (дБ) — желаемое ослабление эффекта искажения в полосе пропускания от 0 до f_{Lim}; S (дБ на декаду) — наклон кривой при частоте, большей f_{Lim}. Значения α приведены в табл. 24.11.

Рис. 24.17. Асимптоты низкочастотного фильтра

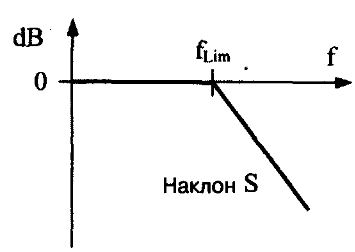


Таблица 24.11. Коэффициенты эталонирования

Фильтр		**Желаемое ослабление эффекта искажения A**						
Порядок	**S (дБ на декаду)**	**−20**	**−30**	**−40**	**−50**	**−60**	**−70**	**−80**
1	−20	5,5	16,3	50,5	158,6	500,5	1581,6	5000,5
2	−40	2,1	3,3	5,5	9,4	16,3	28,6	50,5
3	−60	1,6	2,1	2,8	3,9	5,5	7,8	11,3
4	−80	1,4	1,7	2,1	2,6	3,3	4,2	5,5
5	−100	1,3	1,5	1,8	2,1	2,5	3,0	3,7
6	−100	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	2,4	2,8

ГЛАВА 25

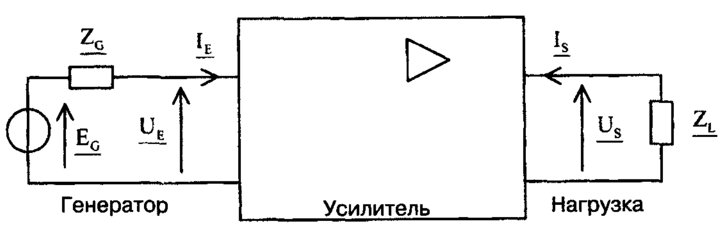
УСИЛЕНИЕ И АНАЛОГОВЫЕ ОПЕРАЦИИ

25.1. Общие вопросы. Определения

– Последующие определения должны учитывать особенности каждого типа усилителей. Например, для усилителей малых сигналов усиления определяются для изменений сигналов в окрестности точки поляризации.
– Определения даны в комплексной форме (частотный анализ). Переход в пространство Лапласа осуществляется простой заменой jω оператором p (см. гл. 10).
– Принятым соглашением является соглашение о четырехполюснике (входные и выходные токи).

• ***Функции*** (рис. 25.1). *Усилитель* — это четырехполюсник, повышающий амплитуду сигнала и его мощность, умножая входной сигнал на коэффициент усиления.

Рис. 25.1. Усилитель



• ***Усиление по напряжению или передаточная функция по напряжению $\underline{T}_U$. Усиление по напряжению при холостом ходе $\underline{T}_{U0}$. Модуль коэффициента передачи по напряжению G_U. Фазовый сдвиг φ_U.***

$$\underline{T}_U = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E}, \quad \underline{T}_{U0} = \left.\frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E}\right|_{\underline{I}_S=0},$$

$$G_U = 20\log\left|\underline{T_U}\right| \text{ в децибелах (дБ), 1 белл} = 10 \text{ дБ},$$

$$\varphi = \mathrm{Arg}\underline{T_U} = \varphi_{US} - \varphi_{UE} \text{ в радианах (рад) или градусах (°).}$$

• ***Усиление по току или передаточная функция по току*** $\underline{T_I}$. ***Усиление по току при коротком замыкании*** $\underline{T_{ICC}}$. ***Модуль коэффициента передачи по току*** G_I. ***Фазовый сдвиг*** φ_I.

$$\underline{T_I} = \frac{\underline{I_S}}{\underline{I_E}}, \quad \underline{T_{I0}} = \left.\frac{\underline{I_S}}{\underline{I_E}}\right|_{\underline{U_S}=0},$$

$$G_I = 20\log\left|\underline{T_I}\right| \text{ в децибелах (дБ), 1 белл} = 10 \text{ дБ},$$

$$\varphi = \mathrm{Arg}\underline{T_I} = \varphi_{IS} - \varphi_{IE} \text{ в радианах (рад) или градусах (°).}$$

• ***Полное сопротивление передаточной функции*** $\underline{T_Z}$. ***Полное передаточное сопротивление холостого хода*** $\underline{T_{Z0}}$. Модуль полного передаточного сопротивления выражается в омах (Ом).

$$\underline{T_Z} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{I_E}}, \quad \underline{T_{Z0}} = \left.\frac{\underline{U_S}}{\underline{I_E}}\right|_{\underline{I_S}=0}.$$

• ***Полная проводимость передаточной функции*** $\underline{T_Y}$. ***Полная передаточная проводимость при коротком замыкании*** $\underline{T_{YCC}}$. Модуль полного передаточного сопротивления выражается в *сименсах* (См).

• ***Полное входное сопротивление*** $\underline{Z_E}$ ***Полное входное сопротивление холостого хода*** $\underline{Z_{E0}}$ ***Полное входное сопротивление короткого замыкания*** $\underline{Z_{ECC}}$.

$$\underline{Z_E} = \frac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}}, \quad \underline{Z_{E0}} = \left.\frac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}}\right|_{\underline{I_S}=0}, \quad \underline{Z_{ECC}} = \left.\frac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}}\right|_{\underline{U_S}=0}.$$

• ***Полное выходное сопротивление*** $\underline{Z_S}$. ***Полное выходное сопротивление холостого хода*** $\underline{Z_{S0}}$. ***Полное выходное сопротивление короткого замыкания*** $\underline{Z_{SCC}}$. Генератор считается пассивным: $E_G = 0$.

$$\underline{Z_S} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{I_S}}, \quad \underline{Z_{S0}} = \left.\frac{\underline{U_S}}{\underline{I_S}}\right|_{\underline{I_E}=0}, \quad \underline{Z_{SCC}} = \left.\frac{\underline{U_S}}{\underline{I_S}}\right|_{\underline{U_E}=0}.$$

Внимание! Всегда усиления по напряжению, по току, входные полные сопротивление и проводимость зависят от полного сопротивления нагрузки, тогда как полное выходное сопротивление зависит от полного сопротивления генератора.

• ***Эквивалентная схема с моделью Тевенена на выходе*** (рис. 25.2) без внутренней реакции выхода на вход. Выходное напряжение холостого хода $\underline{U_{S0}}$, т. е. при $\underline{I_S} = 0$ запишется как:

$$\underline{U_{S0}} = \underline{T_{U0}U_E} = \underline{T_{Z0}I_E}, \quad \text{где} \quad \underline{T_{Z0}} = \underline{T_{U0}Z_E}.$$

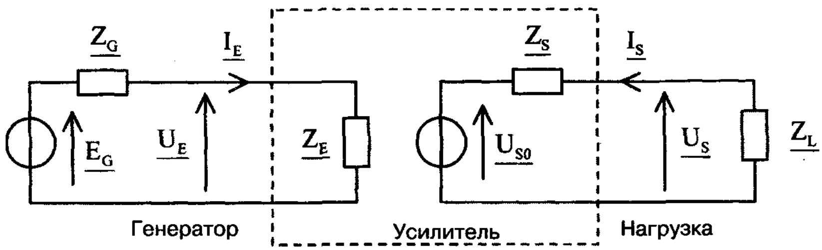


Рис. 25.2. Эквивалентная схема с моделью Тевенена на выходе

• ***Эквивалентная схема с моделью Нортона на выходе*** (рис. 25.3) без внутренней реакции выхода на вход. Выходной ток короткого замыкания $\underline{I_{SCC}}$, т. е. при $\underline{U_S} = 0$ запишется как:

$$\underline{I_{SCC}} = \underline{T_{ICC}I_E} = \underline{T_{YCC}U_E}, \quad \text{где} \quad \underline{T_{YCC}} = \frac{\underline{T_{ICC}}}{\underline{Z_E}}.$$

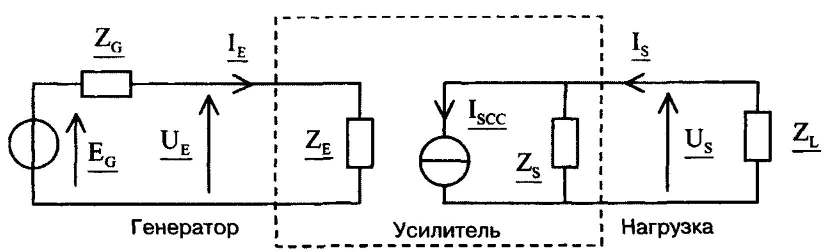


Рис. 25.3. Эквивалентная схема с моделью Нортона на выходе

• ***Внутренняя реакция выхода на вход.*** Иногда этой реакцией пренебрегать не следует, особенно при высоких частотах. Тогда следует к полному входному сопротивлению $\underline{Z_E}$ эквивалентных схем (рис. 25.2 и 25.3) приобщить последовательно источник напряжения (модель Тевенена) или параллельно источник тока (модель Нортона), которые учитывают внутреннюю реакцию выхода на вход.

• ***Полоса пропускания (ПП).*** Она определяется обычно при −3 дБ наибольшего модуля коэффициента передачи (f_L — низкая частота среза,

f_H — высокая частота среза). Точнее, отмеченные при -3 дБ частоты среза являются теми частотами, для которых модуль равен максимальному, деленному на $\sqrt{2}$. Тогда мощность сигнала составляет половину максимальной.

$$\text{ПП} = f_H - f_L.$$

• ***Гармоническое искажение.*** Нелинейности усилителя искажают сигнал. Для измерения такого искажения на вход подается синусоидальный сигнал. Тогда из-за нелинейности на выходе получается периодический несинусоидальный сигнал, разлагаемый в ряд Фурье (см. гл. 8). Коэффициент искажения волны определится как:

$$d = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{A_1} = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \cdots + A_n^2 + \cdots}}{A_1},$$

где $A_n = A_{n\,Max}/\sqrt{2}$ — действующие значения ($A_{n\,Max}$ — амплитуды) основной и высших гармонических составляющих разложения в ряд Фурье выходного сигнала.

• ***Усилитель, описываемый внутренними параметрами.*** Как всякий четырехполюсник, усилитель может быть описан посредством своих внутренних параметров — сопротивлений, проводимостей или с использованием гибридных параметров и т. д.

1) *Параметры — полные сопротивления.*

$$\begin{cases} \underline{U_E} = \underline{Z_{11}}\underline{I_E} + \underline{Z_{12}}\underline{I_S}, \\ \underline{U_S} = \underline{Z_{21}}\underline{I_E} + \underline{Z_{22}}\underline{I_S}, \end{cases} \quad \text{где} \quad \underline{Z_{11}} = \underline{Z_{E0}},\ \underline{Z_{21}} = \underline{T_{Z0}},\ \underline{Z_{22}} = \underline{Z_{S0}}.$$

2) *Параметры — полные проводимости.*

$$\begin{cases} \underline{I_E} = \underline{Y_{11}}\underline{U_E} + \underline{Y_{12}}\underline{U_S}, \\ \underline{I_S} = \underline{Y_{21}}\underline{U_E} + \underline{Y_{22}}\underline{I_S}, \end{cases} \quad \text{где} \quad \underline{Y_{11}} = 1/\underline{Z_{ECC}},\ \underline{Y_{21}} = \underline{T_{YCC}},\ \underline{Y_{22}} = \underline{Z_{SCC}}.$$

3) *Гибридные параметры.*

$$\begin{cases} \underline{U_E} = \underline{H_{11}}\underline{I_E} + \underline{H_{12}}\underline{I_S}, \\ \underline{U_S} = \underline{H_{21}}\underline{I_E} + \underline{H_{22}}\underline{I_S}, \end{cases} \quad \text{где} \quad \underline{H_{11}} = \underline{Z_{ECC}},\ \underline{H_{21}} = \underline{T_{ICC}},\ \underline{H_{22}} = 1/\underline{Z_{S0}};$$

$$\begin{cases} \underline{I_E} = \underline{G_{11}}\underline{U_E} + \underline{G_{12}}\underline{I_S}, \\ \underline{U_S} = \underline{G_{21}}\underline{I_E} + \underline{G_{22}}\underline{I_S}, \end{cases} \quad \text{где} \quad \underline{G_{11}} = 1/\underline{Z_{E0}},\ \underline{G_{21}} = \underline{T_{U0}},\ \underline{G_{22}} = \underline{Z_{SCC}}.$$

4) *Полные сопротивления и усиления, выраженные через параметры Z, Y и H* (табл. 25.1).

Таблица 25.1. Связь полных сопротивлений и коэффициентов усиления с параметрами

	Параметры Z	Параметры Y	Параметры H
$\underline{Z_E} = \dfrac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}} =$	$\dfrac{\underline{Z_{11}}\underline{Z_L} + \underline{\Delta Z}}{\underline{Z_{22}} + \underline{Z_L}}$	$\dfrac{\underline{Z_{22}}\underline{Z_L} + 1}{\underline{Y_{11}} + \underline{\Delta Y}\underline{Z_L}}$	$\dfrac{\underline{H_{11}}\underline{Z_L} + \underline{\Delta H}\underline{Z_L}}{\underline{H_{22}}\underline{Z_L} + 1}$
$\underline{Z_E} = \dfrac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}} =$	$\dfrac{\underline{Z_{22}}\underline{Z_G} + \underline{\Delta Z}}{\underline{Z_{11}} + \underline{Z_G}}$	$\dfrac{\underline{Y_{11}}\underline{Z_G} + 1}{\underline{Y_{22}} + \underline{\Delta Y}\underline{Z_G}}$	$\dfrac{\underline{H_{11}} + \underline{Z_G}}{\underline{H_{22}}\underline{Z_G} + \underline{\Delta H}}$
$\underline{Z_E} = \dfrac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}} =$	$\dfrac{\underline{Z_{21}}\underline{Z_L}}{\underline{Z_{11}}\underline{Z_L} + \underline{\Delta Z_L}}$	$\dfrac{-\underline{Y_{21}}\underline{Z_L}}{\underline{Y_{22}}\underline{Z_L} + 1}$	$\dfrac{-\underline{H_{21}}\underline{Z_L}}{\underline{H_{11}} + \underline{\Delta H}\underline{Z_L}}$
$\underline{Z_E} = \dfrac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}} =$	$\dfrac{-\underline{Z_{21}}\underline{Z_L}}{\underline{Z_{22}} + \underline{Z_L}}$	$\dfrac{\underline{Y_{21}}}{\underline{Y_{11}} + \underline{\Delta Y}\underline{Z_L}}$	$\dfrac{\underline{H_{21}}}{\underline{H_{22}}\underline{Z_L} + 1}$

где

$$\underline{\Delta Z} = \underline{Z_{11}}\underline{Z_{22}} - \underline{Z_{12}}\underline{Z_{21}} = \frac{1}{\underline{\Delta Y}} = \frac{\underline{H_{11}}}{\underline{H_{22}}},$$

$$\underline{\Delta Y} = \underline{Y_{11}}\underline{Y_{22}} - \underline{Y_{12}}\underline{Y_{21}} = \frac{1}{\underline{\Delta Z}} = \frac{\underline{H_{22}}}{\underline{H_{11}}},$$

$$\underline{\Delta H} = \underline{H_{11}}\underline{H_{22}} - \underline{H_{12}}\underline{H_{21}} = \frac{\underline{Z_{11}}}{\underline{Z_{22}}} = \frac{\underline{Y_{22}}}{\underline{Y_{11}}}.$$

Примечания.

- Эти уравнения действительны для широких сигналов, а также для малых сигналов в окрестностях точки поляризации (тогда параметры часто обозначаются строчными буквами). Обычно параметры зависят от рабочей точки.
- Параметры могут быть действительными (обычно при низких частотах) или комплексными (обычно при высоких частотах).
- При отсутствии внутренней реакции выхода на вход параметры $\underline{Z_{12}}$, $\underline{Y_{12}}$ и $\underline{H_{12}}$ равны нулю, и выражения существенно упрощаются.

5) *Переходные параметры.* Они могут быть использованы при последовательном соединении усилителей.

$$\begin{cases} \underline{U_S} = \underline{T_{11}}\underline{U_E} + \underline{T_{12}}(-\underline{I_E}), \\ \underline{I_S} = \underline{T_{21}}\underline{U_E} + \underline{T_{22}}(-\underline{I_E}). \end{cases}$$

25.2. Усиление по напряжению

• ***Условное обозначение и работа усилителя по напряжению*** (рис. 25.4).

• ***Идеальный усилитель по напряжению*** (рис. 25.5). Входное сопротивление равно бесконечности, а усиление по напряжению постоянно.

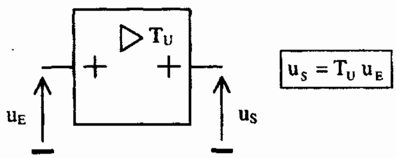


Рис. 25.4. Усилитель напряжения

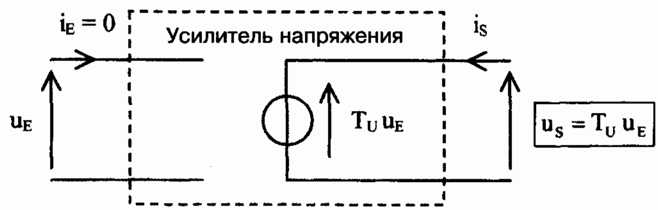


Рис. 25.5. Идеальный усилитель напряжения

Вопрос. Имеем схему неинвертирующего усилителя (рис. 25.6). Выразить коэффициент усиления по напряжению. Начертить его эквивалентную схему с моделью Тевенена на выходе.

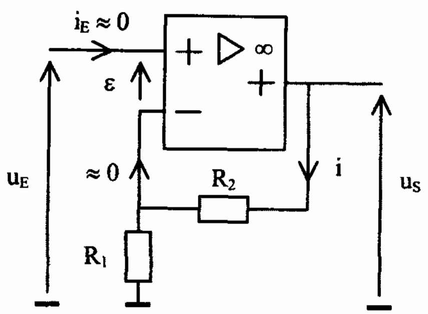


Рис. 25.6. Неинвертирующий усилитель

Ответ. Полагая дифференциальный усилитель идеальным (токи на входах «+» и «−» равны нулю, входное дифференциальное напряжение в линейном режиме равно нулю), получим:

$$\begin{cases} u_E = R_1 i, \\ u_S = (R_1 + R_2) i, \end{cases} \quad \Rightarrow T_U = \frac{u_S}{u_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Эквивалентная схема с моделью Тевенена на выходе приведена на рис. 25.7.

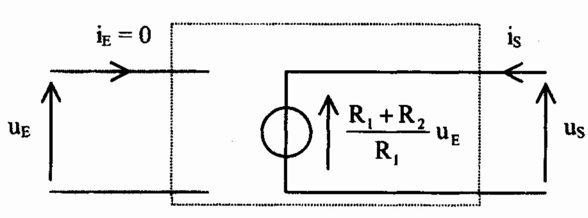


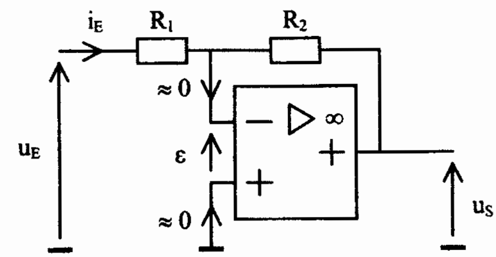
Рис. 25.7. Эквивалентная схема неинвертирующего усилителя

Примечание. Практически входное сопротивление $R_E = u_E/i_E$ очень велико, это сопротивление по входу «+» дифференциального усилителя.

Внимание! В дифференциальном усилителе с обратной связью по току сопротивление обратной связи R_2 определяет полосу пропускания. Его значение в каталогах никогда не может быть равным нулю. Напротив, в дифференциальном усилителе с обратной связью по напряжению (операционный усилитель) сопротивление обратной связи может быть равным нулю для повторителя ($T_U = 1$).

Вопрос. Имеем схему инвертирующего усилителя (рис. 25.8). Выразить коэффициент усиления по напряжению и входное сопротивление. Начертить его эквивалентную схему с моделью Тевенена на выходе.

Рис. 25.8. Инвертирующий усилитель (1-я версия)

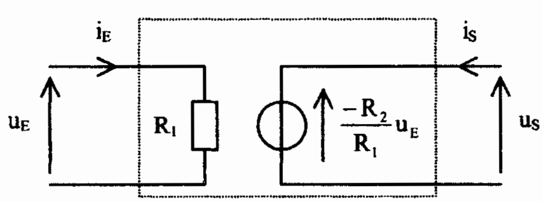


Ответ. Полагая дифференциальный усилитель идеальным (токи на входах «+» и «−» равны нулю, входное дифференциальное напряжение в линейном режиме равно нулю), получим:

$$\begin{cases} u_E = R_1 i, \\ u_S = -R_2 i_E \end{cases} \Rightarrow T_U = \frac{u_S}{u_E} = \frac{-R_2}{R_1} \quad \text{и} \quad R_E = \frac{u_E}{i_E} = R_1.$$

Эквивалентная схема с моделью Тевенена на выходе приведена на рис. 25.9.

Рис. 25.9. Эквивалентная схема инвертирующего усилителя (1-я версия)



Примечание. Для больших усилений по напряжению вместо схемы на рис. 25.8 предпочитают схему на рис. 25.10, так как она позволяет использовать на входе большее сопротивление. Имеем:

$$T_U = \frac{u_S}{u_E} = \frac{-R_2}{R_1}\left(1 + \frac{R_4}{R_3} + \frac{R_4}{R_2}\right) \quad \text{и} \quad R_E = \frac{u_E}{i_E} = R_1.$$

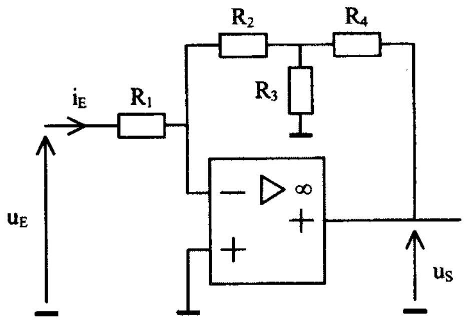


Рис. 25.10. Инвертирующий усилитель (2-я версия)

25.3. Усиление по току

• ***Условное обозначение и функция*** (рис. 25.11). T_I — усиление по току.

• ***Идеальный усилитель тока*** (рис. 25.12). Входное сопротивление равно нулю, выходное сопротивление равно бесконечности, усиление по току постоянно.

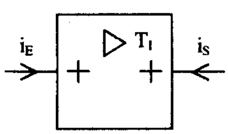


Рис. 25.11. Усилитель тока

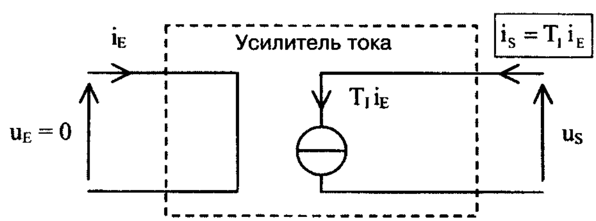
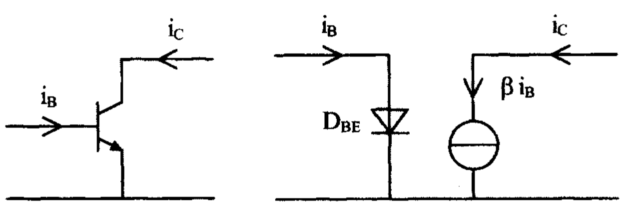


Рис. 25.12. Идеальный усилитель тока

Пример 25.3.1. Простой биполярный транзистор реализует усиление тока (рис. 25.13). Его усиление тока не является ни точным, ни устойчивым, ни строго линейным. Его входное сопротивление не постоянно (см. гл. 17).

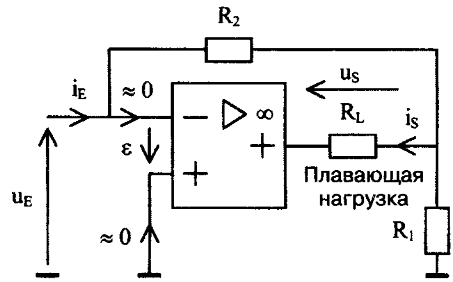


$$T_I = \frac{i_C}{i_B} = \beta$$

Рис. 25.13. Биполярный транзистор и его очень упрощенная эквивалентная схема

Вопрос. Имеем схему усилителя тока (рис. 25.14), нагрузка которого изменяется. Дать выражение усиления по току и входного сопротивления. Представить эквивалентную схему с моделью Нортона на выходе.

Рис. 25.14. Усилитель тока

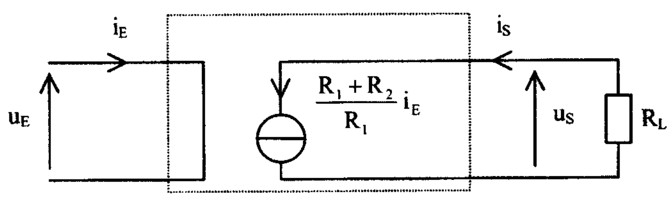


Ответ. Полагая дифференциальный усилитель идеальным (нулевые токи на входах «+» и «−», напряжение дифференциального входа равно нулю и режим линейный), получим:

$$R_2 i_E = R_1(i_S - i_E) \Rightarrow T_1 = \frac{i_S}{i_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \text{и} \quad R_E = \frac{u_E}{i_E} = 0.$$

Эквивалентная схема с моделью Нортона на выходе приведена на рис. 25.15.

Рис. 25.15. Эквивалентная схема усилителя тока (изменяющаяся нагрузка)



25.4. Преобразование ток–напряжение (полное переходное сопротивление)

• ***Обозначение и функции усилителя полного переходного сопротивления*** (рис. 25.16). T_Z является полным переходным сопротивлением.

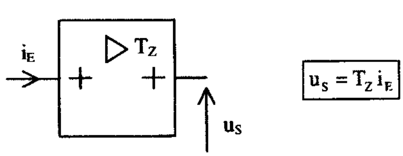


Рис. 25.16. Обозначение

• ***Усилитель полного переходного сопротивления или идеальный преобразователь ток-напряжение*** (рис. 25.17). Входное и выходное сопротивления равны нулю, полное переходное сопротивление постоянно.

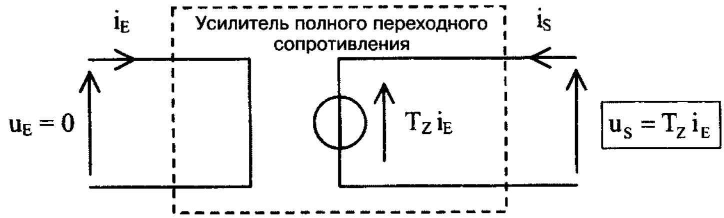


Рис. 25.17. Идеальный усилитель полного переходного сопротивления

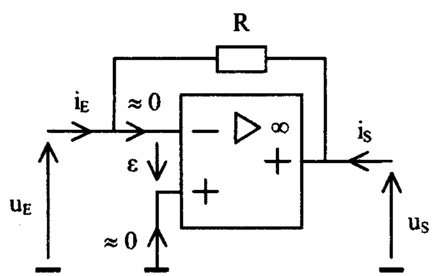


Рис. 25.18. Преобразователь ток–напряжение

Вопрос. Имеем схему преобразователя ток–напряжение (рис. 25.18). Дать выражение полного переходного сопротивления и входного сопротивления. Начертить его эквивалентную схему с моделью Нортона на выходе.

Ответ. Полагая дифференциальный усилитель идеальным (нулевые токи на входах «+» и «−», напряжение дифференциального входа равно нулю и режим линейный), получим:

$$\mathrm{R}i_E = -u_S \Rightarrow T_Z = \frac{u_S}{i_E} = -\mathrm{R} \quad \text{и} \quad R_E = \frac{u_E}{i_E} = 0.$$

Эквивалентная схема с моделью Нортона на выходе приведена на рис. 25.19.

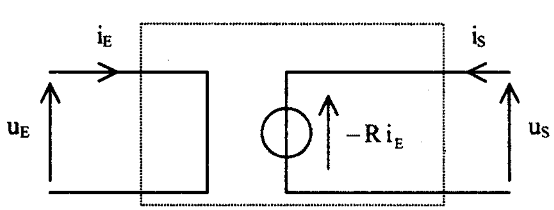


Рис. 25.19. Эквивалентная схема преобразователя ток-напряжение

25.5. Преобразователь напряжение–ток (полная переходная проводимость)

• ***Обозначение и функции усилителя полной переходной проводимости*** (рис. 25.20). T_Y является полной переходной проводимостью.

• ***Усилитель полной переходной проводимости или идеальный преобразователь напряжение – ток*** (рис. 25.21). Входное и выходное сопротивления равны бесконечности, полная переходная проводимость постоянна.

Рис. 25.20. Обозначение

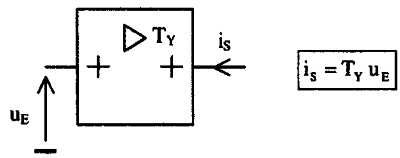
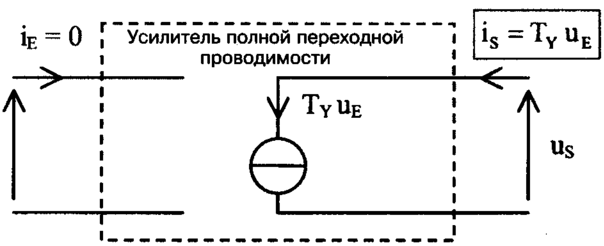
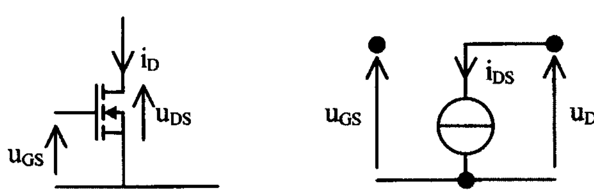


Рис. 25.21. Идеальный усилитель полной переходной проводимости



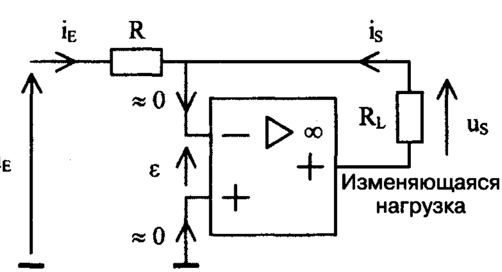
Пример 25.5.2. Простой МОП-транзистор реализует преобразование напряжение – ток (рис. 25.22). Его переходная проводимость неточна, нестабильна, нелинейна (см. гл. 18).

Рис. 25.22. МОП-транзистор и его сильно упрощенная эквивалентная схема



Вопрос. Имеем схему преобразователя напряжение – ток (рис. 25.23) с изменяющейся нагрузкой. Дать выражение полной переходной проводимости и входного сопротивления. Начертить его эквивалентную схему с моделью Нортона на выходе.

Рис. 25.23. Преобразователь напряжение – ток с изменяющейся нагрузкой



Ответ. Полагая дифференциальный усилитель идеальным (нулевые токи на входах «+» и «−», напряжение дифференциального входа равно нулю и режим линейный), получим:

$$\begin{cases} \mathrm{Ri_E} = \mathrm{u_E}, \\ \mathrm{i_S} = -\mathrm{i_E}, \end{cases} \quad \Rightarrow \mathrm{T_Y} = \frac{\mathrm{i_S}}{\mathrm{u_E}} = \frac{-1}{\mathrm{R}} \quad \text{и} \quad \mathrm{R_E} = \frac{\mathrm{u_E}}{\mathrm{i_E}} = \mathrm{R}.$$

Эквивалентная схема с моделью Нортона на выходе приведена на рис. 25.24.

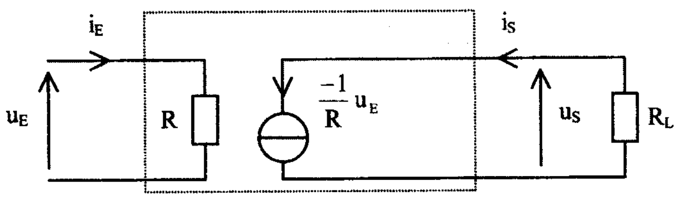


Рис. 25.24. Эквивалентная схема преобразователя напряжение – ток

25.6. Дифференциальное усиление

• ***Назначение. Обозначение*** (рис. 25.25). Дифференциальный усилитель (ДУ) напряжения усиливает разность двух входных напряжений.

• ***Подавление общего режима.*** Имеем $\underline{\mathrm{T_D}}$ — дифференциальное усиление, $\underline{\mathrm{T_C}}$ — усиление в общем режиме.

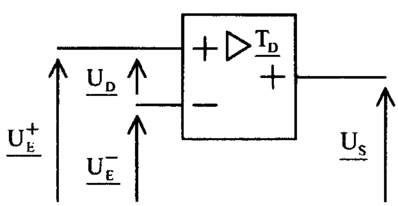


Рис. 25.25. Обозначение ДУ

Выходное напряжение дифференциального усилителя запишется в виде:

$$\underline{\mathrm{U_S}} = \underline{\mathrm{T_D}}(\underline{\mathrm{U_E^+}} - \underline{\mathrm{U_E^-}}) + \underline{\mathrm{T_C}}\frac{\underline{\mathrm{U_E^+}} + \underline{\mathrm{U_E^-}}}{2}.$$

Полагаем: $\underline{\mathrm{U_D}} = \underline{\mathrm{U_E^+}} - \underline{\mathrm{U_E^-}}$ ($\mathrm{u_D}$ — дифференциальное напряжение) и: $\underline{\mathrm{U_C}} = \frac{\underline{\mathrm{U_E^+}}+\underline{\mathrm{U_E^-}}}{2}$ ($\mathrm{u_C}$ — напряжение общего режима), откуда выходное напряжение

$$\underline{\mathrm{U_S}} = \underline{\mathrm{T_D}}\,\underline{\mathrm{U_D}} + \underline{\mathrm{T_C}}\,\underline{\mathrm{U_C}}.$$

Степень подавления общего режима обозначают χ:

$$\chi = 20\log\frac{|\underline{\mathrm{T_D}}|}{|\underline{\mathrm{T_C}}|} \text{ с измерением в децибелах (дБ).}$$

• ***Прочие дифференциальные усилители.*** Дифференциальные усилители тока, переходных полных сопротивления и проводимости.

• ***Идеальные модели дифференциальных усилителей.*** Это модели, приведенные на рис. 25.5, 25.12, 25.17, 25.21 при замене входного напряжения u_E входной разностью напряжений $u_D = u_E^+ + u_E^-$ (рис. 25.26), а входного тока i_E — входной разностью токов $i_D = i_E^+ + i_E^-$ (рис. 25.27).

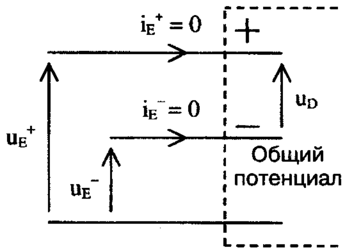


Рис. 25.26. Дифференциальный вход по напряжению

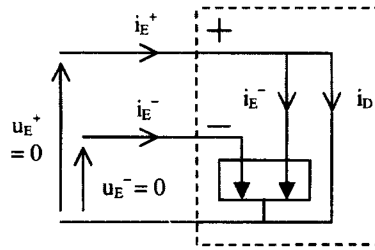
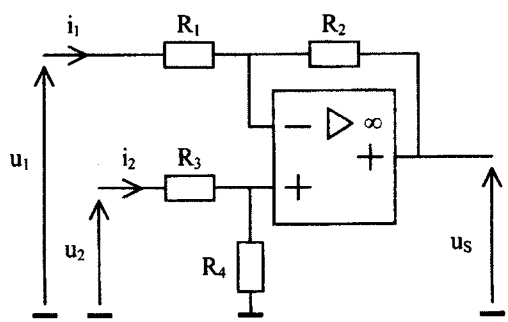


Рис. 25.27. Дифференциальный вход по току

25.6.1. Усилитель элементарных разностей

Имеем схему усилителя элементарных разностей (рис. 25.28).

Рис. 25.28. Усилитель элементарных разностей



Вопрос.

1) Выразить выходное напряжение в функции входного.
2) Вывести отсюда усиление в дифференциальном режиме и в общем режиме.
3) Вывести степень подавления общего режима χ.

Ответ.

1) На основании теоремы суперпозиции запишем:

$$u_S = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\frac{R_4}{R_3 + R_4}u_2 - \frac{R_2}{R_1}u_1.$$

2) По определению имеем:

$$u_S = A_D u_D + A_C u_C = A_D(u_2 - u_1) + A_C\frac{u_2 + u_1}{2},$$

откуда:

$$\begin{cases} u_D = u_2 - u_1, \\ u_C = \frac{u_2+u_1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = u_C + \frac{u_D}{2}, \\ u_1 = u_C - \frac{u_D}{2}. \end{cases}$$

Произведя замену в выражении выходного напряжения, получим:

$$u_S = \left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\frac{R_4}{R_3+R_4} + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{u_D}{2} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\frac{R_4}{R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_1}\right)u_C.$$

Путем идентификации отсюда получим:

$$A_D = \frac{R_1R_4 + 2R_2R_4 + R_2R_3}{2R_1(R_3+R_4)} \quad \text{и} \quad A_C = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{R_1(R_3+R_4)}.$$

3)

$$\chi = 20\log K, \quad \text{где} \quad K = \frac{R_1R_4 + 2R_2R_4 + R_2R_3}{2(R_1R_4 - R_2R_3)}.$$

Теоретические условия исключения усиления общего режима следующие:

$$R_1R_4 = R_2R_3 \Rightarrow A_C = 0 \quad \text{и} \quad A_D = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}.$$

Примечание. Коэффициент подавления общего режима зависит от точности, с которой реализуется равенство $R_1R_4 = R_2R_3$. Полагая усилитель идеальным и с малыми вариациями сопротивлений в окрестностях их значений, имеем:

$$A_D \approx A_{D0} + dA_D, \quad A_D \approx A_{D0} + dA_D, \quad \text{где} \quad A_{D0} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} \quad \text{и}$$

$$dA_D = \frac{A_{D0}}{2(1+A_{D0})}\left[(1+2A_{D0})\left(\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1}\right) + \left(\frac{dR_4}{R_4} - \frac{dR_3}{R_3}\right)\right],$$

$$A_C \approx A_{C0} + dA_C \quad \text{при} \quad A_{C0} = 0;$$

$$dA_C = \frac{A_{D0}}{1+A_{D0}}\left[\frac{dR_1}{R_1} - \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_3}{R_3} + \frac{dR_4}{R_4}\right],$$

откуда:

$$K \approx \frac{A_{D0}}{A_C} = \frac{1+A_{D0}}{\frac{dR_1}{R_1} - \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_3}{R_3} + \frac{dR_4}{R_4}}.$$

Это внушает сомнительность относительно дифференциального усиления и коэффициента подавления общего режима K в функции отклонений значений сопротивлений.

$$\frac{\Delta A_D}{A_{D0}} = \frac{1}{2(1+A_{D0})}\left[(1+2A_{D0})\left(\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_1}{R_1}\right) + \left(\frac{\Delta R_4}{R_4} + \frac{\Delta R_3}{R_3}\right)\right],$$

$$K \approx \frac{\Delta A_{D0}}{A_C} = \frac{1+A_{D0}}{\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_4}{R_4} + \frac{\Delta R_3}{R_3}}.$$

Для $\frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_4}{R_4} = \frac{\Delta R_3}{R_3}$ получим:

$$\frac{\Delta A_D}{A_{D0}} = 2\frac{\Delta R_1}{R_1} \quad \text{и} \quad K \approx \frac{\Delta A_{D0}}{A_C} = \frac{1 + A_{D0}}{4\frac{\Delta R_1}{R_1}}.$$

Коэффициент подавления общего режима K обратно пропорционален отклонениям сопротивлений. Например, при $A_{D0} = 1$ в худшем случае $\chi = 20$ дБ для $\Delta R_1/R_1 = 5\%$, а при $\chi = 40$ дБ только для $\Delta R_1/R_1 = 0{,}5\%$. В заключение следует отметить, что единственно правильное решение, позволяющее получить хорошее подавление общего режима, состоит в использовании интегрального дифференциального усилителя. Равенство $R_1R_4 = R_2R_3$ наилучшим образом реализуется лазерной настройкой одного из сопротивлений.

25.6.2. Дифференциальный подстроечный усилитель

Для усиления слабых сигналов и корректного подавления сильного общего режима следует использовать специальные дифференциальные усилители, называемые подстроечными. Они обладают повышенным коэффициентом подавления и большими полными входными сопротивлениями. Типовая принципиальная схема интегрального элемента дифференциального усилителя приведена на рис. 25.29.

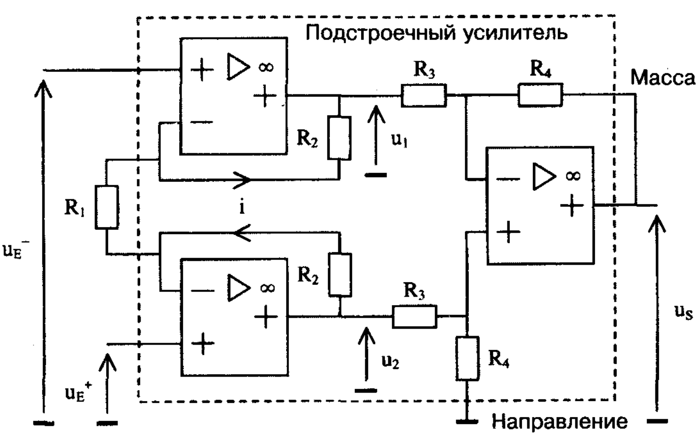


Рис. 25.29. Принцип построения подстроечного дифференциального усилителя

Зажим «*Масса*» позволяет осуществить смещение выходного напряжения и выполнять различные контрольные функции. Зажим «*Направление*» позволяет включить на выходе дополнительно усилитель мощности или реализовать преобразование напряжение–ток, например. Сопротивление R_1 позволяет регулировать дифференциальное усиление, когда это доступно.

Вопрос. Дать выражение выходного напряжения в функции входного.

Ответ. С одной стороны имеем:

$$\begin{cases} u_E^+ - u_E^- = R_1 i, \\ u_2 - u_1 = (2R_2 + R_1)i, \end{cases} \Rightarrow \frac{u_2 - u_1}{u_E^+ - u_E^-} = 1 + \frac{2R_2}{R_1}.$$

С другой стороны, полагая усиление в режиме подавления нулевым, имеем: $u_S = \frac{R_4}{R_3}(u_2 - u_1)$ (см. § 25.6.1), откуда:

$$T_D = \frac{u_S}{u_E^+ - u_E^-} = \frac{R_4}{R_3}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right).$$

25.6.3. Разделительный дифференциальный усилитель

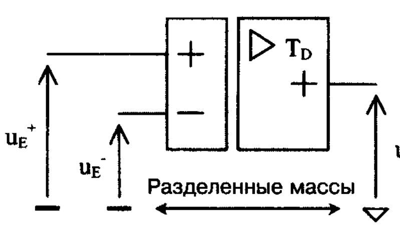


Рис. 25.30. Дифференциальный усилитель с разделенными массами

Разделительные усилители (обозначение на рис. 25.30) позволяют разделить контуры массы, запереть высокие напряжения, подавить высокие уровни общего режима. Разделение осуществляется использованием магнитных, оптических связей, переключением емкости или переходом к числовым сигналам.

Пример 25.6.3. Имеем разделительный усилитель с переключением емкости (рис. 25.31). Управляемый аналоговый инвертор периодически переходит из положения 1 в положение 2 с частотой 1/T. В установившемся режиме при постоянном входном напряжении выходное напряжение (постоянное) определяется по соотношению:

$$\frac{U_S}{U_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

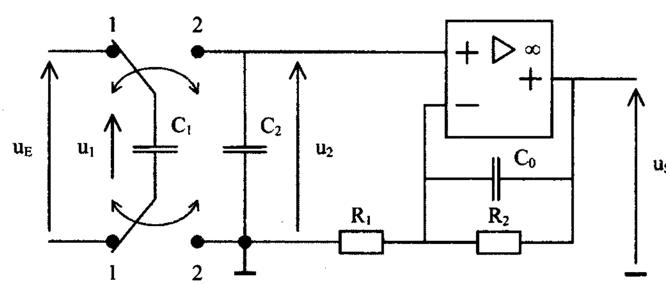


Рис. 25.31. Разделительный усилитель с переключением емкости

25.7. Усиление мощности

25.7.1. Общие вопросы. Определения

• ***Баланс мощностей*** (рис. 25.32).

$$P_E + P_A = P_S + P_D \quad \text{и} \quad P_S = P_{SAC} + P_{SDC}.$$

Здесь: P_E — средняя мощность входного сигнала от источника; P_A — средняя мощность, поступающая от питания; P_D — средняя мощность теплового рассеяния усилителя; $P_{S\,AC}$ — средняя мощность переменной составляющей выходного сигнала; P_{SDC} — средняя мощность постоянной составляющей выходного сигнала.

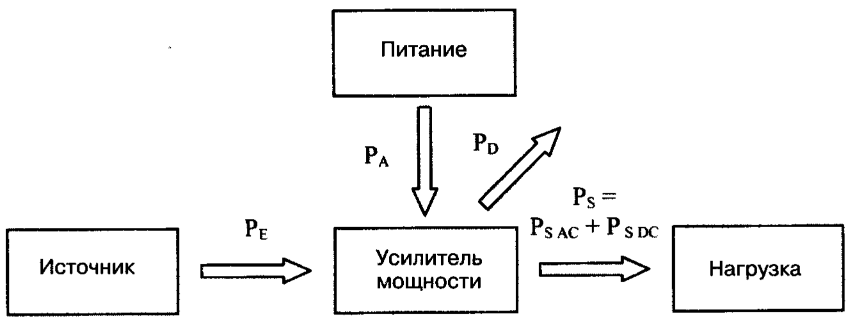


Рис. 25.32. Баланс мощностей

Примечание. В зависимости от прикладной задачи полезный сигнал состоит: либо из переменной и постоянной составляющих, либо только из переменной составляющей.

• ***Коэффициенты полезного действия.*** Различают КПД η усиления полной мощности T_P выходного сигнала (переменная и постоянная составляющие) и относительный КПД η_{AC}, определяющий усиление только переменной составляющей выходного сигнала.

$$\eta = \frac{P_S}{P_E + P_A} \quad \eta_{AC} = \frac{P_{S\,AC}}{P_E + P_A}.$$

• ***Усиления мощности.*** Различают усиление полной мощности T_P (переменная и постоянная составляющие) входного и выходного сигналов и усиление мощности только переменной составляющей T_{AC} входного и выходного сигналов.

$$T_P = \frac{P_S}{P_E} \quad T_{P\,AC} = \frac{P_{S\,AC}}{P_{EAC}}.$$

Для синусоидальных переменных составляющих имеем:

$$T_{P\,AC} = \frac{U_S I_S \cos\varphi_S}{U_E I_E \cos\varphi_E}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \varphi_S = \mathrm{Arg}\underline{U_S} - \mathrm{Arg}\underline{I_S}, \\ \varphi_E = \mathrm{Arg}\underline{U_E} - \mathrm{Arg}\underline{I_E}. \end{cases}$$

• ***Усиление мощности.***

$$G_P = 10\log T_P \quad G_{PAC} = 10\log T_{P\,AC} \text{ в децибелах (дБ).}$$

• ***Рабочие режимы транзистора.*** Определение рабочего режима транзистора исходит из исходного положения его рабочей точки на нагрузочной прямой (рис. 25.33).

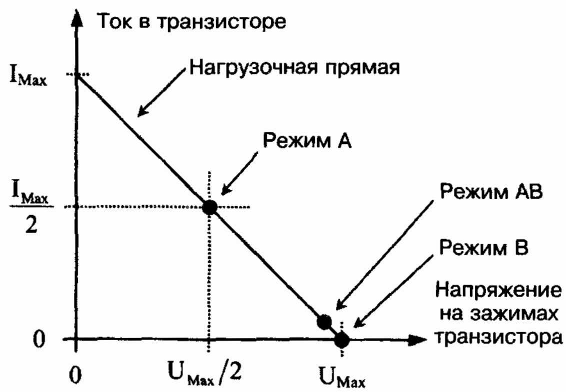


Рис. 25.33. Рабочие режимы транзистора

25.7.2. Усиление в режиме A

Принцип действия усилителя в режиме A и его работа показаны на рис. 25.34. Исходная рабочая точка (точка покоя) M выбирается обычно на середине нагрузочной прямой, чтобы позволить максимальный диапазон изменения полезного сигнала с минимальным искажением. Силовой транзистор проводит непрерывно.

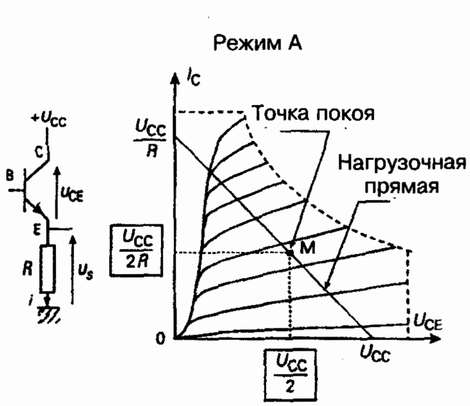


Рис. 25.34. Работа усилителя в режиме A

Нагрузочная прямая: $I_C = \frac{U_{CC}-U_{CE}}{R}$.

Мощности и КПД в исходной рабочей точке (отсутствие переменной составляющей) и в синусоидальном режиме при минимальных отклонениях приведены в табл. 25.2. Мощностью P_E пренебрежено.

Таблица 25.2. Мощности и КПД в режиме А

	В точке покоя	**В синусоидальном режиме с наибольшим отклонением**
Полная выходная мощность на нагрузке	$P_S = \frac{U_{CC}^2}{4R}$	$P_S = \frac{3U_{CC}^2}{8R}$
Полезная выходная мощность на нагрузке	$P_{S\,AC} = 0$	$P_{S\,AC} = \frac{U_{CC}^2}{8R}$
Рассеиваемая транзистором мощность	$P_D = \frac{U_{CC}^2}{4R}$	$P_D = \frac{U_{CC}^2}{8R}$
Генерируемая источником мощность	$P_A = \frac{U_{CC}^2}{2R}$	$P_A = \frac{U_{CC}^2}{2R}$
Максимальный теоретический КПД		$\eta_{AC} = \frac{1}{4} = 25\%$

Примечания.

- В самом неблагоприятном случае в синусоидальном режиме рассеиваемая транзистором мощность составит $P_D = \frac{U_{CC}^2}{4R}$.
- Потребление в точке покоя столь же значительно, как и в рабочем режиме.
- Постоянная составляющая входит в нагрузку.
- Очень малые искажения получаются при использовании усилителя с обратной связью (рис. 25.35).

25.7.3. Усиление в режиме В. Двухтактная схема.

Усилитель работает в режиме В, если силовые транзисторы заперты на границе проводимости в покое. Исходная рабочая точка М помещена на пределе проводимости транзисторов. В режиме переменного тока они проводят полупериод. Принцип работы усилителя в режиме В (двухтактный каскад) приведен на рис. 25.36, а его характеристики — на рис. 25.37.

Мощности и КПД в исходной рабочей точке (отсутствие переменной составляющей) и в синусоидальном режиме при минимальных отклонениях приведены в табл. 25.3. Мощностью P_E пренебрежено.

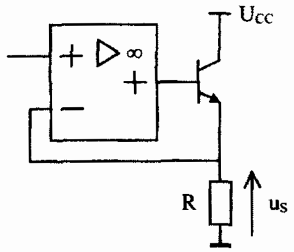


Рис. 25.35. Усилитель с обратной связью в режиме А

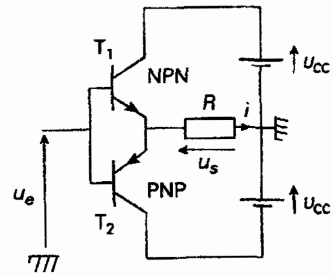


Рис. 25.36. Двухтактный каскад усилителя в режиме В

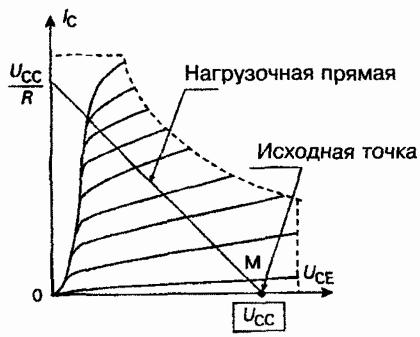


Рис. 25.37. Характеристики в режиме В

Таблица 25.3. Мощности и КПД в режиме В

	В точке покоя	**В синусоидальном режиме с наибольшим отклонением**
Полная выходная мощность на нагрузке	$P_S = 0$	$P_S = \frac{U_{CC}^2}{2R}$
Полезная выходная мощность на нагрузке	$P_{S\,AC} = 0$	$P_{S\,AC} = \frac{U_{CC}^2}{2R}$
Рассеиваемая транзистором мощность	$P_D = 0$	$P_D = \frac{U_{CC}^2}{R}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)$
Генерируемая источником мощность	$P_A = 0$	$P_A = \frac{2U_{CC}^2}{\pi R}$
Максимальный теоретический КПД		$\eta_{AC} = \frac{\pi}{4} \approx 78\%$

Примечания.

– В самом неблагоприятном случае в синусоидальном режиме рассеиваемая транзистором мощность составит $P_D = \frac{2U_{CC}^2}{\pi^2 R}$.

– Искажение на пересечении (рис. 25.38). При входном синусоидальном сигнале наблюдается искажение при пересечении оси времени выходного сигнала. Это искажение связано с переходной характеристикой двухтактного каскада (рис. 25.39). Обратная связь существенно уменьшает это искажение (рис. 25.40).

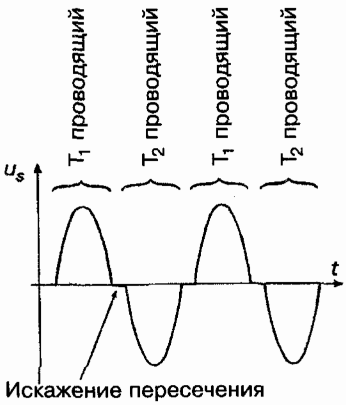


Рис. 25.38. Искажение пересечения двухтактного каскада

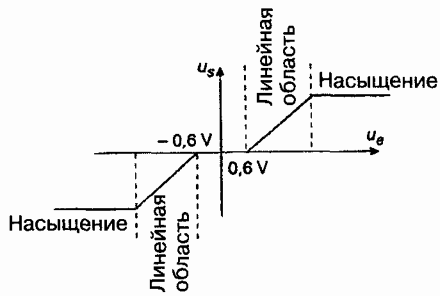
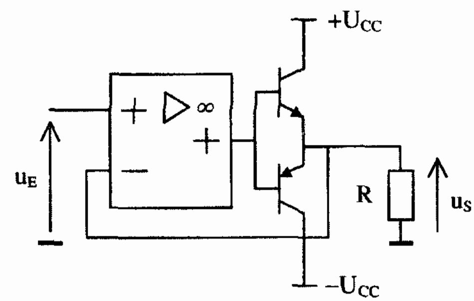


Рис. 25.39. Переходная характеристика двухтактного каскада

Рис. 25.40. Усилитель в режиме B с обратной связью



25.7.4. Усиление в режиме AB

Усилитель работает в режиме AB, если силовые транзисторы в исходной рабочей точке находятся в состоянии слабой проводимости. Исходная рабочая точка фиксирована выше порога проводимости транзисторов адекватной поляризацией. Режим AB представляет собой компромисс между режимами A и B. Искажение пересечения снижено вследствие повышения потребления в исходной рабочей точке и уменьшения КПД.

25.7.5. Усиление в режиме D

Режим D означает коммутационный процесс. Целью является ограничение рассеиваемой транзистором мощности с целью получения повышенного КПД (теоретически 100%). Сигнал ошибки $\varepsilon = u_E - Bu_S$ (рис. 25.41) управляет коэффициентом импульсного заполнения генератора прямоугольных сигналов h, частота которых, фиксированная таймером, остается постоянной. Таким образом сигнал h модулирован по ширине импульса (ШИМ — широтно-импульсная модуляция) таким образом, что его средняя величина является изображением сигнала ошибки. Низкочастотный фильтр позволяет исключить паразитные частоты, вызванные коммутациями. Если усиление в прямом направлении достаточно велико, можно рассматривать, что $u_S = u_E/B$.

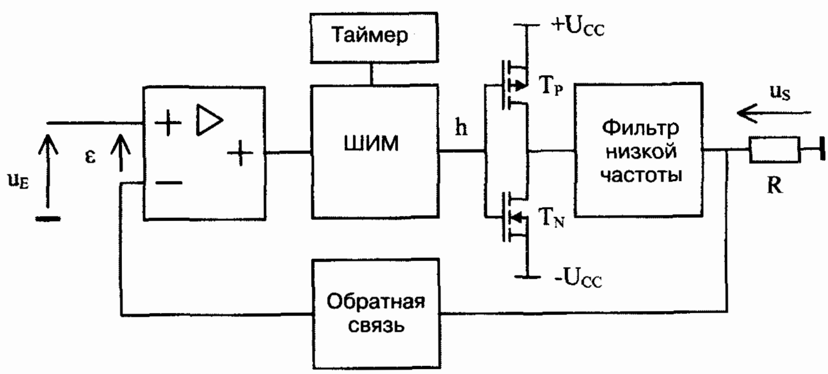


Рис. 25.41. Принципиальная схема усилителя в режиме D

25.8. Согласование сопротивления

25.8.1. Введение

Согласование полных сопротивлений позволяет передавать максимальную мощность. Оно предотвращает отражение сигнала на линии передачи (мили между двумя каскадами на высоких частотах). Это главная проблема, так как отражение на линии снижает сигнал и может даже свести его к уровню, непригодному для использования. Идеальная модель усилителя с согласованным сопротивлением приведена на рис. 25.2 или на рис. 25.3). При этом удовлетворяются два следующих условия согласования полных сопротивлений (согласование входных и выходных полных сопротивлений).

$$\underline{Z_E} = \overline{\underline{Z_G}} \text{ (на входе)} \quad \text{и} \quad \underline{Z_S} = \overline{\underline{Z_L}} \text{ (на выходе)}.$$

25.8.2. Согласование на выходе

Имеем эквивалентную схему усилителя с моделью Тевенена на выходе (рис. 25.2). Полагаем: $\underline{Z_L} = R_L + jX_L$ (нагрузка) и $\underline{Z_S} = R_S + jX_S$ (выход).

– Средняя или активная мощность, передаваемая нагрузке:

$$\mathrm{P_S} = \frac{\mathrm{R_L U_{S0}^2}}{(\mathrm{R_S} + \mathrm{R_L})^2 + (X_\mathrm{S} + X_\mathrm{L})^2}.$$

– Условие согласования полных сопротивлений:

$$\underline{\mathrm{Z_S}} = \overline{\underline{\mathrm{Z_L}}} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{R_S} = \mathrm{R_L}, \\ X_\mathrm{S} = -X_\mathrm{L}. \end{cases}$$

– Максимальная средняя мощность, передаваемая нагрузке:

$$\mathrm{P_{S\,Max}} = \frac{\mathrm{U_{S0}^2}}{4\mathrm{R_S}}.$$

25.8.3. Согласованные четырехполюсники

Самое простое — точно соблюдать условия согласования полных сопротивлений, изложенные выше, если это возможно. Но чаще всего полные сопротивления выхода и нагрузки предопределены заранее, тогда между этими сопротивлениями необходимо включить адаптирующий четырехполюсник

• ***Согласование посредством трансформатора*** (рис. 25.42). Пусть имеем идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации m (см. гл. 15). Приведенное к первичной обмотке полное сопротивление $\underline{\mathrm{Z_L}}$ делится на m^2. Тогда на выходе усилителя будет полное сопротивление:

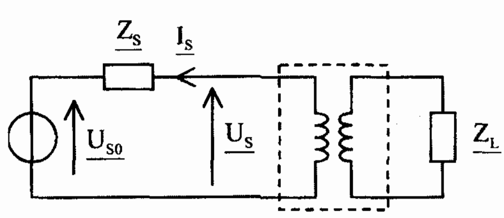
$$\frac{\underline{\underline{\mathrm{Z_L}}}^2}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{m_2}} + \mathrm{j}\frac{X_\mathrm{L}}{\mathrm{m}^2}.$$

Следовательно, согласование реализуется для:

$$\frac{\underline{\underline{\mathrm{Z_L}}}}{\mathrm{m}^2} = \overline{\underline{\mathrm{Z_S}}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{R_s} \quad \text{и} \quad \frac{\underline{\underline{X_\mathrm{L}}}}{\mathrm{m}^2} = -\underline{X_\mathrm{S}}.$$

Трансформатор не позволяет согласовать независимо действительные и мнимые части полных сопротивлений и не позволяет изменить знак мнимых частей. Он позволяет просто согласовать мощности чисто резистивные (активные) сопротивления в заданной полосе частот.

Рис. 25.42. Согласование сопротивлений с помощью трансформатора



• ***Согласование реактивным LC-четырехполюсником.*** Согласование реализуемо только для одной частоты. Возможны два случая:

1) $R_L > R_C$ (рис. 25.43). Получим:

$$C = \frac{1}{R_L\omega}\sqrt{\frac{R_L}{R_S} - 1} \quad \text{и} \quad L = R_L R_S C.$$

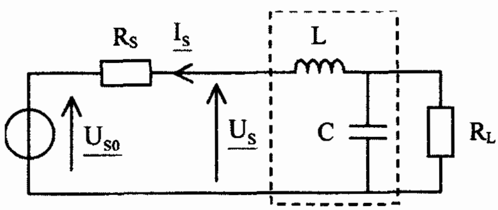


Рис. 25.43. Согласование реактивным LC-четырехполюсником ($R_L > R_S$)

2) $R_L < R_C$ (рис. 25.44). Получим:

$$L = \frac{R_L}{\omega}\sqrt{\frac{R_S}{R_L} - 1} \quad \text{и} \quad C = \frac{L}{R_L R_S}.$$

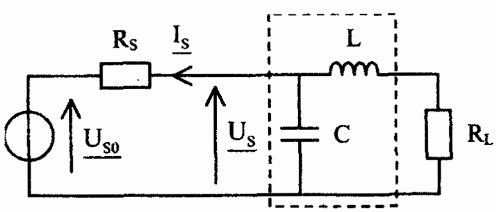


Рис. 25.44. Согласование реактивным LC-четырехполюсником ($R_L < R_S$)

25.9. Другие аналоговые операции с сигналами

Для приводимых здесь схем составляющие предполагаются идеальными. Это основано на использовании интегральных схем.

25.9.1. Сумматор

Сумматор напряжений (обозначение приведено на рис. 25.45) осуществляет уравновешенную сумму нескольких входныхнапряжений соответственно следующему соотношению:

$$u_S = T_U \sum_{k=1}^{n} w_k u_k.$$

Рис. 25.45. Сумматор напряжений

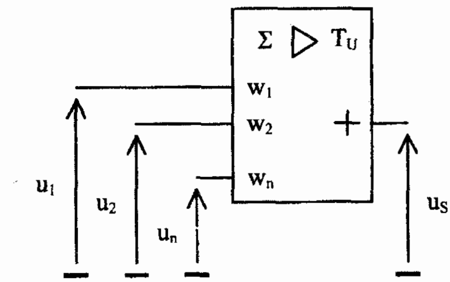
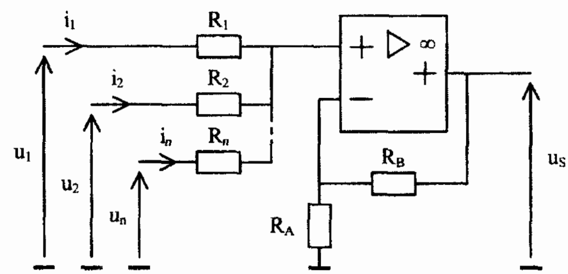


Рис. 25.46. Неинвертирующий сумматор



Пример 25.9.4. Неинвертирующий сумматор (рис. 25.46).

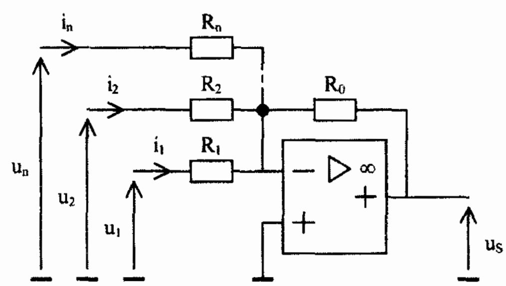
$$u_S = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \frac{\sum\limits_{q=1}^{n} \frac{u_q}{R_q}}{\sum\limits_{q=1}^{n} \frac{1}{R_q}} \quad \text{и} \quad R_{Ek} = \left.\frac{u_k}{i_k}\right|_{\forall q \in [1,n] \text{ и } q \neq k,\ u_q = 0} = R_k + \frac{1}{\sum\limits_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^{n} \frac{1}{R_q}}.$$

Если $R_1 = R_2 = \cdots = R_n$, то

$$u_S = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} u_q \quad \text{и} \quad R_{Ek} = \frac{n}{n-1} R_1.$$

Вопрос. Имеем схему инвертирующего сигнала (рис. 25.47). Дать выражения выходного напряжения и сопротивления по каждому входу.

Рис. 25.47. Инвертирующий сумматор



Ответ.

$$\forall q \in [1, n], \quad u_q = R_q i_q \quad \text{и} \quad u_S = -R_0 \sum_{q=1}^{n} i_q,$$

откуда:

$$u_S = -R_0 \sum_{q=1}^{n} \frac{u_q}{R_q} \quad \text{и} \quad R_{Ek} = \frac{u_k}{i_k} = R_k.$$

Если $R_1 = R_2 = \cdots = R_n$, то $u_S = \frac{-R_0}{R_1} \sum_{q=1}^{n} u_q$.

25.9.2. Дифференцирующий усилитель

Дифференцирующий усилитель (рис. 25.48) осуществляет дифференцирование в соответствии с соотношением: $u_S = \tau\frac{du_E}{dt}$, где τ — постоянная дифференцирования, выражаемая в секундах.

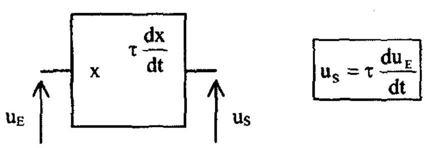


Рис. 25.48. Дифференцирующий усилитель

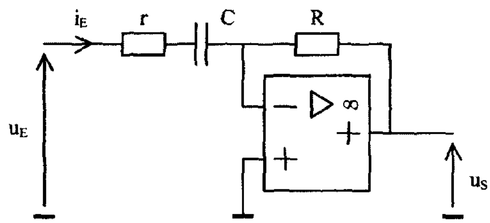


Рис. 25.49. Активный дифференцирующий усилитель

Вопрос. Для схемы активного дифференцирующего усилителя (рис. 25.49) дать выражение выходного напряжения при $r = 0$ и соотношение входных переменных в функции времени с последующим представлением в комплексной форме.

Ответ. Для $r = 0$ имеем:

$$i_E = C\frac{du_E}{dt} \text{ и } u_S = -Ri_E,$$

откуда:

$$u_S = -RC\frac{du_E}{dt} \text{ или в комплексной форме } \underline{T_U} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = -jRC\omega$$

и:

$$i_E = C\frac{du_E}{dt} \text{ или в комплексной форме } \underline{Z_E} = \frac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}} = \frac{1}{jC\omega}.$$

Примечание. Может оказаться необходимым демпфировать схему, включив сопротивление последовательно с конденсатором C. Тогда получим:

$$rC\frac{du_C}{dt} + u_s = -RC\frac{du_E}{dt} \text{ или в комплексной форме } \underline{T_U} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = -jRC\omega;$$

$$C\frac{du_E}{dt} = rC\frac{di_E}{dt} + i_E \text{ или в комплексной форме } \underline{Z_E} = \frac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}} = \frac{1}{jC\omega}.$$

Схема с сопротивлением r представляет собой дифференцирующий усилитель, если $\omega \ll 1/rC$.

Пример 25.9.5. Псевдодифференцирующие устройства RC и RL см. гл. 9.

25.9.3. Интегратор

Интегратор (обозначение приведено на рис. 25.50) осуществляет интегрирование напряжения в соответствии с приведенным здесь соотношением.

$$u_S = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} u_E dt = \frac{1}{\tau}\int_{0}^{t} u_E dt + u_S(0).$$

Вопрос. Имеем схему активного интегратора (рис. 25.51). Для $r \to +\infty$ дать выходное напряжение и входное соотношение в функции времени, затем — в комплексной форме.

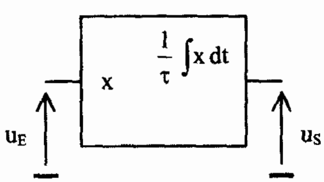


Рис. 25.50. Интегратор

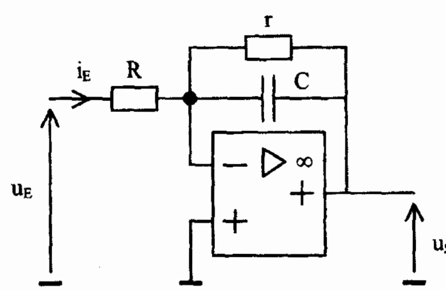


Рис. 25.51. Активный интегратор

Ответ. Для $r \to +\infty$ имеем: $i_E = -C\frac{du_S}{dt}$ и $u_E = Ri_E$, откуда $RC\frac{du_S}{dt} = -u_E$ или в комплексной форме

$$\underline{T_U} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{-1}{jRC\omega} \quad \text{и} \quad R_E = \frac{u_E}{i_E} = R.$$

Примечание. При отсутствии сопротивления r и при $u_E = 0$ усилитель переходит в насыщение из-за поляризационных токов и напряжения равновесия. Следовательно, необходимо добавить сопротивление r параллельно конденсатору C (за исключением случаев, когда интегратор находится в системе с обратной связью), чтобы фиксировать усиление по постоянному току. Тогда получаем:

$$rC\frac{du_S}{dt} + u_S = \frac{-r}{R}u_E \text{ или в комплексной форме } \underline{T_U} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{-r/R}{1 + jrC\omega}.$$

Схема с сопротивлением r является интегратором, если $\omega \gg 1/rC$.

Пример 25.9.6. Псевдоинтеграторы RC и RL см. гл. 9 и гл. 24.

25.9.4. Обратные функции и операции

Здесь рассматриваются принципы, позволяющие получить обратную функцию f^{-1} функции f и обратную операцию $*^{-1}$ операции $*$ путем введения функции f или операции $*$ в цепь обратной связи, обеспечив существование и устойчивость.

• ***Обратная функция*** (рис. 25.52 и 25.53). Примеры обратных функций: производная и интеграл, логарифм и экспонента и т. д.

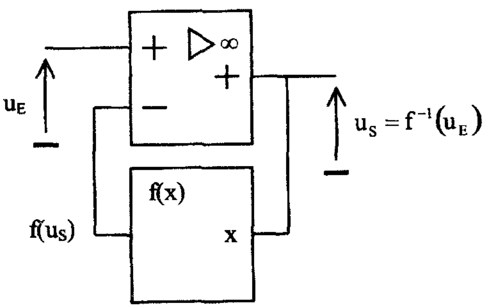


Рис. 25.52. Реализация обратной функции без изменения знака

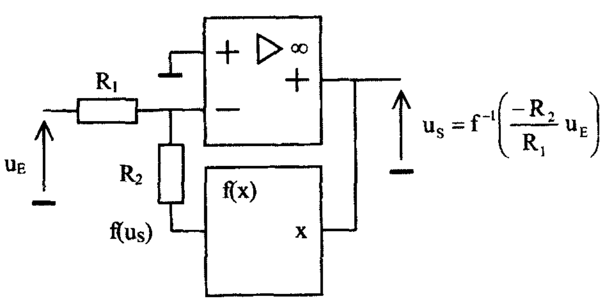


Рис. 25.53. Реализация обратной функции с изменением знака

• ***Обратные операции*** (рис. 25.54 и 25.55). Примеры обратных операций: сложение и вычитание, умножение и деление и т. д.

Рис. 25.54. Обратная операция без изменения знака ($*^{-1}$ является операцией, обратной операции $*$)

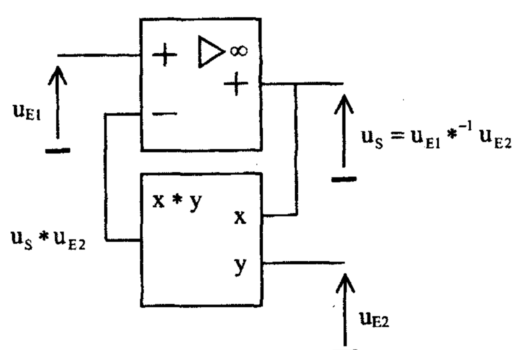
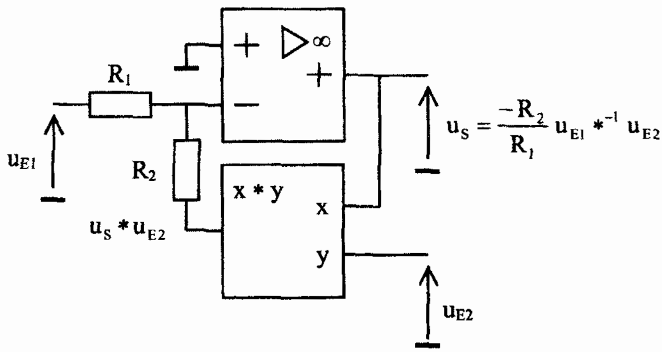


Рис. 25.55. Обратная операция с изменением знака ($*^{-1}$ *является операцией, обратной операции* $*$)



25.9.5. Умножитель

Умножитель (условное обозначение приведено на рис. 25.56) осуществляет операцию умножения двух напряжений. Постоянная C выражается в 1/В.

$$u_S = Cu_1u_2.$$

Пример 25.9.7. Квадратный корень для $u_E > 0$ (рис. 25.57) и для $u_E < 0$ (рис. 25.58).

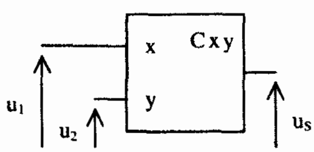


Рис. 25.56. Умножитель

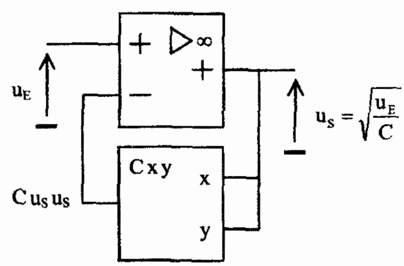


Рис. 25.57. Квадратный корень при $u_E > 0$

Пример 25.9.8. Деление (рис. 25.59). Здесь предлагается решение без изменения знака. Решение с изменением знака также возможно.

Пример 25.9.9. Амплитудная модуляция (рис. 25.60). Имеем модулируемый сигнал e и несущий u

$$e = E_{Max}\cos(\Omega t) \quad \text{и} \quad u = U_{Max}\cos(\omega_0 t), \quad \text{где} \quad \Omega \ll \omega_0.$$

Модулированный сигнал без несущего:

$$S_1 = CE_{Max}U_{Max}\cos(\Omega t)\cos(\omega_0 t) = mU_{Max}\cos(\Omega t)\cos(\omega_0 t),$$

где m — коэффициент модуляции: $m = CE_{Max}$.

Модулированный сигнал с несущим:

$$S_2 = U_{max}\,[1 + m\cos(\Omega t)]\cos(\omega_0 t).$$

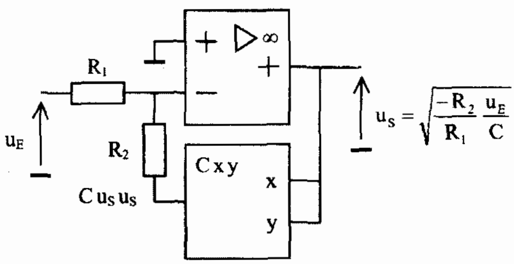


Рис. 25.58. Квадратный корень при $u_E < 0$

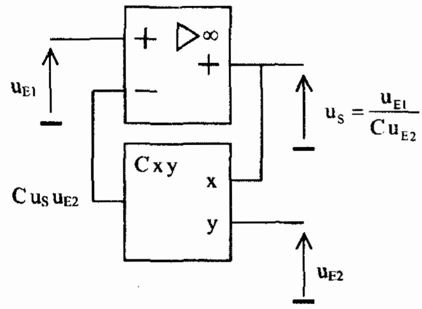


Рис. 25.59. Деление

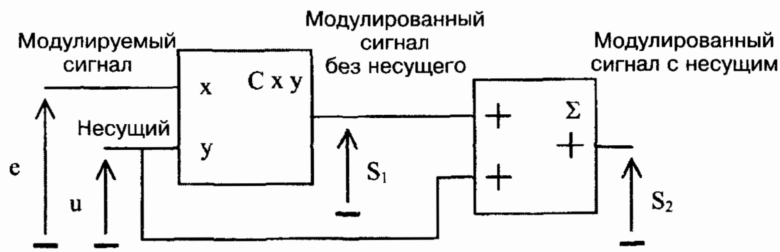


Рис. 25.60. Амплитудная модуляция

Пример 25.9.10. Амплитудная синхронная демодуляция (рис. 25.61). Этот принцип используется при модулированных по амплитуде сигналах с несущим или без него. Он позволяет иметь коэффициент модуляции до 100%. Если несущий сигнал непосредственно недоступен (очень распространенный случай), он должен быть восстановлен путем использования контура фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ).

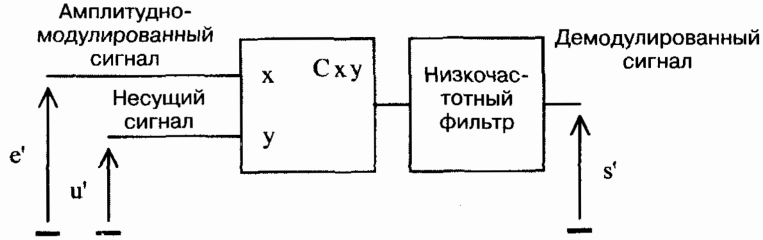


Рис. 25.61. Амплитудная синхронная демодуляция

Пример 25.9.11. Удвоитель частоты. Имеем синусоидальные напряжения u_1 и u_2 одинаковой частоты.

$$u_1 = U_{Max1}\sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad u_2 = U_{Max2}\sin(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Выходным напряжением умножителя будет:

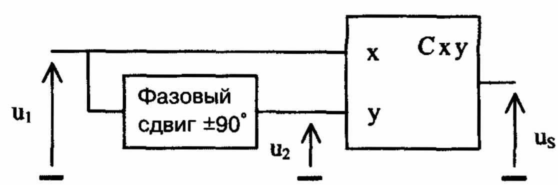
$$u_S = \frac{CU_{Max1}U_{Max2}}{2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Постоянная составляющая равна нулю, если, и только если $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{k\pi}{2}$ (k — целое). Выполнив это условие, получим напряжение на выходе:

$$u_S = \frac{CU_{Max1}U_{Max2}}{2}\sin(2\omega_0 t + 2\varphi_1).$$

Практически достаточно, например, напряжение u_2 сдвинуть по фазе на $\pm 90°$ по отношению к напряжению u_1 (рис. 25.62). Возможно также сдвинуть напряжение u_1 на $+45°$ по отношению к синусоидальному напряжению u_0, а напряжение u_2 сдвинуть на $-45°$ по отношению к тому же напряжению u_0.

Рис. 25.62. Удвоитель частоты



• ***Другие примеры.*** Реализация функции возведения в квадрат, управляемое напряжением усиление, ваттметр, среднеквадратический вольтметр, управляемые напряжением фильтры с предельной частотой, изменение или смещение частоты и т. д.

ГЛАВА 26

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ

26.1. Введение

Преобразование сигналов заключается в таких операциях, как смещение, изменение масштаба, линеаризация, отфильтровывание его и т. д. с целью последующего измерения его с максимально возможной точностью в заданном диапазоне измерений и с минимально возможной чувствительностью по отношению к различным воздействиям окружающей среды (температуры, влажности, качества питания, старения, химических повреждений и т. д.).

• ***Точность.*** Это способность предоставить наиболее близкое значение к истинному. Истинное значение может быть только оценочным.

• ***Чувствительность.*** Это изменение сигнала, следующее за изменением заданной величины.

• ***Ошибки.*** Разность истинного и измеренного значений называется погрешностью измерения. Погрешность измерения может быть только оценочной. Различают погрешности систематические и случайные.

- *Систематическая погрешность* может быть либо постоянной (для измеряемого значения величины), либо медленно меняющейся по сравнению с продолжительностью измерения. Она может быть снижена совершенствованием метода измерений, постоянным эталонированием или адекватной коррекцией результата.
- *Случайная ошибка* неизбежна и не зависит от воли оператора. Некоторые причины этого могут быть известны, но возникающие в процессе измерения ошибки могут быть неизвестными. Они составляют начало понятия недостоверности (см. § 26.4).

26.2. Дифференциальное исчисление. Чувствительность

Цель: определения и методы расчета бесконечно малых.

• ***Производная.*** *Производной* функции f переменной x является функция f′, определяемая как:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}.$$

Примечание. Здесь обозначено δx как приращение x, так как Δx сохранено для обозначения абсолютной погрешности (см. § 26.4).

• ***Дифференциал.*** Для функции f переменной x определяется как:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

• ***Правила определения производной и дифференциала.*** Функциями переменной x являются u и v.

Таблица 26.1. Определение производной и дифференциала

Функция	Производная	Дифференциал
$u + v$	$(u + v)' = u' + v'$	$d(u + v) = du + dv$
uv	$(uv)' = u'v + v'u$	$d(uv) = vdu + udv$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
u^n	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	$d(u^n) = nu^{n-1}du$
e^u	$(e^u)' = u'e^u$	$d(e^u) = e^u du$
$\ln(u)$	$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$	$d[\ln\|u\|] = \frac{du}{u}$

• ***Частная производная.*** Частными производными функции f при n переменных от x_1 до x_n являются функции f'_{x_k}, определяемые при любом $k \in [1, \ldots, n]$:

$$f'_{x_k}(x_1 \ldots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} = \lim_{\delta x_k \to 0} \frac{f(x_k + \delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_k, \ldots, x_n)}{\delta x_k}.$$

• ***Частный дифференциал.*** Частные дифференциалы функции f от n переменных от x_1 до x_n являются функции, определяемые при любом $k \in [1, \ldots, n]$.

$$d_{x_k} f(x_1, \ldots, x_n) = f'_{x_k}(x_1, \ldots, x_n)dx_k = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} dx_k.$$

• ***Полный дифференциал.*** Полным дифференциалом функции f при n переменных от x_1 до x_n является сумма частных дифференциалов.

$$df(x_x, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(x_x, \ldots, x_n)dx_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x_x, \ldots, x_n)}{\partial x_k}.$$

Пример 26.2.1. Полным дифференциалом функции f трех переменных x, y и z является сумма частных дифференциалов, что может быть записано как:

$$\mathrm{df}(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = \mathrm{f}'_x(x,\mathrm{y},\mathrm{z})\mathrm{d}x + \mathrm{f}'_\mathrm{y}(x,\mathrm{y},\mathrm{z})\mathrm{dy} + \mathrm{f}'_\mathrm{z}(x,\mathrm{y},\mathrm{z})\mathrm{dz} =$$
$$= \frac{\partial \mathrm{f}(x,\mathrm{y},\mathrm{z})}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \mathrm{f}(x,\mathrm{y},\mathrm{z})}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{f}(x,\mathrm{y},\mathrm{z})}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}$$

Вопрос. Имеем функцию $\mathrm{G} = \mathrm{f}(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = x\mathrm{y} - x\mathrm{z}$. Дать выражения частных производных функции G, затем полного дифференциала dG.

Ответ.

$$\mathrm{f}'_x(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} = \mathrm{y}-\mathrm{z}; \quad \mathrm{f}'_\mathrm{y}(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{y}} = x; \quad \mathrm{f}'_\mathrm{z}(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{z}} = -x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{dG} = (\mathrm{y}-\mathrm{z})\mathrm{d}x + x\mathrm{dy} - x\mathrm{dz}.$$

• ***Чувствительность.*** Чувствительности функции f при n переменных от x_1 до x_n определяются как:

$$\forall \mathrm{k} \in [1,\ldots,\mathrm{n}], \quad \mathrm{S}_{x_\mathrm{k}}^{\mathrm{f}(x_1,\ldots,x_\mathrm{n})} = \frac{\frac{\mathrm{d}_{x_\mathrm{k}}\mathrm{f}(x_1,\ldots,x_\mathrm{k})}{\mathrm{f}(x_1,\ldots,x_\mathrm{k})}}{\frac{\mathrm{d}x_\mathrm{k}}{x_\mathrm{k}}}.$$

Вопрос. Имеем функцию $\mathrm{G} = \mathrm{f}(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = x\mathrm{y} - x\mathrm{z}$. Дать выражение чувствительности функции G по переменным x, y, z.

Ответ.

$$\mathrm{S}_x^\mathrm{G} = \frac{\frac{(\mathrm{y}-\mathrm{z})\mathrm{d}x}{x\mathrm{y}-x\mathrm{z}}}{\mathrm{d}x/x} = 1, \quad \mathrm{S}_\mathrm{y}^\mathrm{G} = \frac{\frac{x\mathrm{dy}}{x\mathrm{y}-x\mathrm{z}}}{\mathrm{dy}/\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{y}-\mathrm{z}}, \quad \mathrm{S}_\mathrm{y}^\mathrm{G} = \frac{\frac{-x\mathrm{dz}}{x\mathrm{y}-x\mathrm{z}}}{\mathrm{dz}/\mathrm{z}} = \frac{-\mathrm{z}}{\mathrm{y}-\mathrm{z}}.$$

26.3. Приближенные расчеты методом малых приращений

Цель: последовательно свести изменение переменной к малым приращениям одной или нескольких величин (температуры, влажности, опорного напряжения или напряжения питания и т. д.) в окрестностях рабочей точки.

Метод

Для достаточно малых приращений осуществляем приближение первого порядка (линеаризацию в окрестностях рабочей точки). Затем рассчитываем полный дифференциал и заменяем дифференциалы соответствующими приращениями. Полное приращение функции f при n переменных от x_1 до x_n приближенно определяется как:

$$\delta \mathrm{f}(x_1,\ldots,x_\mathrm{n}) \approx \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial \mathrm{f}(x_1,\ldots,x_\mathrm{n})}{\partial x_\mathrm{k}}\delta x_\mathrm{k}.$$

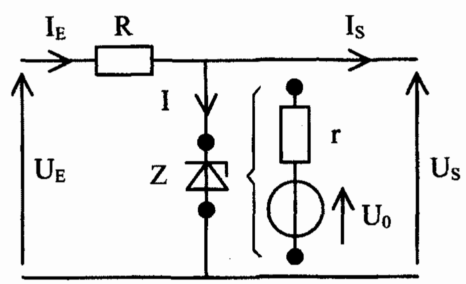
Вопрос. Для сопротивления R с температурным коэффициентом $TC = 10^{-5}/^\circ C$ (см. гл. 11) рассчитать относительное приращение $\delta R/R$ сопротивления при повышении температуры $\delta T = 10^\circ C$.

Ответ. $\frac{\delta R}{R} \approx TC\delta T = 10^{-4}$.

Вопрос. Имеем схему стабилизации напряжения (рис. 26.1). В окрестностях рабочей точки стабилитрон моделируется значением противо-ЭДС U_0 последовательно с сопротивлением r (см. гл. 16).

1) Дать выражение U_S в функции U_E, I_S, U_0.
2) Дать выражение полного дифференциала dU_S, полагая R и r постоянными.
3) Дать выражение коэффициента стабилизации верхнего уровня $\dfrac{\partial U_S}{\partial U_E}$.
4) Дать выражение коэффициента стабилизации нижнего уровня $\dfrac{\partial U_S}{\partial I_S}$.

Рис. 26.1. Стабилизация напряжения



Ответ. 1) Выходное напряжение:

$$U_S = r(I_E - I_S) + U_0 = r\left(\frac{U_E - U_S}{R} - I_S\right) + U_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_S\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{r}{R}U_E - rI_S + U_0,$$

откуда:

$$U_S = \frac{r}{r+R}U_E - \frac{rR}{r+R}I_S + \frac{R}{r+R}U_0.$$

2) Полный дифференциал dU_S.

$$dU_S = \frac{\partial U_S}{\partial U_E}dU_E - \frac{\partial U_S}{\partial I_S}dI_S + \frac{\partial U_S}{\partial U_0}dU_0$$

(предполагается постоянство r и R). Или:

$$dU_S = \frac{r}{r+R}dU_E - \frac{rR}{r+R}dI_S + \frac{R}{r+R}dU_0.$$

3) Коэффициент стабилизации верхнего уровня.

$$\frac{\partial U_S}{\partial U_E} = \left.\frac{dU_S}{dU_E}\right|_{dI_S=0 \text{ и } dU_0=0} = \left.\frac{dU_S}{dU_E}\right|_{I_S=\text{const и } U_0=\text{const}} = \frac{r}{r+R}.$$

4) Коэффициент стабилизации нижнего уровня.

$$\frac{\partial U_S}{-\partial I_S} = \left.\frac{dU_S}{-dI_S}\right|_{dI_S=0 \text{ и } dU_0=0} = \left.\frac{dU_S}{-dI_S}\right|_{I_S=\text{const и } U_0=\text{const}} = \frac{rR}{r+R}.$$

Затем можно окончательно получить приближение полного результирующего изменения малых приращений величин U_E, I_S, U_0:

$$\delta U_S \approx \frac{r}{r+R}\delta U_E - \frac{rR}{r+R}\delta I_S + \frac{R}{r+R}\delta U_0.$$

26.4. Ошибки. Погрешности. Допуски

Цель: оценить точность измерения, схемы, числового расчета или определить допуски составляющих в наихудшем случае.

• ***Абсолютная ошибка.*** Абсолютной ошибкой называют разность приближенного значения x и истинного (точного) значения x_v.

Абсолютная ошибка $= x - x_v$.

• ***Относительная ошибка.*** Это отношение абсолютной погрешности к истинному значению величины.

Относительная ошибка $= \frac{x-x_v}{x_v}$.

Внимание! Поскольку истинное значение всегда неизвестно, абсолютные и относительные ошибки всегда остаются неизвестными. Тогда возникает необходимость ввести понятие погрешности в качестве оценки максимума ошибки.

• ***Абсолютная погрешность.*** Ею называют оценочную мажоранту абсолютной ошибки, принимаемую в единицах измеряемой величины.

Абсолютная погрешность $= \Delta x =$ мажоранта $|x - x_v|$.

Примечание. $x - \Delta x \leqslant x_v \leqslant x + \Delta x$.

• ***Относительная погрешность.*** (Или коэффициент погрешности) — это отношение абсолютной погрешности к абсолютному приблизительному значению x.

Относительная погрешность $= \frac{\Delta x}{|x|}$.

> ***Метод***
> При достаточно малых относительных погрешностях осуществляют приближение первого порядка (линеаризацию в окрестностях номинального значения). Затем проводится следующий расчет.
> 1) Рассчитывается полный дифференциал.
> 2) Группируются коэффициенты дифференциалов независимых переменных.
> 3) Дифференциалы заменяются абсолютными погрешностями и берется абсолютное значение коэффициентов дифференциалов. Эта последняя операция называется «физическим мажорированием».

Внимание! Этапы 2) и 3) являются обязательными. Погрешности независимых переменных, взятые с коэффициентами, складываются в расчетах наихудших ситуаций.

Обоснование метода: имеем функцию f от n переменных от x_1 до x_n, предполагаемых независимыми. Тогда

$$\mathrm{df}(x_1,\ldots,x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathrm{df}(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_k}\right||\mathrm{d}x_k| \Rightarrow \Delta f(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_k}\right|\Delta x_k.$$

Вопрос. Имеем схему неинвертирующего усилителя на основе операционного усилителя, предполагаемого идеальным (рис. 26.2). Допуски сопротивлений R_1 и R_2 равны соответственно $\Delta R_1/R_1$ и $\Delta R_2/R_2$. Дать выражения абсолютной и относительной погрешностей усиления напряжения.

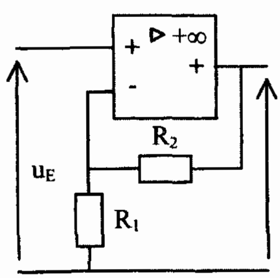


Рис. 26.2. Неинвертирующий усилитель на основе операционного усилителя

Ответ. Усиление по напряжению схемы (см. гл. 25) составит:

$$A_U = \frac{u_S}{u_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

1) Полный дифференциал.

$$\mathrm{d}A_U = \frac{\partial A_U}{R_1}\mathrm{d}R_1 + \frac{\partial A_U}{\partial R_2}\mathrm{d}R_2 = -\frac{R_2}{R_1^2}\mathrm{d}R_1 + \frac{1}{R_1}\mathrm{d}R_2.$$

2) Коэффициенты дифференциалов уже перегруппированы независимыми переменными.

3) Абсолютная и относительная погрешности.

$$\Delta A_U = \frac{R_2}{R_1^2}\Delta R_1 + \frac{1}{R_1}\Delta R_2,$$

так как R_1 и R_2 положительны.

$$\frac{\Delta A_U}{A_U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2}\right),$$

так как A_U положителен.

• ***Примечание.*** Выше использованный метод расчета (частных производных) позволил получить полный дифференциал. Этот метод эффективен, хотя иногда громоздок. Кроме того, он исходит из рассмотрения независимых переменных, что позволяет избежать этап 2). Два других метода позволяют иногда упростить расчеты.

> ***Метод***
> Если имеем суммы и разности произведений и частных, то дифференциал рассчитывается прямо.

Вопрос. Рассмотреть предыдущую задачу с учетом того, что усиление записано в следующей форме.

$$A_U = \frac{u_S}{u_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Ответ.

$$dA_U = d\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{R_1 dR_2 - R_2 dR_1}{R_1^2},$$

$$\frac{dA_U}{A_U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1}\right).$$

> ***Метод***
> Если имеем произведения и частные сумм и разностей, то берется логарифм функции, затем рассчитывается дифференциал.

Вопрос. Рассмотреть предыдущую задачу с учетом того, что усиление записано в следующей форме.

$$A_U = \frac{u_S}{u_E} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

Ответ.

$$A_U = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \Rightarrow |A_U| = \frac{|R_1 + R_2|}{|R_1|} \Rightarrow \ln|A_U| = \ln|R_1 + R_2| - \ln|R_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\left[\ln|A_U|\right] = d\left[\ln|R_1 + R_2| - \ln|R_1|\right] = d\left[\ln|R_1 + R_2|\right] - d\left[\ln|R_1|\right],$$

откуда:

$$\frac{dA_U}{A_U} = \frac{d(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} - \frac{dR_1}{R_1} = \frac{dR_1 + dR_2}{R_1 + R_2} - \frac{dR_1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1}\right).$$

Вопрос. Сопротивление измеряется методом вольтметра – амперметра. Измерено напряжение $U = 5$ В с точностью 2% и ток $I = 100$ мА с точностью 3%. Рассчитать абсолютную и относительную погрешности измерения.

Ответ.

$$R = \frac{U}{I}50 \text{ Ом} \Rightarrow \ln|R| = \ln|U| - \ln|I| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 5\%$$

$\Rightarrow \Delta R = \pm 2{,}5$ Ома (R, U, I — положительны).

26.5. Калибровка

Цель: *аналоговая калибровка* позволяет адаптировать исходящую из контура электрическую величину (напряжение, ток) к диапазону полного размаха приемного контура, чтобы оптимизировать работу последнего (рис. 26.3).

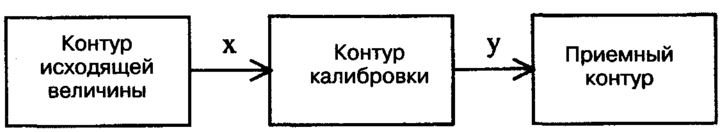


Рис. 26.3. Ситуация в задаче калибровки

Диапазон полного размаха контура представляет собой наибольшее возможное отклонение эксплуатируемой величины.

С теоретической точки зрения аналоговая калибровка состоит в сходном преобразовании электрической величины (рис. 26.4). Здесь A — усиление контура калибровки, B — его *смещение.* A и B могут быть как положительными, так и отрицательными. Если $|A| > 1$, контур усиливает сигнал, если $|A| < 1$, ослабляет его.

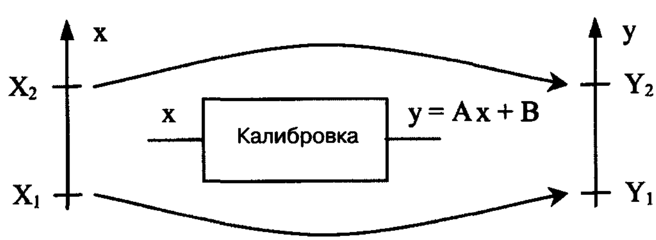


Рис. 26.4. Принцип аналоговой калибровки

Для получения значений A и B следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Y_2 = AX_2 + B, \\ Y_1 = AX_1 + B, \end{cases}$$

из которой следует:

$$A = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{и} \quad B = \frac{X_2 Y_1 - X_1 Y_2}{X_2 - X_1}.$$

Примечание. Выбор полного входного сопротивления калибрующего контура очень важен. В случае подачи на его вход напряжения сопротивление должно быть очень большим по сравнению с полным сопротивлением источника, чтобы не вызвать систематической ошибки. Тогда как в случае работы на высоких частотах или, если линия разделяет исходящий контур и контур калибровки, полные сопротивления должны быть согласованы.

Вопрос. Имеем схему калибрующего контура (рис. 26.5). Датчик температуры имеет передаточную функцию $u_{Capt} = a\theta$, где $a = 10$ мВ/К, θ — абсолютная температура в кельвинах (К). Желательно получить: $u_S = 0$ В при $T = 0$ °Си $u_S = 10$ В при $T = 20$ °С. Предполагается, что $u_{Capt} = 5$ В и $U_{Ref} = 5$ В являются идеальными источниками напряжения, а $\alpha_1 = R_0/R_1$ и $\alpha_2 = R_0/R_2$.

1) Дать выражение выходного напряжения.
2) Дать выражения и рассчитать α_1 и α_2.

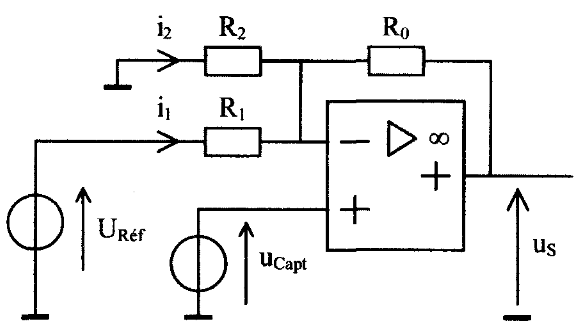


Рис. 26.5. Калибрующий контур датчика температуры

Ответ. 1) Определение выходного напряжения. Имеем:

$$u_S = u_{Capt} - R_0(i_1 + i_2) = u_{Capt} - R_0\left(\frac{U_{Ref} - u_{Capt}}{R_1} + \frac{0 - u_{Capt}}{R_2}\right),$$

откуда:

$$u_S = (1 + \alpha_1 + \alpha_2)u_{Capt} - \alpha_1 U_{Ref}, \quad \text{где} \quad \alpha_1 = R_0/R_1 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = R_0/R_2.$$

Выходное напряжение выражается как:

$$u_S = Au_{Capt} + B, \quad \text{где} \quad A = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{и} \quad B = -\alpha_1 U_{Ref}.$$

2) Расчет α_1 и α_2. Согласно § 26.5 имеем:

$$A = \frac{U_{S2} - U_{S1}}{U_{Capt2} - U_{Capt1}} = \frac{U_{S2} - U_{S1}}{a(\Theta_2 - \Theta_1)} = 50,$$

$$B = \frac{U_{Capt2}U_{S1} - U_{Capt1}U_{S2}}{U_{Capt2} - U_{Capt1}} = \frac{\Theta_2 U_{S2} - \Theta_1 U_{S1}}{\Theta_2 - \Theta_1} = -136{,}57.$$

Выходное напряжение составит (θ в кельвинах, а T в °C)

$$u_S = 50u_{Capt} - 136{,}57 = 0{,}5(\theta) - 136{,}57 = 0{,}5(T + 273{,}15) - 136{,}57 = 0{,}5T,$$

откуда:

$$\alpha_1 = \frac{R_0}{R_1} = \frac{-B}{U_{Ref}} = 27{,}31 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{R_0}{R_2} = A - 1 + \frac{B}{U_{Ref}} = 21{,}68.$$

ГЛАВА 27

ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ: ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ. ГЕНЕРАТОРЫ КОЛЕБАНИЙ

В этой главе используется комплексная форма записи. Переход к изображениям Лапласа осуществляется простой заменой $j\omega$ на оператор p (см. гл. 10).

27.1. Принцип построения замкнутых систем. Обратная связь

При наличии *обратной связи* доля выходной переменной подается на вход замкнутой системы. Замкнутую систему можно представить функциональной схемой, называемой также *блок-схемой*. На входе такой системы имеется элемент, выполняющий сложение (сумматор) сигнала входного воздействия с частью выходного сигнала (см. § 27.1.1), или вычитание (вычитающее устройство) из входного сигнала части выходного сигнала (см. § 27.1.2).

27.1.1. Блок-схема с сумматором на входе (рис. 27.1)

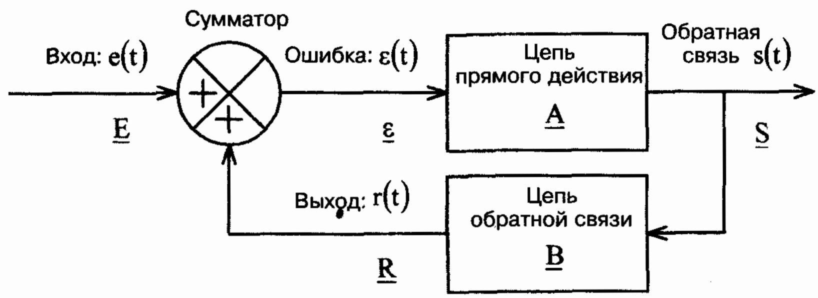


Рис. 27.1. Принцип создания обратной связи с сумматором на входе

а) Передаточные функции

– Передаточная функция цепи прямого действия: $\underline{A} = \underline{S}/\underline{\varepsilon}$.
– Передаточная функция цепи обратной связи: $\underline{B} = \underline{R}/\underline{S}$.

– Передаточная функция разомкнутой системы: $\underline{T_{BO}} = \underline{R}/\underline{\varepsilon} = \underline{AB}$.
– Передаточная функция замкнутой системы:

$$\begin{cases} \underline{S} = \underline{A}\underline{\varepsilon}, \\ \underline{\varepsilon} = \underline{E} + \underline{BS}, \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{T_{BF}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{A}}{1 - \underline{AB}}.$$

б) Общие свойства обратной связи

Гипотезы: все элементы системы линейны, замкнутая система устойчива (см. п. в).

• ***Отрицательная и положительная связи.***

– Связь отрицательная, если амплитуда (модуль) выходного сигнала сумматора (значение ошибки) меньше амплитуды входного сигнала:

$$|\underline{T_{BF}}| < |\underline{A}| \Rightarrow |1 - \underline{AB}| > 1.$$

– Связь положительная, если амплитуда выходного сигнала сумматора (значение ошибки) больше амплитуды входного сигнала:

$$|\underline{T_{BF}}| > |\underline{A}| \Rightarrow |1 - \underline{AB}| < 1.$$

Примечание. Строго говоря, передаточные функции цепей прямого действия и обратной связи являются функциями частоты. Следовательно, отклик системы может быть положительным в одном диапазоне частот и отрицательным вне его.

• ***Модуль (коэффициент усиления).*** Модуль передаточной функции (коэффициент усиления) замкнутой системы меньше модуля передаточной функции цепи прямого действия при отрицательной обратной связи и больше — при положительной обратной связи (прямое следствие предшествующих положений).

• ***Полоса пропускания. Время отклика.*** Для упрощения мы полагаем здесь, что передаточная функция обратной связи является действительной постоянной $\underline{B} = k$.

– Случай, когда передаточная функция цепи прямого действия является низкочастотной функцией 1-го порядка.

$$\underline{A} = \frac{A_0}{1 + j\omega/\omega_H} \Rightarrow \underline{T_{BF}} = \frac{A_0}{1 - A_0 k} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{H\,BF}},$$

где $\omega_{H\,BF} = \omega_H(1 - A_0 k)$.

Частота среза при -3 дБ замкнутой системы больше частоты среза при -3 дБ цепи прямого действия при отрицательной обратной связи ($A_0 k < 0$) и меньше при положительной обратной связи ($A_0 k > 0$).

Следовательно, время отклика (возрастания или спадания) уменьшается при отрицательной связи и увеличивается при положительной связи.

– Случай, когда передаточная функция цепи прямого действия является высокочастотной функцией 1-го порядка.

$$\underline{A} = \frac{A_0}{1 - j\omega_L/\omega} \Rightarrow \underline{T_{BF}} = \frac{A_0}{1 - A_0 k}\frac{1}{1 - j\omega_{L\,BF}/\omega},$$

где $\omega_{L\,BF} = \omega_L(1 - A_0 k)$.

Частота среза при -3 дБ замкнутой системы меньше частоты среза при -3 дБ цепи прямого действия при отрицательной обратной связи ($A_0 k < 0$) и больше при положительной обратной связи ($A_0 k > 0$).

– Рассматривая передаточную функцию цепи прямого действия как произведение передаточных функций низко- и высокочастотного фильтров 1-го порядка при $\omega_L \ll \omega_H$, получим, что полоса пропускания замкнутой системы больше полосы пропускания цепи прямого действия при отрицательной обратной связи и меньше — при положительной связи.

• ***Чувствительность к возмущению.*** Замкнутая система менее чувствительна к возмущению, чем цепь прямого действия (не затрагивая цепь обратной связи), при отрицательной обратной связи и более чувствительна при положительной связи.

Чувствительностью цепи прямого действия на возмущение x является:

$$S_x^{\underline{A}} = \frac{d\underline{A}/\underline{A}}{dx/x}.$$

Чувствительностью замкнутой системы на возмущение x является:

$$S_x^{\underline{T_{BF}}} = \frac{d\underline{T_{BF}}/\underline{T_{BF}}}{dx/x}.$$

Полагая $\underline{D} = 1 - \underline{AB}$, можно записать:

$$S_x^{\underline{T_{BF}}} = \frac{d\underline{A}/\underline{A} - d\underline{D}/\underline{D}}{dx/x}.$$

Откуда: полагая $\underline{B}$ нечувствительным к x, получим:

$$S_x^{\underline{T_{BF}}} = \frac{1}{\underline{D}}\frac{d\underline{A}/\underline{A}}{dx/x} \quad \text{или} \quad S_x^{\underline{T_{BF}}} = \frac{S_x^{\underline{A}}}{1 - \underline{AB}}.$$

в) Устойчивость (упрощенный анализ). Запас по фазе, запас устойчивости

– Когда знаменатель передаточной функции замкнутой системы становится равным нулю, система находится на границе устойчивости (возможны синусоидальные колебания). Отсюда:

$$\underline{T_{BO}} = \underline{A}\underline{B} = |\underline{A}|\,|\underline{B}|\,e^{j(\varphi_A+\varphi_B)} = +1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\underline{T_{BO}}| = |\underline{A}\underline{B}| = |\underline{A}|\,|\underline{B}| = 1, \\ \mathrm{Arg}\underline{T_{BO}} = \varphi_A + \varphi_B = \pm 2k\pi. \end{cases}$$

- Устойчивость системы можно определить из передаточной функции разомкнутой системы: при возможных частотах синусоидальных колебаний, т. е. при $\mathrm{Arg}\underline{T_{BO}} = \pm 2k\pi$, система устойчива, если $|\underline{T_{BO}}| < 1$, неустойчива, если $|\underline{T_{BO}}| > 1$, колеблется синусоидально, если $|\underline{T_{BO}}| = 1$ ($\Leftrightarrow G_{BO} = 0$ дБ). Рассматривают различные случаи:
  - Если $\underline{T_{BO}}$ при любой частоте является комплексным или действительным отрицательным числом, замкнутая система устойчива.
  - Если $\underline{T_{BO}}$ при частоте $f_0 = 1$ является действительным положительным числом, то замкнутая система при этой частоте колеблется синусоидально.
  - Если $\underline{T_{BO}}$ при частоте f_0 является действительным положительным числом, бóльшим 1, система колеблется несинусоидально при частоте $f \neq f_0$.
  - Если $\underline{T_{BO}}$ является действительным положительным числом, бóльшим 1 в широком диапазоне частот, замкнутая система может застопориться (насыщения).
- Чем ближе система к границе устойчивости, тем более склонен к колебательности отклик в функции времени при значительном сдвиге по фазе, и тем больше риск нестабильности (отклонения параметров). Для количественной оценки устойчивости введены два следующих понятия.

1) *Запас по фазе*:

$$M_\varphi = 2\pi + \mathrm{Arg}\underline{T_{BO}}(\omega_X),$$

где ω_X — пульсация, для которой $|\underline{T_{BO}}(\omega_X)| = 1$ ($\Leftrightarrow G_{BO}(\omega_X) = 0$ дБ). Замкнутая система устойчива при $M_\varphi > 0$ и неустойчива при $M_\varphi < 0$.

2) *Запас устойчивости*:

$$M_G = -G_{BO}(\omega_Y),$$

где ω_Y — пульсация, для которой $|\underline{T_{BO}}(\omega_Y)| = -2\pi$. Замкнутая система устойчива при $M_G > 0$ и неустойчива при $M_G < 0$.

Примечание. Устойчивость системы можно определить из анализа знаменателя передаточной функции замкнутой системы. Система устойчива, если все ее полюса (корни знаменателя, записанного в изображениях Лапласа, см. гл. 10) имеют действительную часть строго отрицательную. Это необходимое условие затухания свободных составляющих.

27.1.2. Блок-схема с вычитающим устройством на входе

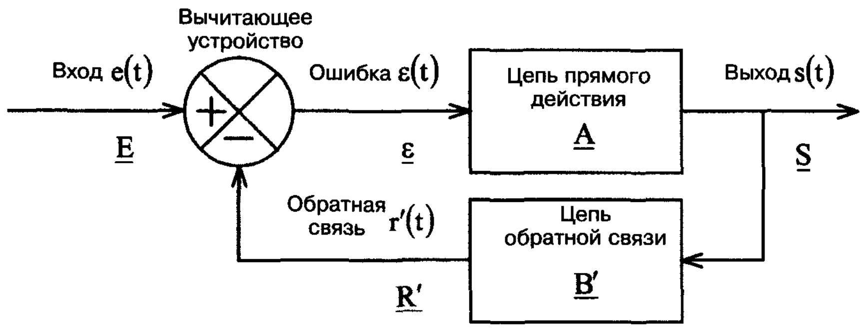


Рис. 27.2. Принцип создания обратной связи с вычитающим устройством на входе

Окончательный результат очевидно идентичен полученному для блок-схемы с сумматором на входе (см. рис. 27.1). Но следует уточнить полученные выше результаты, зная, что: $\underline{B}' = -\underline{B}$ и $\underline{R}' = -\underline{R}$. Тогда получим:

$$\frac{\underline{S}}{\underline{\varepsilon}} = \underline{A}, \quad \frac{\underline{R}'}{\underline{S}} = \underline{B}', \quad \underline{T'_{BO}} = \frac{\underline{R}'}{\underline{\varepsilon}} = \underline{AB'}, \quad \underline{T_{BF}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{A}}{1+\underline{AB'}},$$

$$\underline{T'_{BO}} = -\underline{T_{BO}} \Rightarrow |\underline{T'_{BO}}| = |\underline{T_{BO}}|, \quad \mathrm{Arg}\underline{T'_{BO}} = -\pi + \mathrm{Arg}\underline{T_{BO}}, \quad G'_{BO} = G_{BO}.$$

– Обратная связь отрицательна, если: $|\underline{T_{BF}}| < |\underline{A}|$ или $|1 + \underline{AB'}| > 1$.
– Обратная связь положительна, если: $|\underline{T_{BF}}| > |\underline{A}|$ или $|1 + \underline{AB'}| < 1$.
– Граница устойчивости определяется согласно:

$$\underline{T'_{BO}} = \underline{AB'} = |\underline{A}|\,|\underline{B'}|\,e^{j(\varphi_A+\varphi_{B'})} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{T'_{BO}}| = |\underline{A}|\,|\underline{B'}| = 1, \\ \mathrm{Arg}\,\underline{T'_{BO}} = \varphi_A + \varphi_{B'} = \pm\pi \pm 2k\pi. \end{cases}$$

При $\mathrm{Arg}\underline{T'_{BO}} = \pm\pi \pm 2k\pi$ система устойчива, если $|\underline{T'_{BO}}| < 1$, и неустойчива, если $|\underline{T'_{BO}}| > 1$, и синусоидально колеблется, если $|\underline{T'_{BO}}| = 1$ ($\Leftrightarrow G'_{BO} = 0$ дБ).

1) *Запас по фазе*:

$$M_\varphi = \pi + \mathrm{Arg}\underline{T'_{BO}}(\omega_X),$$

где ω_X — пульсация, для которой $|\underline{T'_{BO}}(\omega_X)| = 1$ ($\Leftrightarrow G'_{BO}(\omega_X) = 0$ дБ).

2) *Запас устойчивости:*

$$M_G = -G'_{BO}(\omega_Y),$$

где ω_Y — пульсация, для которой $\mathrm{Arg}\underline{T'_{BO}}(\omega_Y) = -\pi$.

> ***Метод***
> Диаграмма Боде (см. гл. 5) передаточной функции разомкнутой системы позволяет представить наглядно запас по фазе и запас устойчивости

Вопрос. Имеем диаграмму Боде передаточной функции разомкнутой системы 3-го порядка (рис. 27.3). Измерить приблизительно запасы по фазе и устойчивости, полагая, что замкнутая система представляется блок-схемой с вычитающим устройством на входе. Дать заключение об устойчивости системы.

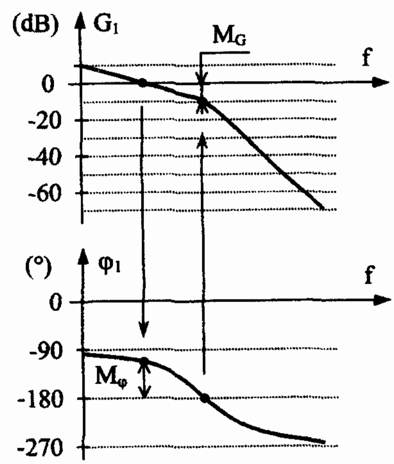


Рис. 27.3. Диаграмма Боде системы 3-го порядка

Ответ.

$$G_1 = 0 \text{ дБ} \Rightarrow f = f_X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_\varphi = 180° + \operatorname{Arg}\underline{T_1}(f_X) \approx 70°,$$

$$\varphi_1 = -180° \Rightarrow f = f_Y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_G = -G_1(f_Y) \approx 10 \text{ дБ}.$$

Таким образом, замкнутая система устойчива.

Примечания.

- Обычно для обеспечения приемлемого уровня устойчивости запас устойчивости по фазе устанавливают в окрестности 45°, а запас устойчивости близким к 12 дБ.
- Полагая, что блок-схема содержит на входе устройство вычитания, из предыдущих результатов получаем, что передаточная функция разомкнутой системы 1-го и 2-го порядков устойчива всегда.

Внимание! Не следует забывать, что система 2-го порядка в действительности является системой 3-го порядка, упрощенной при моделировании.

27.2. Ввод обратной связи через усилитель

При отрицательной обратной связи замкнутую систему представляют блок-схемой с устройством вычитания на входе. Мы полагаем здесь, что системы устойчивы, для которых $|1 + \underline{AB'}| > 1$ (см. § 27.1.2).

27.2.1. Эффекты обратной связи

- Снижение усиления.
- Расширение полосы пропускания и, как следствие, повышение быстродействия.
- Снижение чувствительности к помехам.
- Снижение искажений нелинейности и усиления.
- Изменение полных входного и выходного сопротивлений.

27.2.2. Четыре структуры реакций

Есть два способа реализации устройства вычитания электрическими методами (см. рис. 27.2). Либо вычитаются напряжения, тогда выход четырехполюсника обратной связи включается последовательно со входом прямого четырехполюсника (рис. 27.4 и 27.5). Либо вычитаются токи, тогда выход четырехполюсника обратной связи включается параллельно входу прямого четырехполюсника (рис. 27.6 и 27.7). Выходной информацией является либо напряжение, либо ток.

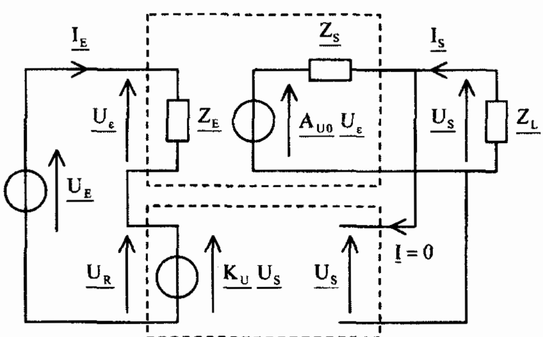


Рис. 27.4. Последовательная обратная связь по напряжению (система напряжение-напряжение)

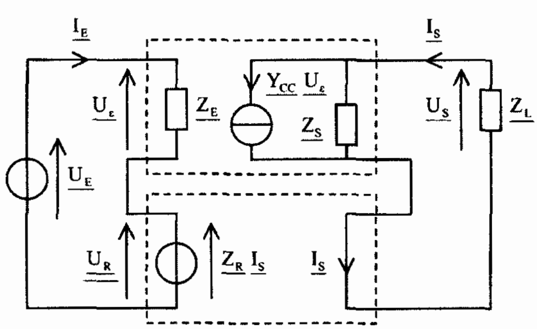


Рис. 27.5. Последовательная обратная связь по току (система ток–напряжение)

Рис. 27.6. Параллельная обратная связь по напряжению (система напряжение-ток)

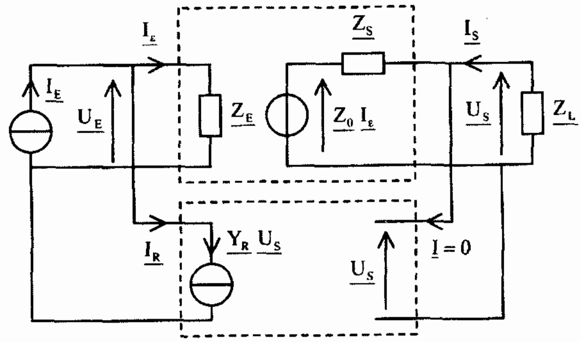
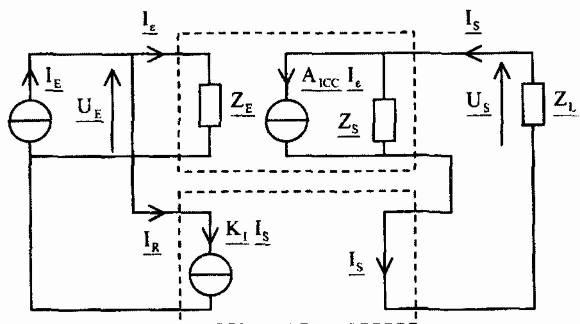


Рис. 27.7. Параллельная обратная связь по току (система ток-ток)



- ***Гипотезы и обозначения.***
  - Четырехполюсник цепи прямого действия (усилитель) не имеет собственной внутренней реакции. Его представляем эквивалентной схемой (см. гл. 25).
  - Четырехполюсник цепи обратной связи потребляет незначительную выходную мощность. Если он измеряет выходное напряжение $\underline{U}_S$, то его полное входное сопротивление должно рассматриваться как бесконечное (входной ток равен нулю). А если он измеряет выходной ток $\underline{I}_S$, то его полное входное сопротивление должно рассматриваться как равное нулю (входное напряжение равно нулю).
  - Цепь прямого действия: $\underline{A}_{U0}$ — передаточная функция по напряжению, холостой ход на выходе; $\underline{A}_{ICC}$ — передаточная функция по току, короткое замыкание на выходе; $\underline{Z}_0$ — полное переходное сопротивление, холостой ход на выходе; $\underline{Y}_{CC}$ — полная переходная проводимость, короткое замыкание на выходе.
  - Цепь обратной связи: $\underline{K}_U$ — передаточная функция по напряжению; $\underline{K}_I$ — передаточная функция по току; $\underline{Z}_R$ — полное переходное сопротивление; $\underline{Y}_R$ — полная переходная проводимость.

• ***Полное входное сопротивление замкнутой системы. Модель Тевенена или Нортона для выхода в замкнутой системе.***

Таблица 27.1. Сравнение представлений замкнутых систем

Отклик	Входное сопротивление замкнутой системы	Модель Тевенена или Нортона выхода в замкнутой системе	
		Передаточная функция	Полное выходное сопротивление
Напряжение-напряжение (рис. 27.4)	$\underline{Z}_{EBF} = \frac{\underline{U}_E}{\underline{I}_E} = \underline{Z}_E\left(1+\frac{\underline{Z}_L\underline{A}_{U0}K_U}{\underline{Z}_L+\underline{Z}_S}\right)$	$\underline{A}_{U0BF} = \left.\frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E}\right\rvert_{\underline{I}_S=0} = \frac{\underline{A}_{U0}}{1+\underline{A}_{U0}K_U}$	$\underline{Z}_{SBF} = \left.\frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_S}\right\rvert_{\underline{U}_E=0} = \frac{\underline{Z}_S}{1+\underline{A}_{U0}K_U}$
Ток-напряжение (рис. 27.5)	$\underline{Z}_{EBF} = \frac{\underline{U}_E}{\underline{I}_E} = \underline{Z}_E\left(1+\frac{\underline{Z}_S\underline{Z}_R\underline{Y}_{CC}}{\underline{Z}_L+\underline{Z}_S}\right)$	$\underline{Y}_{CCBF} = \left.\frac{\underline{I}_S}{\underline{U}_E}\right\rvert_{\underline{U}_S=0} = \frac{\underline{Y}_{CC}}{1+\underline{Y}_{CC}\underline{Z}_R}$	$\underline{Z}_{SBF} = \left.\frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_S}\right\rvert_{\underline{U}_E=0} = \underline{Z}_S(1+\underline{Y}_{CC}\underline{Z}_R)$
Напряжение-ток (рис. 27.6)	$\underline{Z}_{EBF} = \frac{\underline{U}_E}{\underline{I}_E} = \frac{\underline{Z}_E}{1+\underline{Y}_R\underline{Z}_0\underline{Z}_L/(\underline{Z}_L+\underline{Z}_S)}$	$\underline{Z}_{0BF} = \left.\frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_E}\right\rvert_{\underline{I}_S=0} = \frac{\underline{Z}_0}{1+\underline{Y}_R\underline{Z}_0}$	$\underline{Z}_{SBF} = \left.\frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_S}\right\rvert_{\underline{I}_E=0} = \frac{\underline{Z}_S}{1+\underline{Y}_R\underline{Z}_0}$
Ток-ток (рис. 27.7)	$\underline{Z}_{EBF} = \frac{\underline{U}_E}{\underline{I}_E} = \frac{\underline{Z}_E}{1+\underline{A}_{ICC}K_I\underline{Z}_S/(\underline{Z}_L+\underline{Z}_S)}$	$\underline{A}_{ICCBF} = \left.\frac{\underline{I}_S}{\underline{I}_E}\right\rvert_{\underline{U}_S=0} = \frac{\underline{A}_{ICC}}{1+\underline{A}_{ICC}K_I}$	$\underline{Z}_{SBF} = \left.\frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_S}\right\rvert_{\underline{I}_E=0} = \underline{Z}_S(1+\underline{A}_{ICC}K_I)$

Вопрос. Имеем неинвертирующий усилитель на базе операционного (см. рис. 27.8) и его эквивалентную схему (рис. 27.9). См. гл. 21.

1) Какого типа обратная связь?

2) Полагая $\underline{Z}_D = \infty$ и $\underline{Z}_S = 0$, дать выражение низкочастотной передаточной функции, затем частоты среза при -3 дБ, зная, что $\underline{\mu} = \mu_0/(1 + jf/f_1)$.

3) Выразить полное выходное сопротивление, полагая $\underline{Z}_D = \infty$.

4) Выразить полное входное сопротивление, полагая $\underline{Z}_S = 0$.

Ответ.

1) Обратная связь типа напряжение-напряжение, потому что на вход последовательно с напряжением задания $\underline{U}_E$ приложена часть выходного напряжения $\underline{U}_S$. Имеем: $\underline{\varepsilon} = \underline{U}_E - K_U\underline{U}_S$, где $K_U = R_1/(R_1 + R_2)$.

2) Низкочастотная передаточная функция: $\underline{A}_{UBF} = \frac{\mu}{1+\underline{\mu}K_U} = \frac{A_0}{1+f/f_C}$.

Здесь: $A_0 = \mu_0/(1 + \mu_0 K_U)$ — усиление по постоянному току; $f_C = f_1(1 + \mu_0 K_U)$ — частота среза при -3 дБ.

Если $\mu_0 K_U \gg 1$, то $\underline{A}_{UBF} \approx \frac{1}{K_U} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Усиление зависит только от обратной связи.

3) Полное выходное сопротивление замкнутой системы.

$$\begin{cases} \underline{U}_E = 0, \\ \underline{Z}_D = \infty, \end{cases} \quad \Rightarrow \underline{\varepsilon} = -K_U\underline{U}_S \Rightarrow \underline{U}_S = \underline{\mu}\underline{\varepsilon} + \underline{Z}_S\underline{I}_S = -\underline{\mu}K_U\underline{U}_S + \underline{Z}_S\underline{I}_S,$$

откуда:

$$\underline{Z_{SBF}} = \left.\frac{\underline{U_S}}{\underline{I_S}}\right|_{\underline{U_E}=0} = \frac{\underline{Z_S}}{1+\underline{\mu}K_U}.$$

4) Полное входное сопротивление замкнутой системы.

$$\underline{Z_S} = 0 \Rightarrow \underline{U_E} = \underline{\varepsilon} + K_U\underline{U_S} = \underline{\varepsilon}(1+\underline{\mu}K_U) = \underline{Z_D}\underline{I_E}(1+\underline{\mu}K_U),$$

откуда:

$$\underline{Z_{EBF}} = \frac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}} = \underline{Z_D}(1+\underline{\mu}K_U).$$

Примечание. Обратная связь умножает частоту среза при −3 дБ на коэффициент $(1+\mu_0 K)$ и делит усиление по постоянному току на этот же коэффициент. Произведение «усиление-полоса» остается постоянным: $A_0 f_C = \mu_0 f_1$ (см. гл. 21).

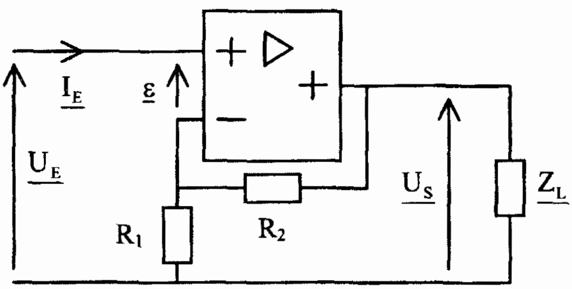


Рис. 27.8. Неинвертирующий усилитель для ОУ

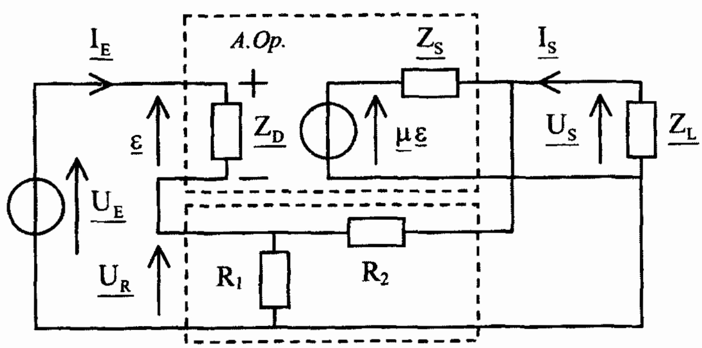


Рис. 27.9. Эквивалентная схема

27.3. Генераторы синусоидальных колебаний

27.3.1. Блок-схема генератора синусоидальных колебаний

Критерием синусоидальных колебаний является так называемый *критерий Баркхаузена.* Он определяет частоту колебаний и условия колебательности, исходя из передаточной функции разомкнутой системы:

$$\underline{A}\underline{B} = +1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |\underline{A}\underline{B}| = |\underline{A}|\,|\underline{B}| = 1, \\ \mathrm{Arg}(\underline{A}\underline{B}) = \pm 2k\pi, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(\underline{A}\underline{B}) = 1, \\ \mathrm{Im}(\underline{A}\underline{B}) = 0. \end{cases}$$

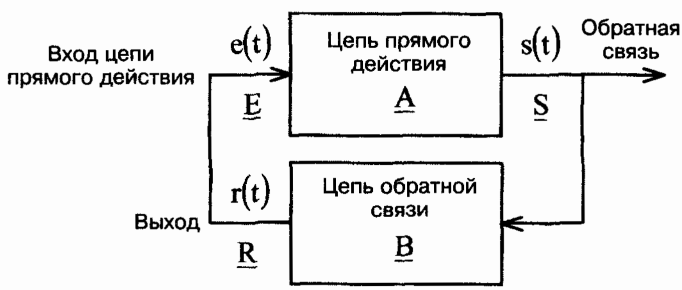


Рис. 27.10. Принцип построения генератора синусоидальных колебаний

Этот критерий означает, что сигнал обратной связи и входной сигнал цепи прямого действия должны быть синфазными с одинаковой амплитудой, чтобы система колебалась синусоидально с частным значением частоты f_0.

Внимание! Расчет передаточной функции разомкнутой системы $\left(\underline{T}_{BO} = \underline{A}\underline{B} = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_E}\right)$ требует размыкания ее между выходом цепи обратной связи и входом цепи прямого действия. Тогда следует не забыть принять во внимание полное входное сопротивление цепи прямого действия.

> ***Метод***
>
> Чтобы замкнутая система колебалась синусоидально, нужно:
>
> 1) Существование частоты f_0, при которой передаточная функция разомкнутой системы действительна ($\Rightarrow$ $\mathrm{Arg}(\underline{A}\underline{B}) = \pm 2k\pi$ или $\mathrm{Im}(\underline{A}\underline{B}) = 0$). Это условие возврата по фазе.
> 2) При этом сигнал не ослабляется и не усиливается. Он самовозбуждается ($\Rightarrow$ $|\underline{A}|\,|\underline{B}| = 1$ или $\mathrm{Re}(\underline{A}\underline{B}) = 1$). Это условие самовозбуждения амплитуды сигнала.

Примечание. Если $|\underline{A}|\,|\underline{B}| < 1$, то колебания исчезают, а если $|\underline{A}|\,|\underline{B}| > 1$, то колебания не синусоидальны (сигнал деформируется из-за нелинейностей, в том числе — типа насыщения), и частота тогда отлична от f_0.

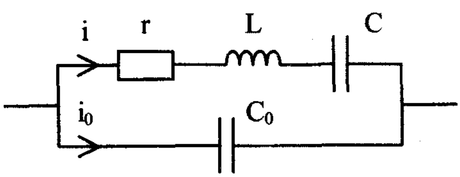
Практически усиление либо отслеживает значение амплитуды сигнала, либо нелинейно. Это соответствует амплитуде колебаний (условия самовозбуждения амплитуды не определяют саму амплитуду колебаний).

27.3.2. Генераторы синусоидальных колебаний тока.

Современные генераторы колебаний используют керамические фильтры или кварцевые генераторы, позволяющие получить высокие показатели точности и устойчивости.

а) Пьезоэлектрические кварцевые или керамические резонаторы (рис. 27.11)

Рис. 27.11. Электрическая модель пьезоэлектрического резонатора



– Статические параметры. C_0 — физическая емкость между электродами.
– Динамические параметры. Эти три элемента не существуют как электрические величины, но представляют собой динамический эквивалент механической модели колеблющейся пластины.

  L: индуктивность, эквивалентная массе колеблющейся пластины.
  C: емкость, эквивалентная упругости колеблющейся пластины.
  r: сопротивление, эквивалентное внутреннему трению.

– Резонансные колебания последовательного или параллельного резонанса (или антирезонанса):

$$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_P = \frac{1}{\sqrt{L\frac{CC_0}{C+C_0}}}, \quad \omega_P = \omega_S\sqrt{1+\frac{C}{C_0}}.$$

– Добротность (механическая):

$$Q = \frac{\omega_S L}{r} = \frac{1}{\omega_S r C}.$$

– Коэффициент качества (определяется для пульсации ω_S):

$$F_M = \frac{I(\omega_S)}{I_0(\omega_S)} = \frac{1}{\omega_S r C_0}, \quad \frac{F_M}{Q} = \frac{C}{C_0}.$$

– Полное сопротивление последовательным и параллельным пульсациям:

$$\underline{Z}(\omega_S) \approx r \text{ (для } F_M \gg 1) \text{ и } \underline{Z}(\omega_P) \approx F_M^2 r \text{ (для } F_M \gg 1 \text{ и } C \ll C_0).$$

– Полное сопротивление $\underline{Z}$ и реактивное X при $r = 0$ (рис. 27.12):

$$\underline{Z} = jX = \frac{-j}{(C + C_0)\omega} \frac{1 - (\omega/\omega_S)^2}{1 - (\omega/\omega_P)^2}.$$

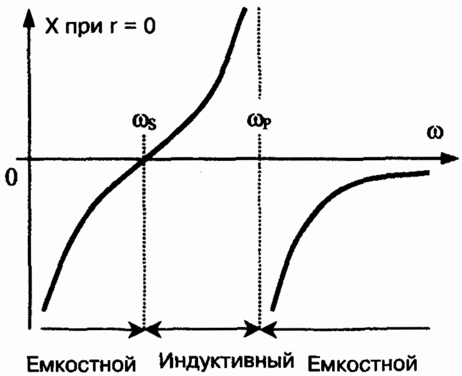


Рис. 27.12. Реактивное сопротивление пьезоэлектрического резонатора при $r = 0$

б) Генератор колебаний Пирса (рис. 27.13 и 27.14)

Полевой транзистор T имеет переходную проводимость g_m при малых сигналах. Сопротивление R_3 обеспечивает автоматическую поляризацию. При частоте колебаний конденсаторы C_3, C_4, C_5 ведут себя как коротко замкнутые цепи. Сопротивлением r электрической модели пьезоэлектрического резонатора пренебрегли.

Для эквивалентной схемы малых сигналов мы рассматриваем все паразитные элементы ($R_2 \leftarrow R_2//r_{dsT}$, $C_2 \leftarrow C_2//C_{ds\,T}$, $R_1 \leftarrow R_1//R_{вх\,T}$, $C_1 \leftarrow C_1//C_{вх\,T}$ и т. д.).

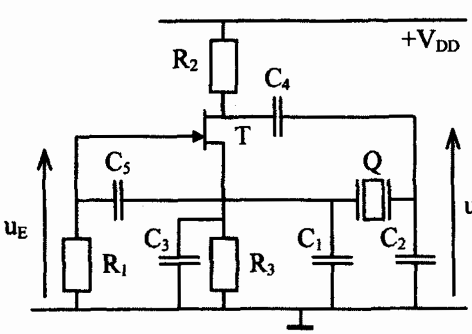


Рис. 27.13. Генератор колебаний Пирса на полевом транзисторе

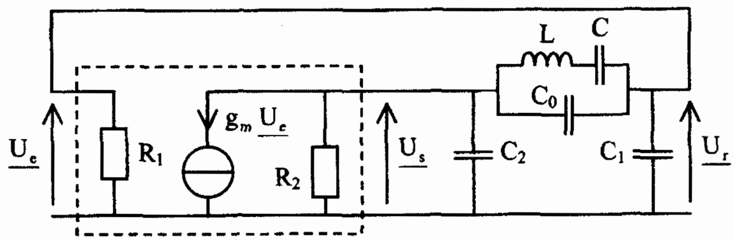


Рис. 27.14. Эквивалентная схема для малых сигналов

– Передаточная функция разомкнутой системы:

$$\underline{T_{BO}} = \frac{\underline{U_r}}{\underline{U_e}} = \frac{-g_m R_1 R_2/(R_1 + R_2)}{1 - \frac{X(R_1C_1+R_2C_2)\omega}{R_1+R_2} + j\frac{R_1R_2(C_1+C_2)\omega + X(1-R_1R_2C_1C_2\omega^2)}{R_1+R_2}}.$$

– Условие возврата по фазе: $\mathrm{Im}\underline{T_{BO}} = 0$, где $1 \ll R_1R_2C_1C_2\omega^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad \omega_0 = \omega_S\sqrt{1 + \frac{C}{C_{Сум}}},$$

где

$$C_{Сум} = C_0 + C_{Нагр} \quad и \quad C_{Нагр} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

– Условие самовозбуждения сигнала:

$$\mathrm{Re}\underline{T_{BO}} = 1 \Rightarrow 1 \ll R_1R_2C_1C_2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{T_{BO}}(\omega_0) = \frac{g_m}{\frac{C_1}{R_2C_2} + \frac{C_2}{R_1C_1}} = 1 \Rightarrow g_m = \frac{C_1}{R_2C_2} + \frac{C_2}{R_1C_1} = \frac{x}{R_2} + \frac{1}{R_1x}.$$

Минимальное значение g_m получено для:

$$\frac{dg_m}{dx} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1x^2} = 0 \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}},$$

откуда: $g_m = \frac{2}{\sqrt{R_1R_2}}$.

– Относительное изменение пульсации колебания:

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = \frac{d\omega_S}{\omega_S} + \frac{1}{2}\frac{C}{C + C_{Сум}}\left(\frac{dC}{C} - \frac{dC_{Сум}}{C_{Сум}}\right),$$

где $C_{Сум} = C_0 + C_{Нагр} \gg C$.

Примечание. Частота колебаний обычно дается конструктором для расчетного значения емкости нагрузки $C_{Нагр}$.

в) Генератор колебаний Колпица (рис. 27.15)

Вопрос. Усилитель по напряжению предполагается идеальным.

1) Привести выражение передаточной функции разомкнутой системы. Вывести из него пульсацию колебаний и условия поддержания сигнала.

2) Привести выражение относительного изменения пульсации колебания.

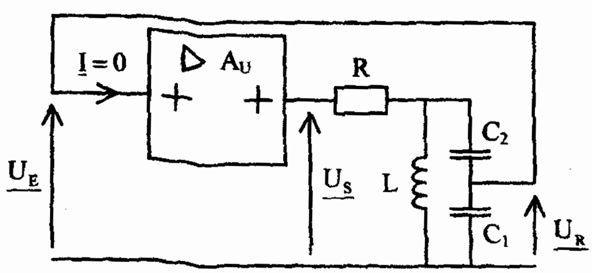


Рис. 27.15. Генератор колебаний Колпица

Ответ. 1) Передаточная функция разомкнутой системы. Используя делитель напряжения ($\underline{I} = 0$), получим:

$$\underline{T_{BO}} = \frac{\underline{U_R}}{\underline{U_E}} = A_U \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{jL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}, \quad \text{где} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

– Условие возврата по фазе:

$$\mathrm{Im}\underline{T_{BO}} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

– Условие самовозбуждения сигнала:

$$\mathrm{Re}\underline{T_{BO}} = 1 \Rightarrow \underline{T_{BO}}(\omega_0) = A_U \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 1,$$

откуда:

$$A_U = 1 + \frac{C_1}{C_2}.$$

2) Относительное изменение пульсации колебания:

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = \frac{-1}{2}\left(\frac{dL}{L} + \frac{dC}{C}\right).$$

г) Генератор колебаний Хартли (рис. 27.16)

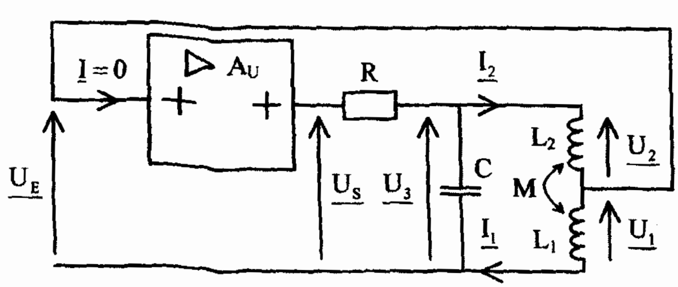


Рис. 27.16. Генератор колебаний Хартли

Вопрос. Усилитель по напряжению предполагается идеальным.

1) Привести выражение эквивалентной индуктивности двух соединенных последовательно индуктивно связанных катушек, затем — соотношения $\underline{U_1}/\underline{U_3}$.

2) Привести выражение передаточной функции разомкнутой системы. Из нее вывести пульсацию колебания и условие самовозбуждения сигнала.

Ответ. 1) В соответствии с гл. 14 имеем:

$$\begin{cases} \underline{U_1} = jL_1\omega\underline{I_1} + jM\omega\underline{I_2}, \\ \underline{U_2} = jM\omega\underline{I_1} + jL_2\omega\underline{I_2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \underline{U_3} = \underline{U_1} + \underline{U_2} \\ \underline{I_1} = \underline{I_2}, \end{cases}$$

откуда:

$$L_{Экв} = \frac{\underline{U_3}}{j\omega\underline{I_1}} = L_1 + L_2 + 2M \quad \text{и} \quad \frac{\underline{U_1}}{\underline{U_3}} = \frac{L_1 + M}{L_{Экв}}.$$

2) Передаточная функция разомкнутой системы. Применив делитель напряжения ($\underline{I} = 0$), получим:

$$\underline{T_{BO}} = \frac{\underline{U_1}}{\underline{U_E}} = A_U \frac{L_1 + M}{L_{Экв}} \frac{jL_{Экв}\omega}{R(1 - L_{Экв}C\omega^2) + jL_{Экв}\omega}.$$

– Условие возврата по фазе:

$$\mathrm{Im}\underline{T_{BO}} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{Экв}C}}.$$

– Условие самовозбуждения сигнала:

$$\mathrm{Re}\underline{T_{BO}} = 1 \Rightarrow \underline{T_{BO}}(\omega_0) = A_U \frac{L_1 + M}{L_{Экв}} = 1,$$

откуда:

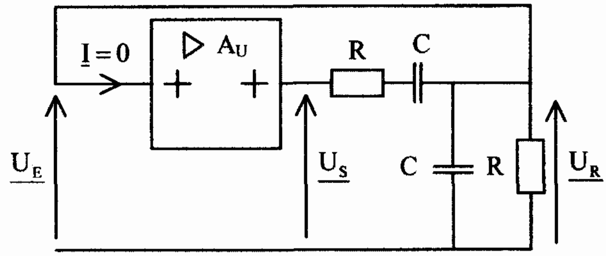
$$A_U = \frac{L_{Экв}}{L_1 + M} = 1 + \frac{L_2 + M}{L_1 + M}.$$

Если связь максимальна, то $L_2 = m^2 L_1$ и $M = mL_1$, где m — коэффициент трансформации (того же знака, что и M). Тогда:

$$L_{Экв} = (m+1)^2 L_1 \quad \text{и} \quad A_U = m + 1.$$

д) Генератор колебаний с мостом Вина

Рис. 27.17. Генератор колебаний с мостом Вина



Вопрос. Усилитель по напряжению предполагается идеальным. Привести выражение передаточной функции разомкнутой системы. Из нее вывести пульсацию колебания и условие самовозбуждения сигнала.

Ответ. Передаточная функция разомкнутой системы. Применив делитель напряжения ($\underline{I} = 0$), получим:

$$\underline{T_{BO}} = \frac{\underline{U_R}}{\underline{U_E}} = A_U \frac{jRC\omega}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega} = \frac{A_U}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

– Условие возврата по фазе:

$$\mathrm{Im}\underline{T_{BO}} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

– Условие самовозбуждения сигнала:

$$\mathrm{Re}\underline{T_{BO}} = 1 \Rightarrow \underline{T_{BO}}(\omega_0) = A_U/3 = 1,$$

откуда: $A_U = 3$.

ГЛАВА 28

АНАЛОГОВОЕ СРАВНЕНИЕ

Элементы систем сравнения (компараторы) см. гл. 22.

28.1. Сравнение сигналов

• ***Назначение.*** *Компаратор* позволяет сравнивать (больше или меньше) значение заданного сигнала u_E со значением другого сигнала, принятого опорным U_{Ref}. Входные сигналы задаются в аналоговой форме, выходные сигналы изменяются скачком по принципу «все или ничего».

• ***Условные обозначения*** (рис. 28.1).

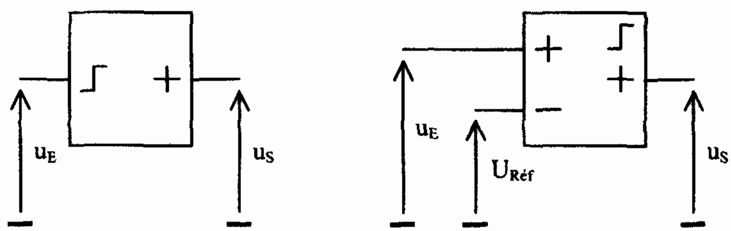


Рис. 28.1. Условные обозначения компаратора

• ***Характеристика идеального компаратора*** (рис. 28.2).

• ***Временна́я диаграмма*** (рис. 28.3).

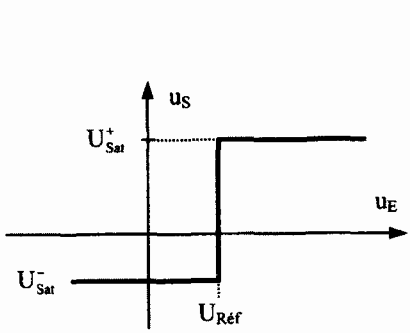


Рис. 28.2. Характеристика идеального компаратора

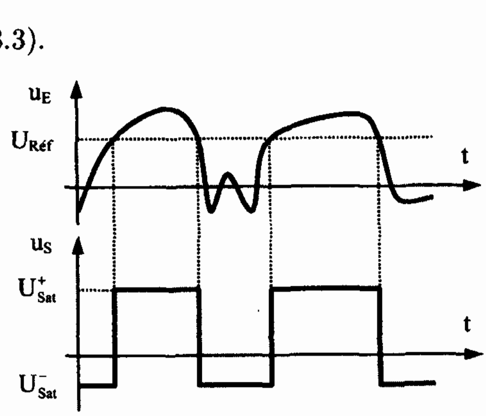


Рис. 28.3. Временна́я диаграмма компаратора

Пример 28.1.1. Широтная модуляция импульсов (рис. 28.4 и 28.5). Принцип широтно-импульсной модуляции (ШИМ) состоит в сравнении входного сигнала u_E с сигналом треугольной формы u_T. Временна́я диаграмма приведена для различных значений u_E. На практике сигнал u_E должен меняться медленно по отношению к сигналу u_T.

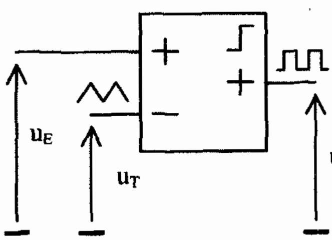


Рис. 28.4. Принцип ШИМ

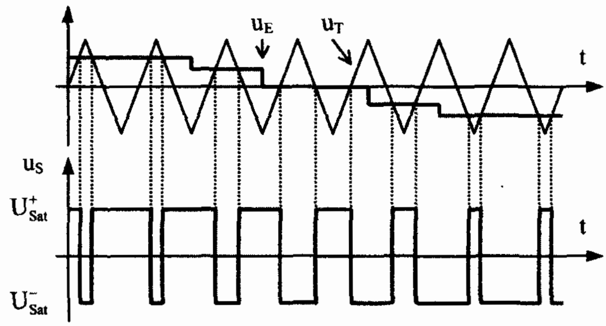


Рис. 28.5. Временна́я диаграмма ШИМ

28.2. Гистерезисное сравнение

• ***Принцип действия.*** Гистерезисный компаратор (триггер Шмитта) имеет два амплитудных порога:

– Высокий порог U_H, возникающий только при нарастании входного сигнала u_E.
– Низкий порог U_B, возникающий только при спадании входного сигнала u_E. Различают:
– Ширину гистерезисного цикла: $U_H - U_B$.
– Положение центра гистерезисного цикла:

$$(U_H + U_B)/2.$$

• ***Условное обозначение*** (рис. 28.6).

• ***Характеристика идеального гистерезисного компаратора*** представлены на рис. 28.7.

• ***Временна́я диаграмма*** (рис. 28.8).

Вопрос. Неинвертирующий триггер Шмитта на рис. 28.9 предполагается идеальным. Полагаем внутреннее сопротивление генератора u_E пренебрежимо малым по сравнению с R_1 (если это не так, то в расчетах его следует учесть последовательно соединенным с R_1). Привести выражения порогов, ширины и центра гистерезисного цикла.

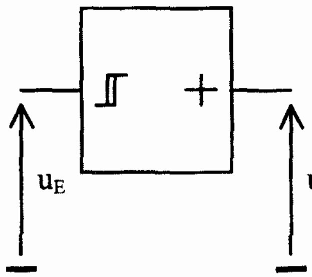


Рис. 28.6. Условное обозначение гистерезисного компаратора

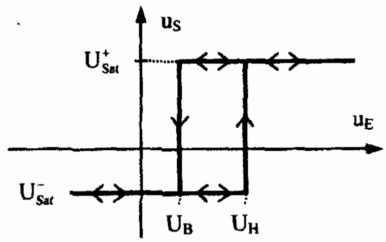


Рис. 28.7. Характеристика идеального гистерезисного компаратора

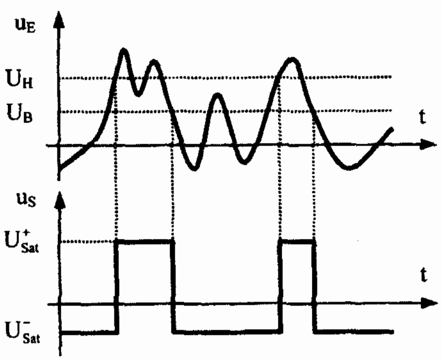


Рис. 28.8. Временна́я диаграмма гистерезисного компаратора

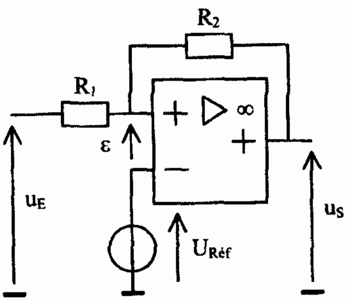


Рис. 28.9. Неинвертирующий триггер Шмитта на операционном усилителе

> ***Метод***
>
> Всегда следует начинать с проверки того, что схема бистабильна (только два устойчивых состояния). Затем рассчитываем входные пороги, рассматривая схему в пределах изменения состояний.

Ответ.

– Операционный усилитель работает в режиме насыщения, имея положительную обратную связь («+» выхода на «+» входа). На выходе только два устойчивых состояния насыщения U^+_{Sat} и U^-_{Sat} (см. гл. 21).

– Рассматривая входной ток по входу «+» равным нулю, получим в соответствии с теоремой суперпозиции выражение напряжения u^+ между входом «+» и массой:

$$u^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_E + \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_S, \quad \text{где} \quad u_S = U^+_{Sat} \quad \textit{или} \quad u_S = U^-_{Sat}.$$

– Выражения порогов. Напряжение u_S переходит от U^+_{Sat} к U^-_{Sat}, когда напряжение ε переходит *от* 0^+ к 0^-. *Соответственно,* u_S *переходит* от U_{Sat}^- к U_{Sat}^+, когда напряжение ε переходит от 0^- к 0^+. Следовательно, пороги определяются при $\varepsilon = u^+ - U_{Ref} = 0$. Имеем:

$$u_E = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{Ref} - \frac{R_1}{R_2} u_S, \quad \text{где} \quad u_S = U_{Sat}^+ \quad \text{или} \quad u_S = U_{Sat}^-.$$

Тогда:

$$U_H = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{Ref} - \frac{R_1}{R_2} U_{Sat}^- \quad \text{и} \quad U_B = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{Ref} - \frac{R_1}{R_2} U_{Sat}^+.$$

– Ширина и центр гистерезисного цикла:

$$U_H - U_B = \frac{R_1}{R_2}(U_{Sat}^+ - U_{Sat}^-),$$

$$\frac{U_H + U_B}{2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{Ref} - \frac{R_1}{R_2} \frac{(U_{Sat}^+ + U_{Sat}^-)}{2}$$

Пример 28.2.2. Принцип RS-триггера. Используется в неустойчивом режиме схемы 555.

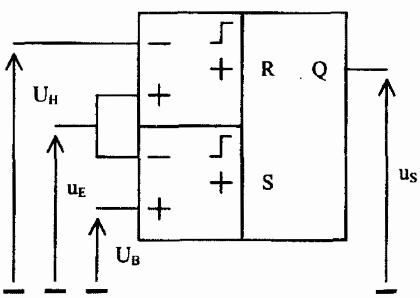


Таблица истинности

S	R	Q_n
0	0	Q_{n-1}
0	1	0
1	0	1

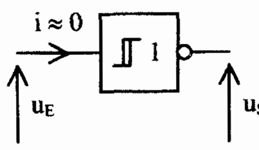


Рис. 28.10. Принцип RS-триггера

Рис. 28.11. КМОП-инвертор с триггерным входом

Пример 28.2.3. КМОП-инвертор с триггерным входом (рис. 28.11). Пороги зависят от исходных данных схемы.

28.3. Сравнение в окне

• ***Назначение.*** Такой компаратор позволяет оценить, воспринята ли амплитуда сигнала, находящаяся между минимальной U_{Min} и максимальной U_{Max} амплитудами, образующими «окно». Здесь определяют:

– Ширину окна: $U_{Max} - U_{Min}$.

– Положение центра окна: $\frac{U_{Max}+U_{Min}}{2}$.

• ***Схема компаратора*** (рис. 28.12). Чтобы устранить на выходе возможные нестабильности, компараторы могут быть заменены компараторами со слабым гистерезисом.

• ***Идеальная характеристика*** (рис. 28.13).

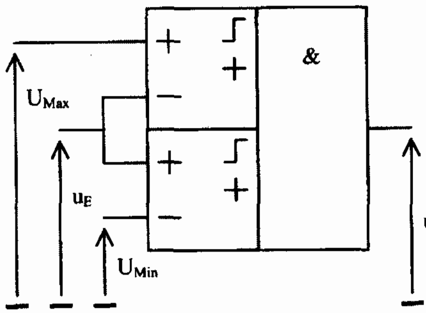


Рис. 28.12. Схема компаратора с окном

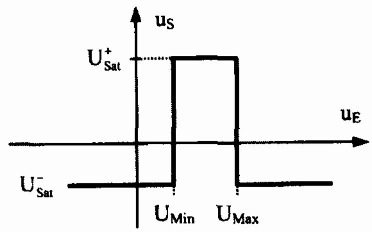
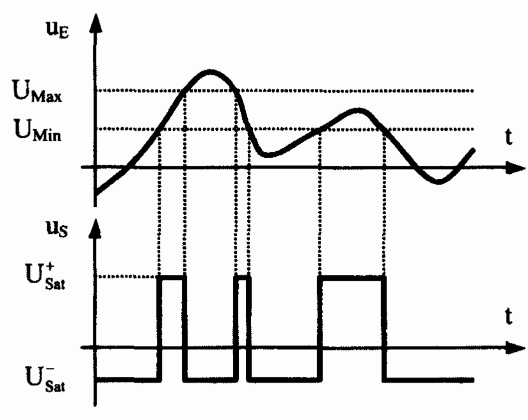


Рис. 28.13. Идеальная характеристика компаратора с окном

• ***Временнáя диаграмма*** (рис. 28.14).

Рис. 28.14. Временнáя диаграмма компаратора с окном



Вопрос. Имеем схему (рис. 28.15) определителя нуля. Рассчитать напряжения, обозначенные на схеме U_{Max} и U_{Min}. Затем начертить график выходного напряжения при входном синусоидальном. Отметить значения выходного напряжения в верхнем и нижнем состояниях.

Ответ. График выходного напряжения при входном синусоидальном приведен на рис. 28.16.

$$U_{Max} = \frac{10 \cdot (+10)}{10 + 10k} \approx 10 \text{ мВ}, \quad U_{Min} = \frac{10 \cdot (-10)}{10 + 10k} \approx -10 \text{ мВ}.$$

В верхнем состоянии (проводящий диод):

$$u_S = \frac{10k \cdot (+10 - 0{,}6)}{10 + 10k} \approx 4{,}7 \text{ В}.$$

В нижнем состоянии (диод заперт): $u_S =\approx 0$В.

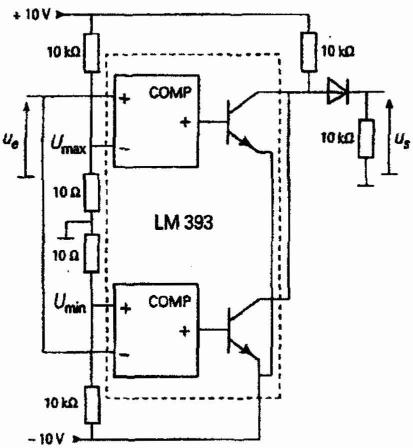


Рис. 28.15. Схема определителя нуля

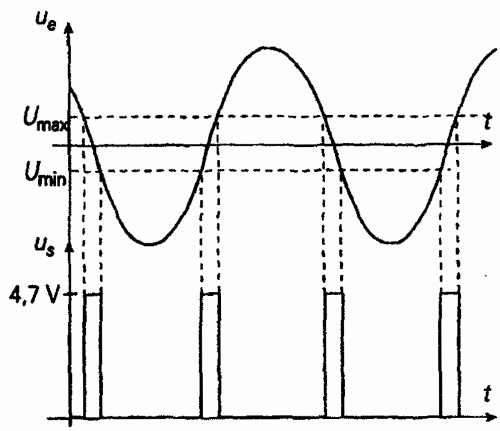


Рис. 28.16. Временна́я диаграмма определителя нуля

ГЛАВА 29

ГЕНЕРАТОРЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

29.1. Ждущий мультивибратор

• ***Назначение.*** *Ждущий мультивибратор* обладает одним устойчивым и одним неустойчивым состоянием. При активном фронте на входе u_E выход u_S остается в неустойчивом состоянии фиксированный промежуток времени T, затем возвращается в устойчивое состояние. Активным может быть как восходящий, так и спадающий фронт. Существует два типа ждущих мультивибраторов:
Неперезапускаемые. Длительность T задается первым активным фронтом.
Перезапускаемые. Длительность T задается каждым активным фронтом.

Примечания.

- Время рекуперации T_R — минимальное необходимое ждущему мультивибратору время между двумя запусками, чтобы обеспечить длительность T.
- Ждущий мультивибратор использует либо интегратор (низкочастотный фильтр), либо дифференцирующую схему (высокочастотный фильтр); интегрирующие устройства менее чувствительны по отношению к паразитным воздействиям.

• ***Условные обозначения*** (рис. 29.1).

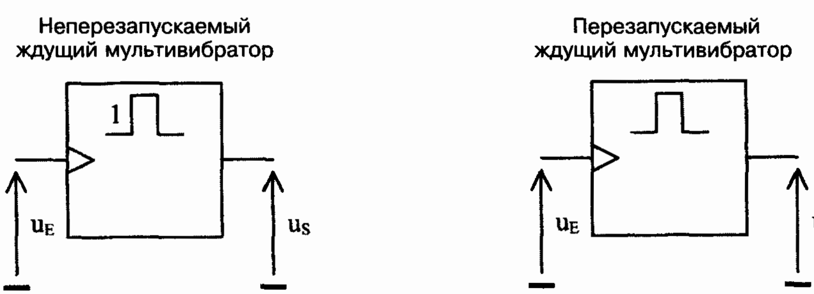


Рис. 29.1. Условные обозначения ждущих мультивибраторов

• ***Временны́е диаграммы*** (рис. 29.2).

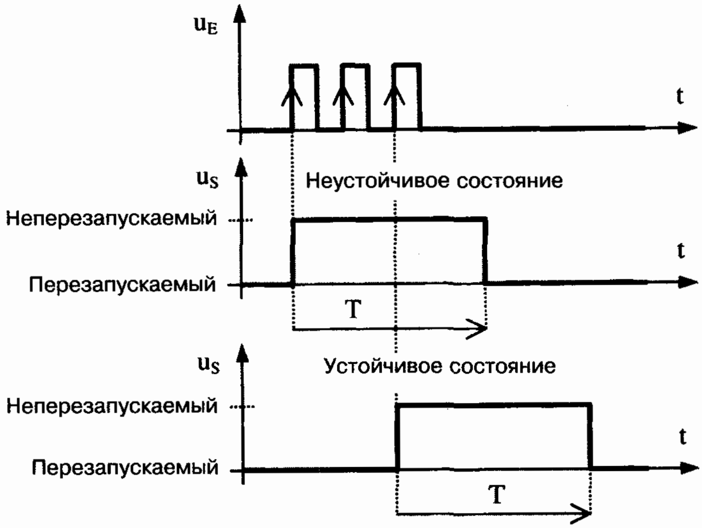


Рис. 29.2. Временны́е диаграммы ждущих мультивибраторов

Пример 29.1.1. Принцип действия числового ждущего мультивибратора (рис. 29.3). Входной импульс u_E переводит выход u_S в неустойчивое состояние и устанавливает счетчик в ноль. Выход несинхронизированного мультивибратора (см. § 29.2) инкрементирует счетчик. Когда n – 1 выход счетчика переходит на высокий логический уровень, выход u_S возвращается в устойчивое состояние.

Вопрос. Привести выражение длительности неустойчивого состояния и времени рекуперации числового ждущего мультивибратора (см. рис. 29.3). Этот мультивибратор является перезапускаемым или неперезапускаемым?

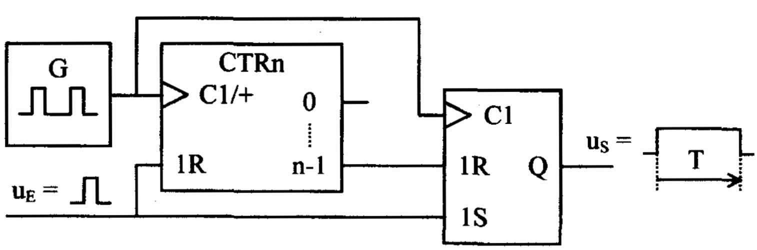


Рис. 29.3. Схема числового ждущего мультивибратора

Ответ. Для периода T_A несинхронизированного мультивибратора и n-й ступени счетчика имеем:

$$T = (2^{n-1} + 1)T_A \quad \text{и} \quad T_R \approx 0 \quad \text{для} \quad T_A.$$

Этот ждущий мультивибратор является перезапускаемым, так как каждый входной импульс u_E запускает счетчик. Чтобы получить неперезапускаемый ждущий мультивибратор, нужно запретить вход u_E, когда выход u_S находится в высоком состоянии.

29.2. Несинхронизированный мультивибратор

• ***Принцип действия.*** Он обладает двумя неустойчивыми состояниями. Выход u_S бесконечно переходит от одного состояния к другому в заданные интервалы времени. Некоторые несинхронизированные мультивибраторы могут быть синхронизированы внешним сигналом. Выходной сигнал имеет параметры:

– *Свой период* T *в секундах* (с) *или свою частоту* F *в герцах* (Гц).

$$F = 1/T.$$

– Свой коэффициент импульсного заполнения (скважность):

$$\alpha = \frac{t_H}{t_H + t_B} = \frac{t_H}{T},$$

где t_H — длительность выходного сигнала на высоком уровне; t_B — его длительность на низком уровне.

• ***Условное обозначение*** (рис. 29.4).

• ***Временна́я диаграмма*** (рис. 29.5).

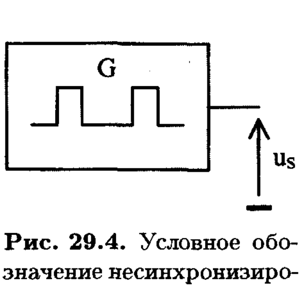


Рис. 29.4. Условное обозначение несинхронизированного мультивибратора

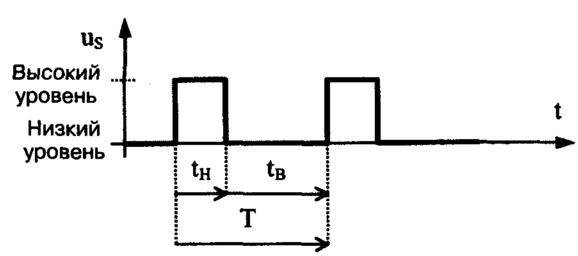


Рис. 29.5. Временна́я диаграмма несинхронизированного мультивибратора

Вопрос. Привести выражение длительности периода выходного сигнала несинхронизированного мультивибратора (рис. 29.6).

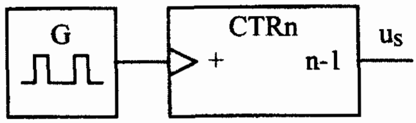


Рис. 29.6. Схема числового несинхронизированного мультивибратора

Ответ. Для периода T_A несинхронизированного мультивибратора и n ступеней счетчика имеем: $T = 2^n T_A$.

Вопрос. Имеем схему (рис. 29.7) несинхронизированного мультивибратора на КМОП-триггере со своей переходной характеристикой. Схема запитана напряжением, сформированным между $V_{CC} =$ $= 5$ В и массой.

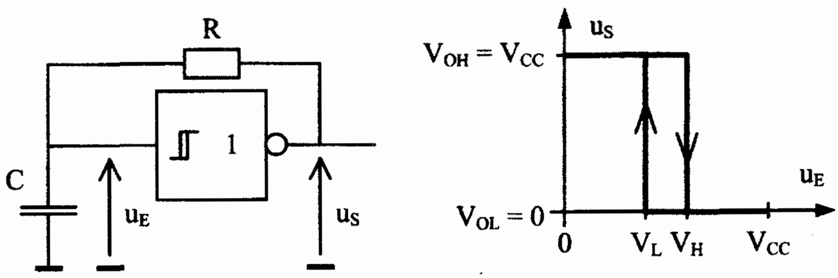


Рис. 29.7. Несинхронизированный мультивибратор на КМОП-триггере

1) Пояснить качественно работу схемы.
2) Привести выражение периода несинхронизированного мультивибратора.
3) Привести требуемое выражение, чтобы скважность составила $\alpha = 1/2$.

Ответ. 1) Когда входное напряжение достигает высокого порога триггера, выходное напряжение переходит к $u_S = 0$, а входное напряжение снижается экспоненциально. Когда входное напряжение достигает низкого порога триггера, выходное напряжение переходит к $u_S = V_{CC}$, а входное напряжение повышается экспоненциально.

2) Получаем (см. § 29.4.1):

$$t_H = RC \ln \frac{V_{CC} - V_L}{V_{CC} - V_H} \quad \text{и} \quad t_L = RC \ln \frac{V_H}{V_L}.$$

$$T = t_H + t_L = RC \ln \frac{(V_{CC} - V_L)V_H}{(V_{CC} - V_H)V_L}.$$

3) Нужно, чтобы длительности высокого и низкого состояний были равны. Тогда:

$$\frac{V_{CC} - V_L}{V_{CC} - V_H} = \frac{V_H}{V_L} \Rightarrow V_H^2 - V_L^2 - (V_H - V_L)V_{CC} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (V_H - V_L)(V_H + V_L - V_{CC}) = 0 \Rightarrow V_H + V_L = V_{CC}.$$

$$\text{откуда:} \qquad \alpha = 1/2 \quad \text{и} \quad T = 2RC \ln \frac{V_H}{V_L}.$$

Пример 29.2.2. Имеем несинхронизированный мультивибратор на кварцевом или керамической резонаторе (рис. 29.8). Это генератор колебаний Пирса. Частота колебаний принципиально фиксирована пьезоэлектрическим резонатором. Поэтому ей присущи точность и стабильность. Отметим A (A < 0) — усиление поляризованного сопротивлением R_1 КМОП-инвертора. Сопротивление R_2 позволяет снизить передаваемую резонатору энергию (Часто $R_2 = 0$, если выходного сопротивления порта достаточно).

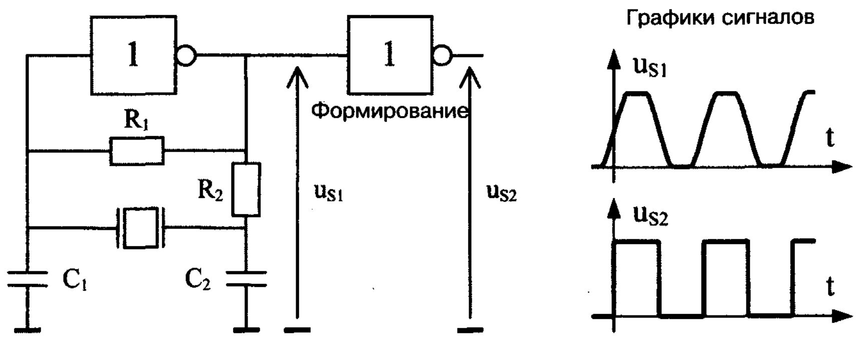


Рис. 29.8. Несинхронизированный мультивибратор на резонаторе

Пренебрегая влиянием сопротивлений, получим следующие результаты.

– Частота колебаний и условие самовозбуждения:

$$f_O = f_S\sqrt{1 + \frac{C}{C_0 + C_L}}, \quad \text{где} \quad f_S = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \ |A| \geqslant \frac{C_1}{C_2}.$$

– Стабильность частоты колебаний ($C_T = C_0 + C_L \gg C$):

$$\frac{df_O}{f_O} = \frac{df_S}{f_S} + \frac{1}{2}\frac{C}{C + C_T}\left(\frac{dC}{C} - \frac{dC_T}{C_T}\right).$$

– L, C и C_0 — элементы модели пьезоэлектрического резонатора (гл. 27).

– Паразитные емкости находятся между C_1 и C_2.

– Входная емкость КМОП-инвертора C_E и емкость C_1 параллельны.

– Емкость нагрузки C_L и емкость C_0 параллельны, причем:

$$C_L = \frac{(C_E + C_1)C_2}{C_E + C_1 + C_2}.$$

Обычно частота колебаний задается конструктором для емкости заданной нагрузки.

Пример 29.2.3. Схема несинхронизированного мультивибратора, использующего два ждущих мультивибратора, охваченных обратной связью (рис. 29.9). $T = T_1 + T_2$, где T_1 (соответственно T_2) — длительность неустойчивого состояния первого (соответственно — второго) ждущего мультивибратора.

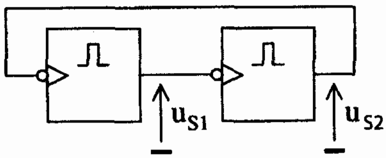


Рис. 29.9. К примеру 29.2.3

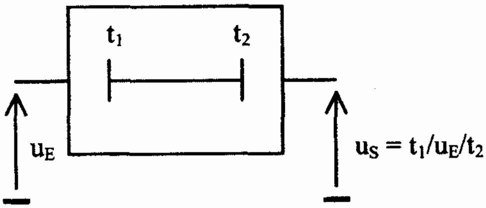


Рис. 29.10. Условное обозначение линии задержки

29.3. Запаздывание. Выдержка времени

• ***Принцип действия.*** Линия задержки (выдержки времени) позволяет получать выходной сигнал u_S отстающим по времени по отношению к входному сигналу u_E. Обычно запаздывание на запуск t_1 отличается от запаздывания на останов t_2. Существует три типа линий задержки:

- Линия задержки на запуск или на появление входного сигнала ($t_2 = 0$).
- Линия задержки на останов или на исчезновение входного сигнала ($t_1 = 0$).
- Линия задержки на запуск и на останов ($t_2 \neq 0$ и $t_1 \neq 0$).

• ***Условное обозначение*** (рис. 29.10).

• ***Временная диаграмма*** (рис. 29.11).

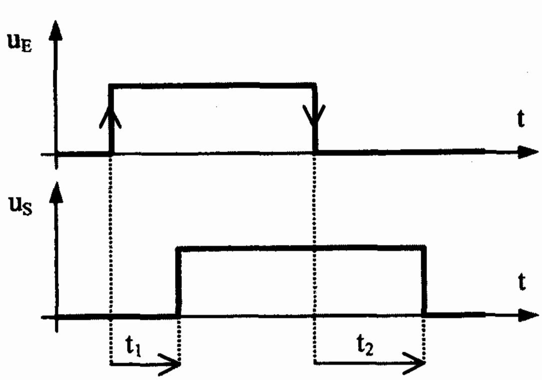


Рис. 29.11. Временна́я диаграмма линии задержки

Пример 29.3.4. Схема линии задержки на основе RC-цепи (рис. 29.12 и 29.13). Подключенный параллельно сопротивлению позволяет в зависимости от его направления включения свести к нулю значения t_1 или t_2.

Рис. 29.12. Схема линии задержки на основе RC-цепи

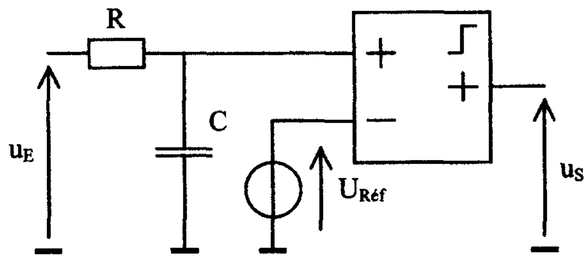
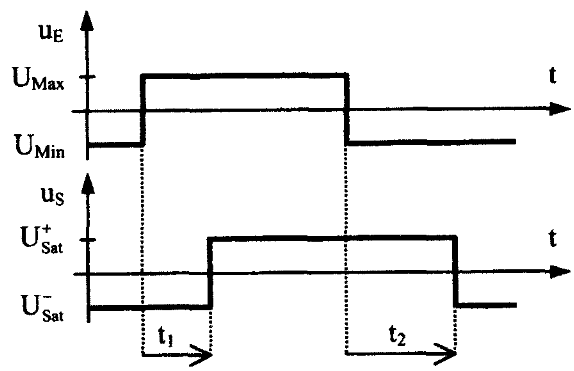


Рис. 29.13. Временна́я диаграмма линии задержки на основе RC-цепи



Вопрос. Для схемы линии задержки на основе RC-цепи (рис. 29.12):

1) Привести выражение напряжения на зажимах конденсатора u_C, если $u_E = U_{Max}$ при $t \geqslant 0$, где $u_C(0^-) = U_{Min}$, и вывести из него выражение для t_1.

2) Привести выражение напряжения на зажимах конденсатора u_C, если $u_E = U_{Min}$ при $t \geqslant 0$, где $u_C(0^-) = U_{Max}$ и вывести из него выражение для t_2.

Ответ. В RC-цепи, управляемой скачком напряжения (см. § 29.4.1), напряжение u_C определяется по выражению:

$$u_C = Ae^{-t/\tau} + B, \quad \text{где} \quad \tau = RC.$$

1) Первый случай:

$$u_E = U_{Max} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \quad \text{где} \quad u_C(0^-) = U_{Min}.$$

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = A + B = U_{Min}, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} u_C(t) = B = U_{Max}, \end{cases} \Rightarrow u_C = (U_{Min} - U_{Max})e^{-t/\tau} + U_{Max}.$$

При t_1 имеем $u_C(t_1) = (U_{Min} - U_{Max})e^{-t_1/\tau} + U_{Max} = U_{Ref}$, откуда:

$$t_1 = RC \ln \frac{U_{Max} - U_{Min}}{U_{Max} - U_{Ref}}.$$

2) Второй случай: $u_E = U_{Min}$ при $t \geqslant 0$, где $u_C(0^-) = U_{Max}$.

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = A + B = U_{Max}, \\ \lim\limits_{t \to +\infty} u_C(t) = B = U_{Min}, \end{cases} \Rightarrow u_C = (U_{Max} - U_{Min})e^{-t/\tau} + U_{Min}.$$

При t_2 имеем $u_C(t_2) = (U_{Max} - U_{Min})e^{-t_2/\tau} + U_{Min} = U_{Ref}$, откуда:

$$t_2 = RC \ln \frac{U_{Max} - U_{Min}}{U_{Ref} - U_{Min}}.$$

Пример 29.3.5. Линия задержки для КМОП-порта (рис. 29.14). Реализуемая функция зависит от используемого логического порта.

- Порт согласия. Линия задержки на запуск и на останов ($t_2 = t_1$).
- Порт И. Линия задержки на запуск ($t_2 = 0$).
- Порт ИЛИ. Линия задержки на останов ($t_1 = 0$).
- Порт ИЛИ исключающее. Это не является функцией запаздывания. Напротив, она позволяет определять изменения значений входного напряжения u_E. Эта схема предпочтительна дифференцирующим RC-цепочкам, так как она менее чувствительна к паразитным явлениям.

Для порогового потенциала $V_T = V_{CC}/2$ имеем $t_1 = t_2 = RC \ln 2$.

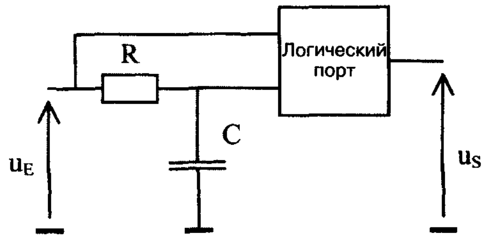


Рис. 29.14. Линия задержки на основе КМОП-порта

Пример 29.3.6. Имеем схему числовой линии задержки (рис. 29.15). Можно использовать сдвиговый регистр на m бит, управляемых таймером.

$$(m - 1)T_A < t_1 = t_2 < mT_A,$$

где T_A — период несинхронизированного мультивибратора, m — число ступеней сдвигового регистра.

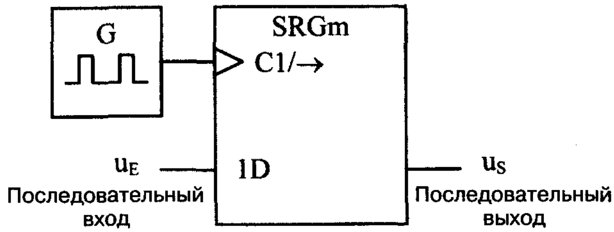


Рис. 29.15. Схема числовой линии задержки

29.4. Практические соображения

(См. также переходную характеристику системы первого порядка, гл. 9.)

29.4.1. RC-цепь при воздействии ступенчатым напряжением или током

• ***Распространенные эквивалентные схемы*** (рис. 29.16)

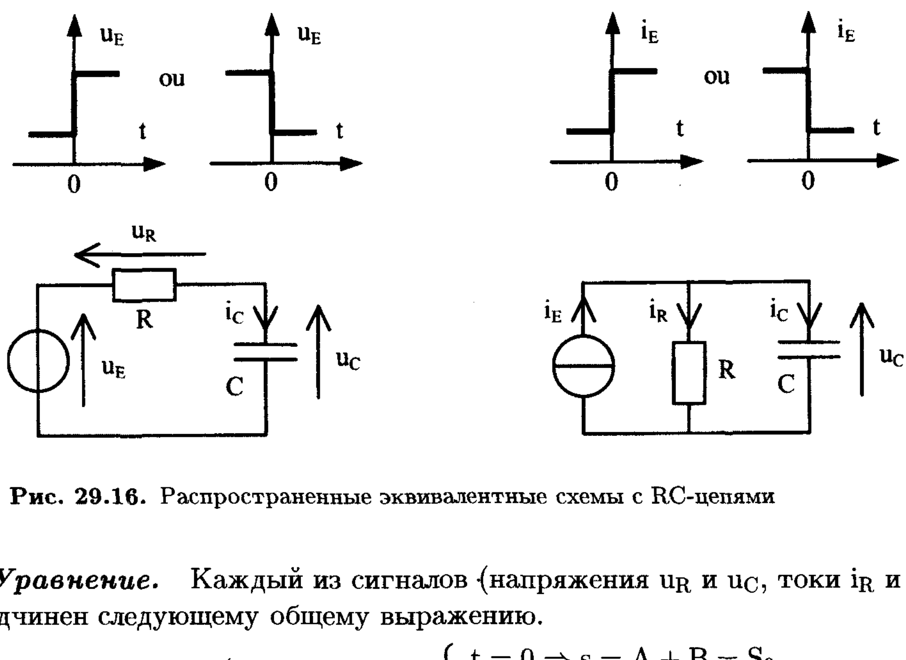


Рис. 29.16. Распространенные эквивалентные схемы с RC-цепями

• ***Уравнение.*** Каждый из сигналов (напряжения u_R и u_C, токи i_R и i_C) подчинен следующему общему выражению.

$$s = Ae^{-t/\tau} + B \text{ так, что } \begin{cases} t = 0 \Rightarrow s = A + B = S_0, \\ t \to \infty \Rightarrow s \to B = S_{+\infty}, \end{cases}$$

откуда:

$$s = (S_0 - S_{+\infty})e^{-t/\tau} + S_{+\infty},$$

где S_0 — начальное значение сигнала ($t = 0$), $S_{+\infty}$ — конечное значение сигнала ($t \to \infty$), $\tau = RC$ — постоянная времени в секундах.

• ***Интервал времени*** (t_2-t_1) предназначен для перехода от S_1 к S_2.

$$t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{S_{+\infty} - S_1}{S_{+\infty} - S_2}.$$

• ***Временна́я диаграмма*** (рис. 29.17). При $S_0 < S_{+\infty}$ сигнал s(t) возрастающий, тогда как при $S_0 > S_{+\infty}$ сигнал s(t) спадающий.

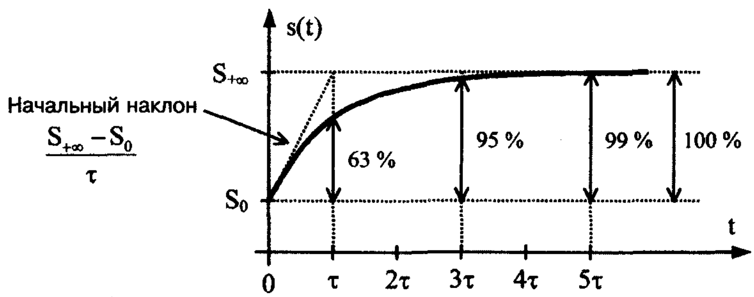


Рис. 29.17. Временна́я диаграмма при $0 < S_0 < S_{+\infty}$

• ***Определение начальных и конечных значений.*** Мы используем физические свойства непрерывности и стабильности напряжения на зажимах конденсатора (см. гл. 12).

Непрерывность: $\forall t,\ u_C(t^-) = u_C(t^+)$.

Стабильность: $u_C = \text{const} \Leftrightarrow i_C = 0$.

29.4.2. Подключение конденсатора непосредственно к источнику тока

• ***Распространенная эквивалентная схема*** (рис. 29.18).

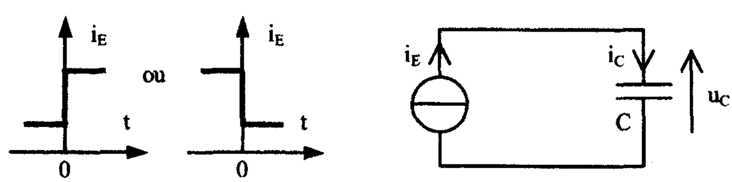


Рис. 29.18. Распространенная эквивалентная схема включения конденсатора на источник тока

• ***Уравнение.*** Напряжение u_C подчинено следующему общему выражению (ток нагрузки постоянен). Его временна́я диаграмма является прямой.

$$u_C = \frac{I_{0+}}{C} t + U_{C0},$$

где U_{C0} — начальное значение напряжения u_C, I_{0+} — значение тока при $t = 0^+$.

- ***Интервал времени*** $(t_2 - t_1)$ предназначен для перехода от U_{C1} к U_{C2}.

$$t_2 - t_1 = \frac{C(U_{C1} - U_{C2})}{I_{0+}}.$$

ГЛАВА 30

ЦИФРО-АНАЛОГОВОЕ И АНАЛОГО-ЦИФРОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) выполняет преобразование цифровой формы сигнала в аналоговую, аналого-цифровой преобразователь (АЦП) выполняет преобразование аналоговой формы сигнала в цифровую. Здесь рассматриваются только линейные преобразования.

30.1. Определения

• ***Аналоговое разрешение или шаг квантования (квант)*** «q». Это самое маленькое изменение аналогового сигнала, которое может распознать линейный АЦП или которое может выдать линейный ЦАП. Этому кванту q соответствует наименьший значащий бит (младший бит — МБ) цифрового значения. Квант q называется также эквивалентным МБ аналогового сигнала.

• ***Полномасштабное представление (PPE)***[1]***.*** Пусть N_{Val} — число различных значений, могущих быть представленными заданным кодированием. Тогда:

$$\mathrm{PPE} = qN_{Val}.$$

• ***Полные положительный и отрицательный масштабы (ПМ).*** Пусть N^{+}_{Val} — число рассматриваемых положительных значений, а N^{-}_{Val} — число рассматриваемых отрицательных значений, могущих быть представленными заданным кодированием. Тогда:

$$\mathrm{ПМ}^{+} = qN^{+}_{Val} \quad \text{и} \quad \mathrm{ПМ}^{-} = -qN^{-}_{Val}.$$

Внимание! Иногда встречаются другие определения полного масштаба.

• ***Цифровое разрешение*** $\Re$. Оно выражается в % или в долях миллиона.

$$\Re = \frac{q}{\mathrm{PPE}} = \frac{1}{N}.$$

[1]PPE — аббревиатура французского выражения. — *Прим. перев.*

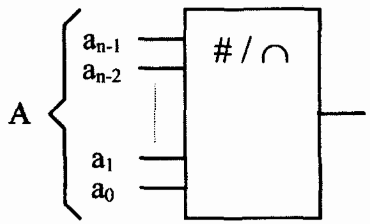
• ***Динамика.*** Она выражается в децибелах (дБ).

$$D = 20\log N.$$

30.2. Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП)

• ***Действие, условное обозначение и передаточная функция*** представлены на рис. 30.1. ЦАП преобразует входной цифровой сигнал $A = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_1, a_0)$ в n-битовом коде в выходной аналоговый сигнал s.

Рис. 30.1. Условное обозначение и идеальная передаточная функция ЦАП



$$s = qA$$

Вопрос. Привести выражение передаточной функции однополярного ЦАП, кодированного в чисто двоичный 3-битовый код (коды см. § 30.4). Начертить таблицу преобразования.

Ответ.

$$s = \frac{PPE}{8}A_2 = \frac{PPE}{8}(4a_2 + 2a_1 + a_0) = PPE\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8}\right).$$

A_{10}	0	1	2	3	4	5	6	7
A_2	0 000	001	010	011	100	101	110	111
s/PPE	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8

Вопрос. Привести выражение передаточной функции биполярного ЦАП, кодированного в дополнительном 3-битовом коде, затем в смещенном двоичном 3-битовом коде (коды см. § 30.4). Начертить таблицу преобразования.

Ответ.

$$s = \frac{PPE}{8}A_{C2} = \frac{PPE}{8}(-4a_2 + 2a_1 + a_0) = PPE\left(\frac{-a_2}{2} = \frac{a_1}{4} = \frac{a_0}{8}\right),$$

$$s = \frac{PPE}{8}A_{BD} = \frac{PPE}{8}(-4\overline{a_2} + 2a_1 + a_0) = PPE\left(\frac{\overline{-a_2}}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8}\right).$$

A_{10}	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
A_{C2}	100	101	110	111	000	001	010	011
A_2	0 000	001	010	011	100	101	110	111
s/PPE	−1/2	−3/8	−1/4	−1/8	0	1/8	1/4	3/8

• ***Идеальная переходная характеристика.*** Каждой входной цифровой величине A соответствует одна, и только одна, аналоговая выходная величина s.

Пример 30.2.1. На рис. 30.2 приведена идеальная характеристика 3-битового биполярного ЦАП.

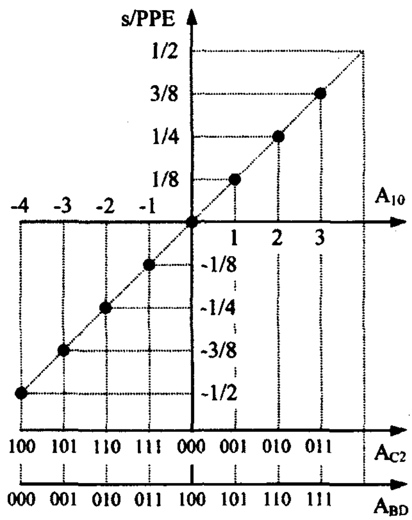


Рис. 30.2. Идеальная характеристика 3-битового биполярного ЦАП

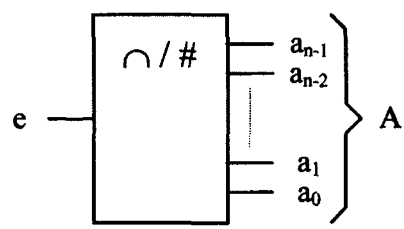


Рис. 30.3. Условное обозначение и идеальная передаточная функция АЦП

30.3. Аналого-цифровой преобразователь (АЦП)

• ***Действие, условное обозначение и передаточная функция*** представлены на рис. 30.3. АЦП преобразует входной аналоговый сигнал e в выходной сигнал в цифровой форме $A = (a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1, a_0)$ в n-битовом коде.

$$e = qA + \varepsilon_q,$$

где ε_q — ошибка квантования. В идеале (центрированная ошибка):

$$\frac{-q}{2} \leqslant \varepsilon_q \leqslant \frac{q}{2}.$$

Вопрос. Привести выражение передаточной функции униполярного АЦП в чисто двоичном 3-битовом коде (коды см. § 30.4).

Ответ.

$$e = \frac{PPE}{8}A_2 + \varepsilon_q = \frac{PPE}{8}(4a_2 + 2a_1 + a_0) + \varepsilon_q = \frac{PPE}{8}\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8}\right) + \varepsilon_q.$$

Вопрос. Привести выражение передаточной функции биполярного АЦП, кодированного в дополнительном 3-битовом коде, затем в смещенном двоичном 3-битовом коде (коды см. § 30.4).

$$e = \frac{PPE}{8}A_{C2} + \varepsilon_q = PPE\left(\frac{-a_2}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8}\right) + \varepsilon_q,$$

$$e = \frac{PPE}{8}A_{BD} + \varepsilon_q = PPE\left(\frac{\overline{-a_2}}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8}\right) + \varepsilon_q.$$

• ***Идеальная переходная характеристика.*** Аналоговая входная величина обычно непрерывна, тогда как выходная цифровая величина может принимать только одно значение из N_{Val} возможных. Мы говорим, что выходной сигнал *квантованный*.

Пример 30.3.2. На рис. 30.4 приведена идеальная характеристика биполярного 3-битового АЦП. Ошибка квантования центрирована, меняется между $-q/2$ и $q/2$.

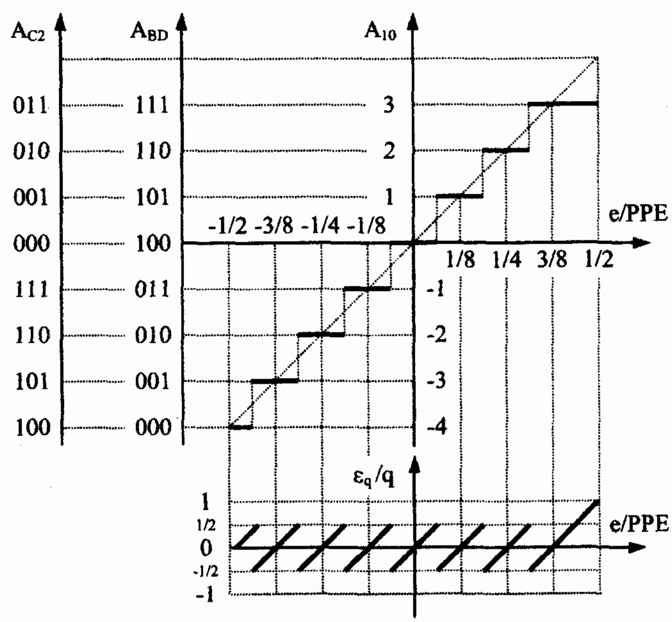


Рис. 30.4. Идеальная характеристика 3-битового биполярного АЦП

• ***Сравнение трех принципов АЦП*** (табл. 30.1).

Таблица 30.1. Сравнение трех принципов АЦП

Принцип АЦП	Свойства
«блиц»	очень быстрый, низкая точность
последовательной аппроксимации	быстрый и точный (хороший компромисс)
линейно нарастающая функция	очень точный и медленный

30.4. Используемые в ЦАП и АЦП коды

30.4.1. Основные коды для униполярных преобразователей

- ***Обычный двоичный.***
  - Представление обычного целого обычным двоичным n-битовым числом:

$$A_2 = (a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i, \quad \text{где} \quad a_i \in \{0,1\}.$$

  - Дробное представление аналогового сигнала qA_2, эквивалентного A_2:

$$qA_2 = q\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i = \mathrm{PPE}\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^{i-n} =$$

$$= \mathrm{PPE}\left(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \frac{a_{n-3}}{8} + \dots + \frac{a_1}{2^{n-1}} + \frac{a_0}{2^n}\right).$$

$$qA_{2\mathrm{Min}} = 0.$$

$$qA_{2\mathrm{Max}} = q(2^n - 1) = \mathrm{PPE} - q.$$

Биту младшего разряда (МБ) a_0 соответствует квант $q = \mathrm{PPE}/2^n$.

Биту старшего разряда (СБ) a_{n-1} соответствует половина PPE.

  - Динамика двоичного кода. В табл. 30.2 приведены числа репрезентативных значений в двоичном коде, соответствующие разрешение и динамика в функции числа бит. Динамика определяется в соответствии с:

$$D = 20 \log 2^n \approx 6{,}02n.$$

Таблица 30.2. Динамика двоичного кода

n бит	N_{Val}	$\Re$	D (дБ)
0	1	1	0
1	2	0,5	6
2	4	0,25	12
3	8	0,125	18,1
4	16	0,0625	24,1
8	256	0,00390625	48,2
16	65 536	0,0000152587890625	96,3
n	2^n	2^{-n}	$\approx 6,02n$

- ***Двоично-десятичный код (ДДК).***

– Представление обычного целого в ДДК из m цифр:

$$A_{ДДК} = (a_{m-1,3}a_{m-1,2}a_{m-1,1}a_{m-1,0}\dots a_{0,3}a_{0,2}a_{0,1}a_{0,0})_{ДДК} = \\ = \sum_{i=0}^{m-1}(a_{i,3}a_{i,2}a_{i,1}a_{i,0})_2 10^i$$

так, что $0 \leqslant (a_{i,3}a_{i,3}a_{i,3}a_{i,3})_2 \leqslant 9$, где $a_i \in \{0,1\}$.

– Дробное представление аналогового сигнала $qA_{ДДК}$, эквивалентного $A_{ДДК}$. Для упрощения полагаем $d_i = (a_{i,3}a_{i,3}a_{i,3}a_{i,3})_2$ и ограничимся случаем полных чисел.

$$qA_{ДДК} = q\sum_{i=0}^{m-1} d_i 10^i = \text{РРЕ}\sum_{i=0}^{m-1} d_i 10^i = \\ = \text{РРЕ}\left(\frac{d_{m-1}}{10} + \frac{d_{m-2}}{100} + \dots + \frac{d_1}{10^{m-1}} + \frac{d_0}{10^m}\right)$$

$$qA_{ДДКMin} = 0,$$

$$qA_{ДДКMax} = q(10^m - 1) = \text{РРЕ} - q.$$

Цифре младшего разряда (МР) d_0 соответствует квант $q = \text{РРЕ}/10^m$.

Цифре старшего разряда (СР) d_{m-1} соответствует одна десятая РРЕ.

Пример 30.4.3. Коды для 8-битового униполярного преобразователя (табл. 30.3)

Таблица 30.3. Коды для 8-битового униполярного преобразователя

	Обычный двоичный код			ДДК код (2 цифры)		
Дробь РРЕ	$qA = \frac{A}{256}$РРЕ	Дес. A_{10}	Двоичный A_2	$qA = \frac{A}{100}$РРЕ	Дес. A_{10}	ДДК $A_{ДДК}$
РРЕ-q=	0,9961 РРЕ	255	1111 1111	0,99 РРЕ	99	1001 1001
3/4РРЕ=	0,7500 РРЕ	192	1100 0000	0,75 РРЕ	75	0111 0101
1/2РРЕ=	0,5000 РРЕ	128	1000 0000	0,50 РРЕ	50	0101 0000
1/4РРЕ=	0,2500 РРЕ	64	0100 0000	0,25 РРЕ	25	0010 0101
q=	0,0039 РРЕ	1	0000 0001	0,01 РРЕ	1	0000 0001
0=	0,0000 РРЕ	0	0000 0000	0,00 РРЕ	0	0000 0000

Примечания.

– Наибольшее значение А соответствует полной шкале за вычетом одного кванта.

– В ДДК одна полная цифра требует 4 бита и позволяет представить цифры от 0 до 9 или при дробном представлении значения от 0 до 9/10. Аналогично при неполной цифре, используя только один бит, можно представить цифры 0 и 1 или при дробном представлении значения от 0 до 1/2. А при неполной цифре, используя два бита, можно представить цифры от 0 до 3 или при дробном представлении значения от 0 до 3/4. Например, для преобразователя двух цифр имеем 8 бит и $N_{Val} = 100$. Если к двум цифрам добавить один бит, преобразователь называется $2\frac{1}{2}$ цифры, имеем 9 бит и $N_{Val} = 200$. Наконец, если к двум цифрам добавить два бита, преобразователь называется $2\frac{3}{4}$ цифры, имеем 10 бит и $N_{Val} = 400$.

30.4.2. Основные коды для биполярных преобразователей

- ***Двоичный смещенный код.***

– Представление соответствующего целого в двоичном смещенном коде со смещением R на n бит:

$$A_{BB\,R} = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_{BB\,R} = -R + A_2$$

так, что $R \geqslant 0$, где

$$A_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \quad \text{и} \quad a_i \in \{0,1\}\,.$$

– Достоинство. Позволяет точно адаптировать распространение аналогового сигнала на полный масштаб преобразователя. Обычно необходимо добавить одну ступень калибровки (см. гл. 26).

– Недостаток. Требует выполнения арифметического расчета для коррекции вводимого смещения.

Вопрос. Имеем принцип адаптации входного напряжения u_E к полномасштабному диапазону униполярного АЦП с обычным 8-битовым двоичным кодом (рис. 30.5). Рассчитать смещение R.

Ответ. Для $u_E = +5$ В соответствует $e = 5$ В и $A = 256_{10}$ ($A = 100000000_2$); а для $u_E = -3$ В соответствует $e = 0$ В и $A = 0_{10}$ ($A = 00000000_2$). Передаточные функции схемы калибровки и АЦП записываются как:

$$e = \frac{5}{8}(u_E + 3) \quad \text{и} \quad e = \frac{5}{256}A + \varepsilon_q \Rightarrow \frac{5}{8}(u_E + 3) = \frac{5}{256}A + \varepsilon_q.$$

Полагая ошибку квантования пренебрежимо малой, можно записать:

$$A = \frac{256}{5}e = \frac{256}{8}(u_E + 3) = 32(u_E + 3) = 32u_E + 96.$$

Введенное смещение составляет $R = 96_{10}$ ($K = 01100000_2$), и выполняемый расчет получения соответствующего числа для напряжения u_E дает: $-96 + A$.

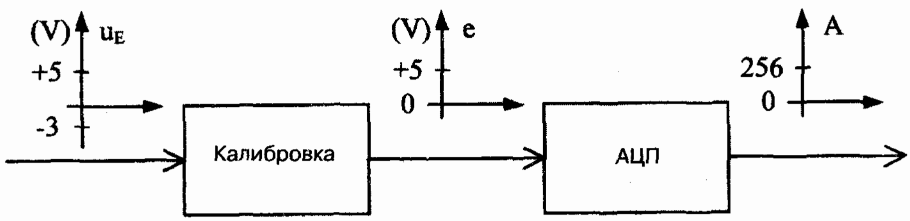


Рис. 30.5. Принцип адаптации к PPE

- ***Сдвинутый двоичный код.*** Это частный случай смещенного двоичного кода со смещением 2^{n-1}.
  - Представление соответствующего целого в двоичном сдвинутом коде со сдвигом R на n бит:

$$A_{BD} = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_{BD} = -\overline{a_{n-1}}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i, \quad \text{где} \quad a_i \in \{0, 1\}.$$

  - Дробное представление аналогового сигнала qA_{BD}, эквивалентного A_{BD}:

$$qA_{BD} = q\left(-2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i\right) = PPE\left(\frac{-\overline{a_{n-1}}}{2} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^{i-n}\right) =$$

$$= PPE\left(-\frac{\overline{a_{n-1}}}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \frac{a_{n-3}}{8} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} + \frac{a_0}{2^n}\right)$$

- ***Дополнительный код числа (дополнение до двух).***
  - Представление соответствующего целого в дополнительном коде на n бит:

$$A_{C2} = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_{C2} = -a_{n-1}2^n + A_2,$$

где

$$A_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \quad \text{и} \quad a_i \in \{0, 1\} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad A_{C2} = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_{C2} = -a_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i.$$

– Дробное представление аналогового сигнала qA_{C2}, эквивалентного A_{C2}:

$$qA_{C2} = q\left(-a_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i\right) = PPE\left(\frac{-a_{n-1}}{2} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^{i-n}\right) =$$

$$= PPE\left(-\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \frac{a_{n-3}}{8} + \dots + \frac{a_1}{2^{n-1}} + \frac{a_0}{2^n}\right).$$

$$qA^{-}_{C2\,Max} = -q2^{n-1} = PPE/2,$$

$$qA^{+}_{C2\,Max} = q(2^{n-1} - 1) = PPE/2 - q.$$

Биту младшего разряда (МБ) a_0 соответствует квант $q = PPE/2^n$.

Примечание. От сдвинутого двоичного кода легко перейти к дополнительному коду и обратно, дополняя бит наивысшего разряда.

- ***ДДК + знак.*** Это ДДК, для которого вводится бит знака для представления положительных и отрицательных величин. Ноль имеет два представления: ноль положительный и ноль отрицательный.

Пример 30.4.4. Коды для 8-битовых биполярных преобразователей приведены в табл. 30.4.

Примечание. Максимальная положительная величина A соответствует полной положительной шкале без одного кванта. Максимальная отрицательная величина A соответствует полной отрицательной шкале.

Таблица 30.4. Коды для 8-битового биполярного преобразователя

Дробь PPE	$qA = \frac{A}{256}PPE$	Дес. A_{10}	**Сдвинутый двоичный A_{BD}**	**Дополнительный код A_{C2}**
+1/2PPE − q =	+0,4961 PPE	+127	1111 1111	0111 1111
+3/8PPE =	+0,3750 PPE	+96	1110 0000	0110 0000
+1/4PPE =	+0,2500 PPE	+64	1100 0000	0100 0000
+1/8PPE =	+0,1250 PPE	+32	1010 0000	0010 0000
+q =	+0,0039 PPE	+1	1000 0001	0000 0001
0 =	+0,0000 PPE	0	1000 0000	0000 0000
−q =	−0,0039 PPE	−1	0111 1111	1111 1111
−1/8PPE =	−0,1250 PPE	−32	0110 0000	1110 0000
−1/4PPE =	−0,2500 PPE	−64	0100 0000	1100 0000
−3/8PPE =	−0,3750 PPE	−96	0010 0000	1010 0000
−1/2PPE + q =	−0,4961 PPE	−127	0000 0001	1000 0001
−1/2PPE =	−0,5000 PPE	−128	0000 0000	1000 0000

30.5. Описания ЦАП И АЦП

Желаемые свойства зависят от областей их использования (медицинское или научное оборудование, аудио и видео широкого потребления или профессиональные, телекоммуникации и т. д.).

30.5.1. Статические свойства

• ***Цифровое разрешение.*** Разрешение (см. § 30.1) является теоретической характеристикой, которая не поясняет понятия точности преобразователя.

• ***Точность.***

– *Абсолютная точность* учитывает все ошибки (квантования, сдвига, усиления, линейности, опорных значений, шумы и т. д.) и их дрейфы в наихудших условиях.
– *Относительная точность* учитывает все ошибки за исключением ошибок усиления и смещения.

• ***Ошибка сдвига.*** Выражается в процентах от РРЕ или в долях бита младшего разряда. Она представляет собой разность между идеальной передаточной характеристикой (теоретической) и реальной. На рис. 30.6 показана ошибка сдвига при A = 0, а на рис. 30.7 — ошибка сдвига АЦП при переходе A от 0 к 1 бита младшего разряда.

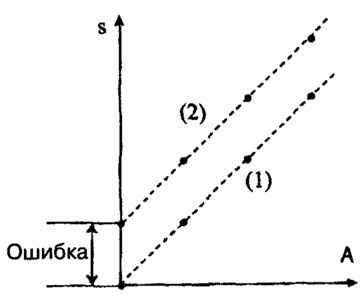


Рис. 30.6. Ошибка сдвига ЦАП.
(1) — идеальная характеристика;
(2) — реальная характеристика

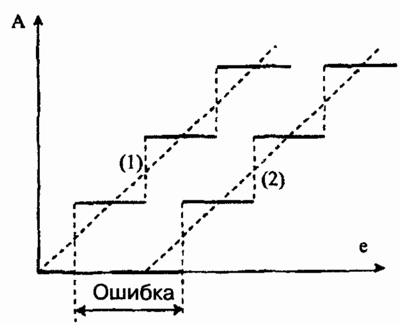


Рис. 30.7. Ошибка сдвига АЦП.
(1) — идеальная характеристика;
(2) — реальная характеристика

• ***Ошибка усиления.*** Или ошибка масштаба представляет собой разность между идеальной передаточной характеристикой (теоретической) и реальной после коррекции ошибки смещения. Она выражается в процентах от РРЕ или в долях бита младшего разряда. На рис. 30.8 показана ошибка усиления при А = 0, а на рис. 30.9 — ошибка усиления АЦП при переходе А от 0 к 1 бита младшего разряда.

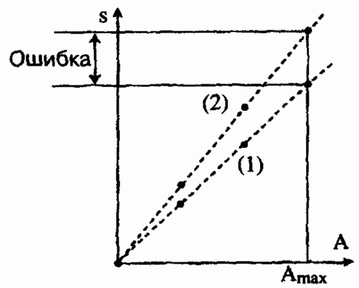


Рис. 30.8. Ошибка усиления ЦАП. (1) — идеальная характеристика; (2) — реальная характеристика

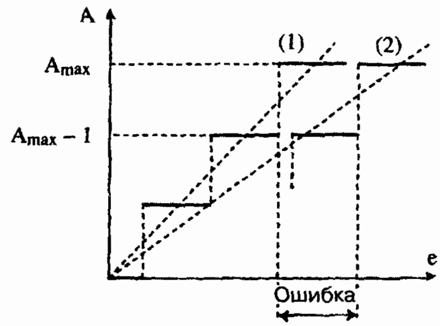


Рис. 30.9. Ошибка усиления АЦП. (1) — идеальная характеристика; (2) — реальная характеристика

• ***Искажение линейности.*** Выражается в процентах от РРЕ или в долях бита младшего разряда. Это максимальное отклонение между реальной кривой и идеальной прямой передаточной характеристики после устранения ошибок сдвига и усиления (рис. 30.10 и 30.11).

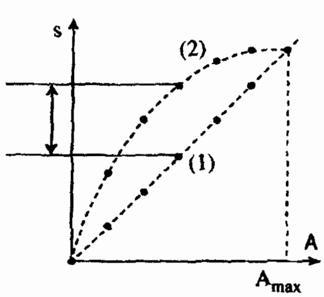


Рис. 30.10. Искажение линейности ЦАП. (1) — идеальная прямая; (2) — реальная кривая

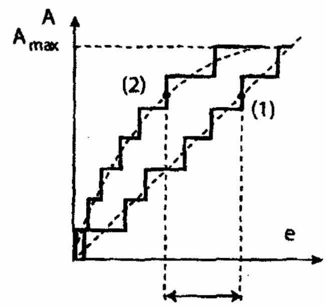
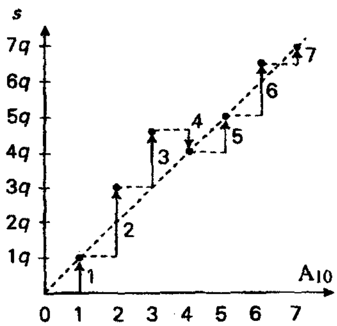


Рис. 30.11. Искажение линейности АЦП. (1) — идеальная прямая; (2) — реальная кривая

Код между двумя последовательными скачками составляет 1 бит младшего разряда. Соответствующий скачок между двумя последовательными аналоговыми значениями идеально составляет 1 квант. Отклонение между реальным скачком и квантом называется *дифференциальным линейным искажением.* Изготовитель приводит максимальное значение дифференциального линейного искажения, выраженного в процентах или в доле бита младшего разряда (рис. 30.12)



Скачок	Высота скачка в квантах	Линейное дифференциальное искажение в МБ
1	1q	0
2	2q	1 МБ
3	1,5q	0,5 МБ
4	−0,5q	−1,5 МБ
5	1q	0
6	1,5q	0,5 МБ
7	0,5q	−0,5 МБ

Рис. 30.12. Дифференциальное линейное искажение ЦАП

30.5.2. Динамические характеристики

• ***Время преобразования или время установления.*** Это время, необходимое для осуществления преобразования с заданной точностью. Изготовители указывают также *частоту преобразования*, которая представляет собой максимально возможное число преобразований в секунду. Для ЦАП время преобразования чаще называют *временем установления.*

• ***Ненадежность в точке открытия.*** Это ненадежность мгновения дискретизации, зависящая от стабильности внутреннего таймера преобразователя (явление, рассматриваемое как случайное). Ненадежность последовательного измерения входного сигнала зависит от его наклона в момент измерения.

• ***Время открывания АЦП.*** Оно зависит от желаемого разрешения. Это время обычно короткое. Очень часто следует учесть дискретизатор с блокировкой перед АЦП. Время открывания Δt определяется следующим соотношением:

$$\Delta t = \frac{\Delta e}{de/dt},$$

где Δe — вариация входного сигнала, de/dt — наклон характеристики входного сигнала.

Максимальное время открывания с точностью (теоретической) меньшей, чем 1 бит младшего разряда. Нужно, чтобы вариация входного сигнала Δe в течение времени открывания Δt было меньше одного кванта в худшем случае, при котором наклон характеристики входного сигнала максимален. Отсюда следует:

$$\Delta t < \Delta t_{Max(1МБ)} = \frac{q}{(de/dt)_{Max}} = \frac{1}{(de/dt)_{Max}} \frac{PPE}{N_{Val}}.$$

Для двоичного n-битового кода получим:

$$\Delta t < \Delta t_{Max(1МБ)} = \frac{1}{(de/dt)_{Max}} \frac{PPE}{2^n}.$$

Максимальное время открывания с точностью (теоретической) меньшей, чем 1 бит младшего разряда для синусоидального сигнала. Максимальное время открывания обычно дается для полномасштабного входного синусоидального сигнала. Это позволяет оценить необходимое время открывания в функции частотных составляющих входного сигнала. Выражение полномасштабного входного сигнала запишется в виде:

$$e = \frac{PPE}{2} \sin \omega t,$$

откуда:

$$\Delta t < \Delta t_{Max(1МБ)} = \frac{1}{\pi f N_{Val}},$$

где f — частота входного сигнала.

Для двоичного n-битового кода максимальное время открывания в функции частоты (рис. 30.13) определяется как:

$$\Delta t < \Delta t_{Max(1МБ)} = \frac{1}{\pi f 2^n}.$$

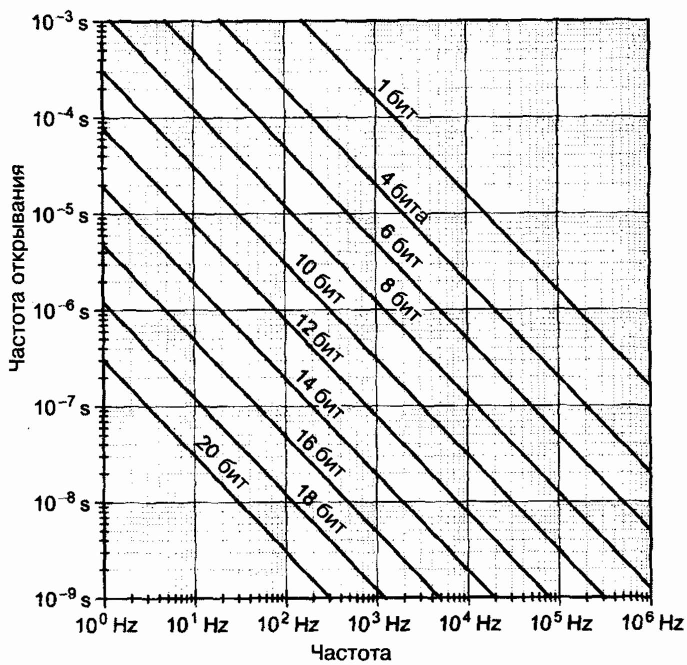


Рис. 30.13. Максимальное время открывания в функции f (двоичный код)

Метод

На рис. 30.13 приведено максимальное время открывания в функции частоты для двоичного кода. Например, для синусоидального сигнала частотой 1 кГц время открывания 10-битового АЦП должно быть 310 нс, чтобы получить ошибку меньше 1-го бита младшего разряда. Чтобы получить ошибку, меньшую 2-го младшего бита, время открывания должно быть 620 нс (вдвое большим). А для получения ошибки, меньшей 1/2 бита младшего разряда, время открывания должно составить 155 нс (вдвое меньше). Поэтому в большинство АЦП интегрируют дискретизатор с блокировкой.

• ***Шум квантования.*** Ошибка квантования ε_q искажает полезный сигнал генерируя шум квантования. Действующее значение $\varepsilon_{q\,\mathrm{Eff}}$ проявляет себя как источник шума.

– *Мощность шума квантования*: $P_B = \frac{q^2}{12}$.
– *Действующее значение шума квантования*: $\varepsilon_{q\,\mathrm{Eff}} = \sqrt{P_B} = \frac{q}{\sqrt{12}}$.
– *Соотношение сигнала S и шума B*: Наибольшее значение соотношения сигнала к шуму для синусоидального входного сигнала максимальной амплитуды (PPE/2) составляет:

$$(S/B)_{Max} = \frac{P_{\text{Сигнал}}}{P_{\text{Шум}}} = 1{,}5\frac{PPE}{q_2} = 1{,}5N^2_{Val}.$$

Или в децибелах:

$$(S/B)_{Max(\text{дБ})} = 10\log(S/B)_{Max} = 20\log N_{Val} + 1{,}76.$$

Для двоичного n-битового кода получим:

$$(S/B)_{Max(\text{дБ})} \approx 6{,}02n + 1{,}76.$$

Добавив 1 бит, мы улучшим соотношение сигнала и шума.

• ***Полоса пропускания всей амплитуды.*** Преобразователь проявляет себя как фильтр низкой частоты. Тогда можно определить входную частоту, при которой амплитуда составляющей основной гармоники после кодирования ослаблена на 3 дБ. Амплитуда входного сигнала составляет PPE/2.

ЧАСТЬ IV

СИЛОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

ГЛАВА 31

НЕУПРАВЛЯЕМОЕ ВЫПРЯМЛЕНИЕ

Имея источник одно- или трехфазного переменного тока, выпрямление позволяет получить однонаправленный ток. Обычно сглаживание тока индуктивностью используется при больших мощностях, а сглаживание конденсатором — при малых мощностях. Иногда схемы выпрямления делят на три типа: с параллельной коммутацией, обозначаемые буквой P, с двойной параллельной коммутацией, обозначаемые буквами PD, с последовательной коммутацией, обозначаемые буквой S. Указанию типа следует указание числа фаз.

Пример 31.0.1. Однофазный выпрямитель со средней точкой обозначается P2, двухполупериодный трехфазный выпрямитель обозначается PD3.

– Среднее и действующее значения, коэффициенты пульсации и формы определены в гл. 7.

– В этой главе рассматривается только установившийся (периодический) режим.
– Для упрощения мы рассматриваем только идеальные составляющие, особенно — диоды (см. гл. 16).

31.1. Однофазное однополупериодное выпрямление

31.1.1. Активная нагрузка (рис. 31.1 и 31.2)

При i_S отрицательном диод заперт, а при i_S положительном следует проводящее состояние — ток выпрямляется. При входном напряжении $u_E = U_{E\,Max}\sin(\omega t)$ напряжение на зажимах сопротивления R определится как $u_S = U_{S\,M}\sin(\omega t)$ при $n + nT \leqslant t \leqslant T/2 + nT$, и $u_S = 0$ при $T/2 + nT \leqslant t \leqslant T + nT$, где $u_S = Ri_S$, $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$ (идеальный диод) и $\omega T = 2\pi$. Период u_S равен периоду u_E.

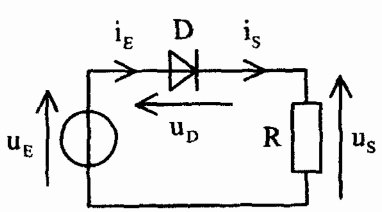


Рис. 31.1. Однофазное однополупериодное выпрямление

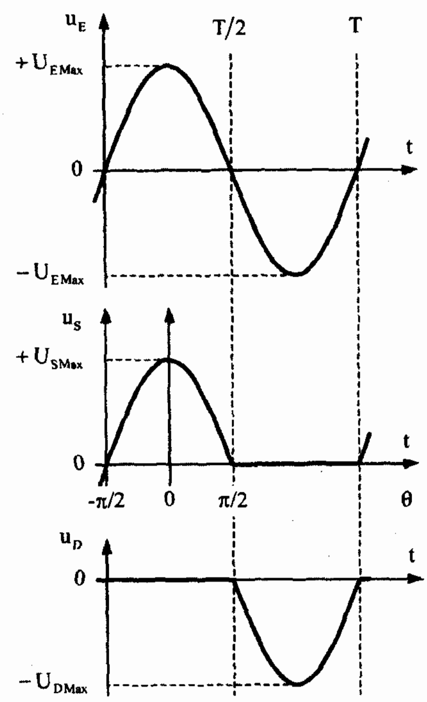


Рис. 31.2. Диаграммы однофазного однополупериодного выпрямления

Вопрос. Выразить среднее и действующее значения напряжения u_S. Вывести отсюда коэффициент формы.

Ответ.

$$U_{S\,cp} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} U_{S\,Max}\cos\theta d\theta = \frac{U_{S\,Max}}{2\pi}[\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{U_{S\,Max}}{\pi}.$$

$$U_S^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} U_{S\,Max}^2\cos^2\theta d\theta = \frac{U_{S\,Max}^2}{4\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}(1+\cos 2\theta)d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_S^2 = \frac{U_{S\,Max}^2}{4\pi}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2},$$

откуда: $U_S = \frac{U_{S\,Max}}{2}$

Коэффициент формы:

$$F = \frac{U_S}{|U_{S\,cp}|} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{F^2-1} \approx 121\%.$$

31.1.2. Сглаживание выходного напряжения (рис. 31.3 и 31.4)

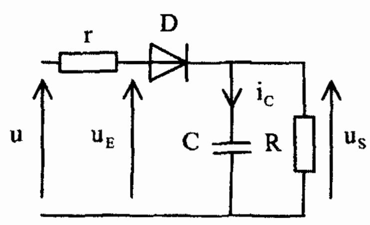


Рис. 31.3. Сглаживание напряжения u_S при однополупериодном напряжении

Учитывая невысокие требования к элементам схемы, приближенный расчет сглаживающего конденсатора выполняется из условия, что размах колебаний выпрямленного напряжения $\Delta U_S = (U_{S\,Max} - U_{S\,Min})$ должен быть меньше 20% $U_{S\,Max}$. Влиянием сопротивления r здесь пренебрегается. Когда диод запирается, напряжение u_S снижается по закону: $u_S = U_{S\,Max}e^{-t/\tau}$, где $\tau = RC$ (см. рис. 31.4). Упрощая экспоненциальную функцию первого порядка, получим: $u_S = U_{S\,Max}(1 - t/\tau)$. Кроме того, рассматривая время разряда $\Delta t \approx T$, получим:

$$\frac{T}{\tau} \approx \frac{U_{S\,Max} - U_{S\,Min}}{U_{S\,Max}} = \frac{\Delta U_S}{U_{S\,Max}} \Rightarrow C \approx \frac{U_{S\,Max}}{\Delta U_S R f},$$

где C — сглаживающая емкость в фарадах (Ф), R — сопротивление нагрузки в омах (Ом) и $f = 1/T$ — частота входного напряжения в герцах (Гц).

Такая аппроксимация приводит к тому, что напряжение u_S рассматривается как последовательность линейно спадающих функций (рис. 31.5).

Примечания.

– При первом заряде конденсатора ток может быть значительным. Следовательно, и диод, и конденсатор должны выдерживать такой пик тока. Или следует предусмотреть защиту путем включения последовательно сопротивления. Сопротивление r является суммой последовательных сопротивлений цепи (источник, диод, последовательное добавочное сопротивление и т. д.).

- Диод проводит только в случае, когда напряжение $u_E > u_S$. Следовательно, ток в трансформаторе не синусоидален, что усложняет процедуру его выбора.

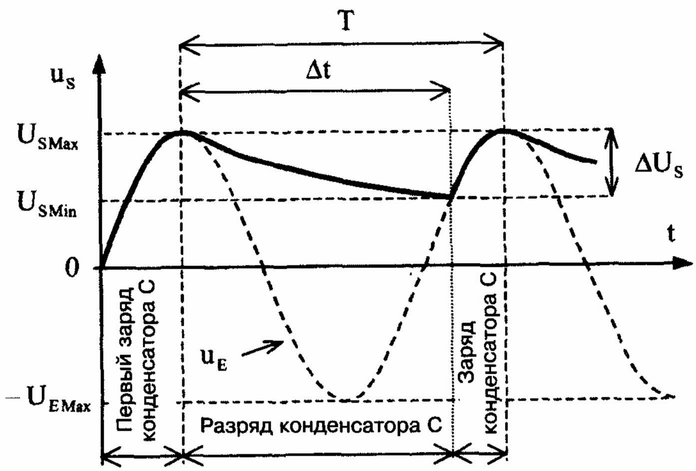
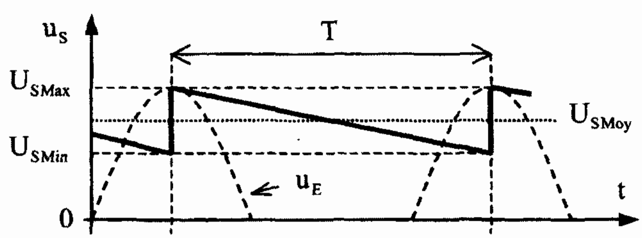


Рис. 31.4. График сглаженного напряжения u_S при однополупериодном выпрямлении (сопротивлением r пренебрегли)

Рис. 31.5. Упрощенные графики напряжения u_S при однополупериодном выпрямлении



Вопрос. В вышеприведенной упрощающей гипотезе (см. рис. 31.5) дать выражение среднего и действующего значений напряжения u_S. Вывести отсюда коэффициент пульсации.

Ответ.

$$\begin{cases} U_{S\,cp} = (U_{S\,Max} - U_{S\,Min}/2, \\ U_{S\,Min} = U_{S\,Max}(1 - T/\tau), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U_{S\,cp} = U_{S\,Max}\left(1 - \frac{1}{2RCf}\right).$$

Итак:

$$U_S^2 = U_{S\,cp}^2 + U_{S\,пер}^2 \Rightarrow U_S^2 = U_{S\,Max}^2 \frac{T^2}{12\tau^2}$$

(см. гл. 7). Отсюда:

$$\beta = \frac{U_{S\,\text{пер}}}{|U_{S\,\text{ср}}|} = \frac{1}{\sqrt{3}(2RCf - 1)}.$$

31.1.3. Сглаживание выходного тока (рис. 31.6 и 31.7)

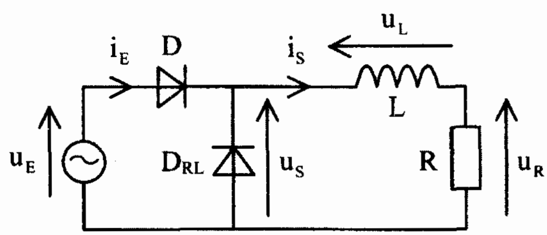


Рис. 31.6. Сглаживание тока i_S в однополупериодной схеме выпрямления

Чтобы ток i_S мог быть непрерывным, следует параллельно нагрузке включить разрядный диод (см. рис. 31.6). Он позволяет поддерживать ток i_S (вследствие обязательной непрерывности тока в индуктивности), когда напряжение u_E становится отрицательным, и позволяет проще запирать диод выпрямления D. Во время проводимости диода D_{RL} индуктивность передает сопротивлению ранее накопленную электромагнитную энергию.

Для $\tau = \frac{L}{R} > \frac{T}{2}$ покажем, что $\beta = \frac{I_{S\,\text{пер}}}{|I_{S\,\text{ср}}|} \approx \frac{E}{5{,}5\tau}$, откуда $L \approx \frac{R}{5{,}5\beta f}$, где L — сглаживающая индуктивность в генри (Гн), R — сопротивление нагрузки в омах (Ом), $f = 1/T$ — частота входного напряжения в герцах (Гц) и β — коэффициент пульсации тока i_S.

Примечание. Формула расчета L справедлива приблизительно для β меньше 40%. При бóльших значений β эта формула дает избыточное значение индуктивности.

Вопрос. Выразить среднее значение напряжения u_S. Отсюда получить среднее значение тока i_S.

Ответ. Графики u_S идентичны ранее полученным для однополупериодного однофазного выпрямления на активную нагрузку (см. § 31.1.1), откуда:

$$U_{S\,\text{ср}} = \frac{U_{S\,Max}}{\pi}.$$

По закону контуров $u_S = u_L + u_R \Rightarrow U_{S\,\text{ср}} = U_{L\,\text{ср}} + U_{R\,\text{ср}}$, откуда:

$$I_{S\,\text{ср}} = \frac{U_{S\,\text{ср}}}{R} = \frac{U_{R\,\text{ср}}}{R} = \frac{U_{S\,Max}}{\pi R}, \text{ так как } U_{L\,\text{ср}} = 0.$$

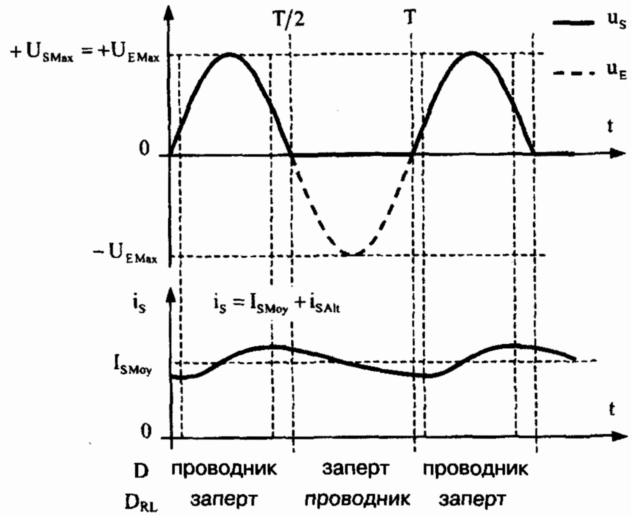


Рис. 31.7. Непрерывная проводимость сглаженного тока i_S при однополупериодном однофазном выпрямлении

31.2. Однофазное двухполупериодное выпрямление

31.2.1. Активная нагрузка

а) Схема со средней точкой (рис. 31.8 и 31.9)

Средняя точка вторичной обмотки трансформатора позволяет расположить два напряжения в противофазе. Для входного напряжения $u_{E1} = U_{E\,Max}\sin(\omega t) = -u_{E2}$ напряжение на зажимах сопротивления R составит $u_{E1} = U_{E\,Max}\,|\sin(\omega t)|$, где $u_S = Ri_S$, $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$ (идеальный диод) и $\omega T = 2\pi$. Период напряжения u_S равен половине периода напряжения u_E.

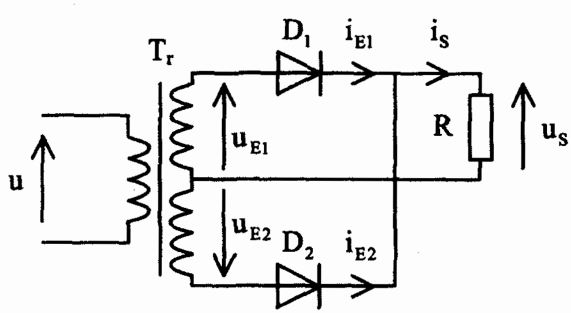


Рис. 31.8. Однофазное двухполупериодное выпрямление со средней точкой

б) Мостовая схема Граетца

Все четыре диода должны иметь одинаковые характеристики. Для входного напряжения $u_E = U_{E\,Max}\sin(\omega t)$ напряжение на зажимах R составит

$u_S = U_{S\,Max}\,|\sin(\omega t)|$, где $u_S = Ri_S$, $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$ (идеальный диод) и $\omega T = 2\pi$. Период напряжения u_S равен половине периода напряжения u_E.

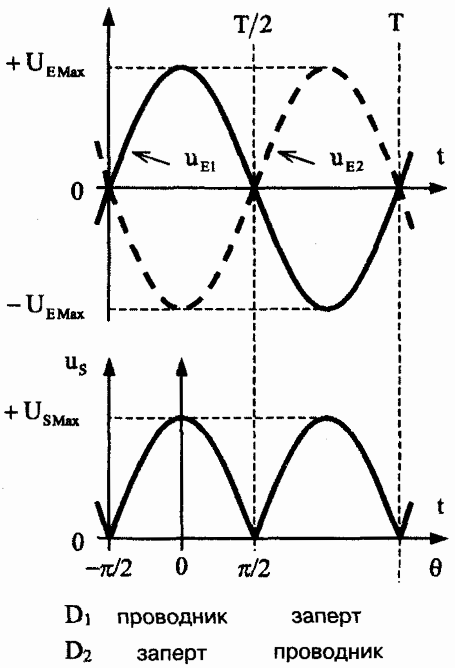


Рис. 31.9. Диаграммы при активной нагрузке

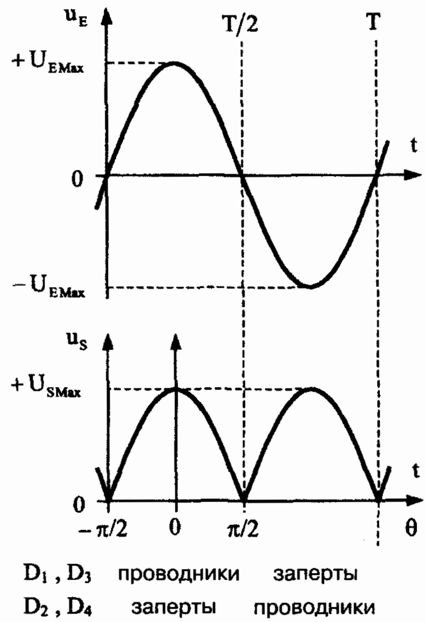


Рис. 31.10. Диаграмма при активной нагрузке в мостовой схеме

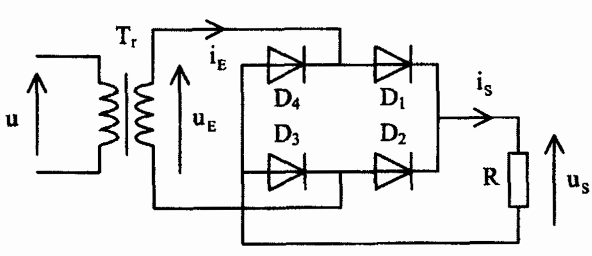


Рис. 31.11. Однофазный двухполупериодный мостовой выпрямитель

Вопрос. Выразить среднее и действующее значения напряжения u_S. Вывести отсюда значение коэффициента формы.

Ответ. Аналогично ответу § 31.1.1 (однофазное однополупериодное выпрямление на активную нагрузку), получим:

$$U_{S\,ср} = \frac{2U_{S\,Max}}{\pi}, \quad U_S = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{2}}, \quad F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 48{,}3\%.$$

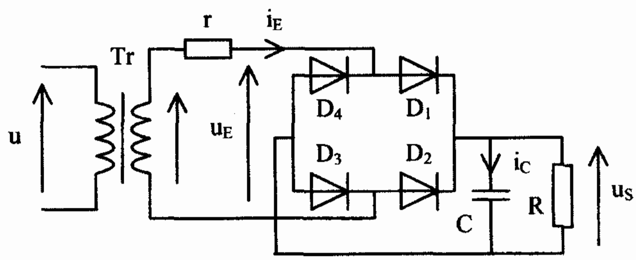
31.2.2. Сглаживание выходного напряжения (рис. 31.12)

Аналогично § 31.1.2 (сглаживание двухполупериодного выпрямления однофазного напряжения) и принимая время разряда конденсатора приблизительно равным T/2, получим:

$$\frac{T}{2\tau} \approx \frac{U_{S\,Max} - U_{S\,Min}}{U_{S\,Max}} = \frac{\Delta U_S}{U_{S\,Max}}, \quad \Rightarrow \quad C \approx \frac{U_{S\,Max}}{2\Delta U_S R f},$$

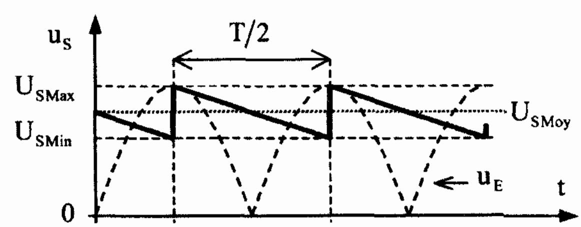
где C — сглаживающая емкость в фарадах (Ф), R — сопротивление нагрузки в омах (Ом), f = 1/T — частота входного напряжения в герцах (Гц).

Рис. 31.12. Сглаживание напряжения u_S в схеме двухполупериодного выпрямления



Такая аппроксимация приводит к тому, что напряжение u_S рассматривается как последовательность линейно спадающих функций (рис. 31.13).

Рис. 31.13. Упрощенные кривые $u_S = f(t)$ двухполупериодного выпрямления



Вопрос. В вышеприведенной упрощенной гипотезе (см. рис. 31.13) выразить среднее и действующее значения напряжения u_S. Вывести отсюда выражение коэффициента пульсации.

Ответ. Подобно ответу, приведенному в § 31.1.2 (сглаживание напряжения в схеме однофазного однополупериодного выпрямления), получим:

$$U_{S\,ср} = U_{S\,Max}\left(1 - \frac{1}{4RCf}\right) U_S^2 = U^2_{S\,Max}\left(1 - \frac{T}{2\tau} + \frac{T^2}{12\tau^2}\right);$$

$$U^2_{S\,пер} = U^2_{S\,Max}\frac{T^2}{48\tau^2}\beta = \frac{U_{S\,пер}}{|U_{S\,ср}|} = \frac{1}{\sqrt{3}(4RCf - 1)}.$$

31.2.3. Сглаживание выходного тока (рис. 31.14 и 31.15)

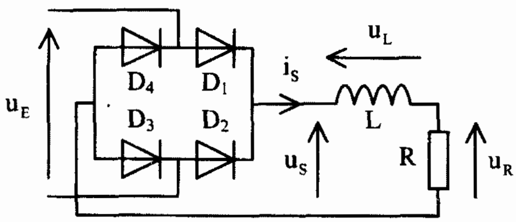


Рис. 31.14. Сглаживание тока i_S в схеме двухполупериодного выпрямления

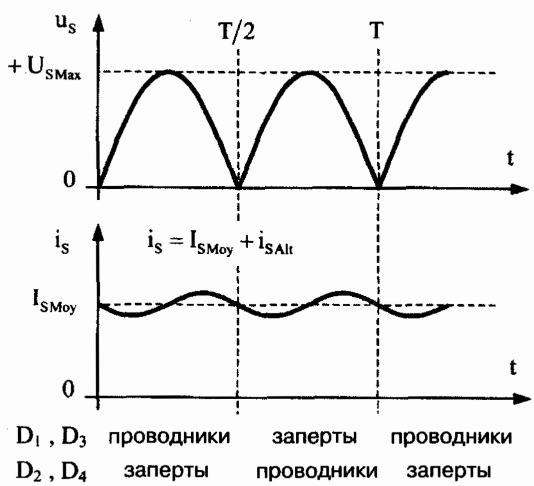


Рис. 31.15. Сглаженный ток i_S в схеме двухполупериодного выпрямления

Покажем, что при $\tau = \frac{L}{R} > \frac{T}{2}$ будет:

$$\beta = \frac{I_{S\,пер}}{|I_{S\,ср}|} \approx \frac{T}{26\tau},$$

откуда $L \approx \frac{R}{26\beta f}$, где L — сглаживающая индуктивность в генри (Гн), R — сопротивление нагрузки в омах (Ом), $f = 1/T$ — частота входного сигнала в герцах (Гц), β — коэффициент пульсаций тока i_S.

Примечания.

- Формула для определения L справедлива приблизительно для $\beta < 8\%$. При бо́льших значений β значения L избыточны.
- Переменная составляющая $i_{S\,пер}$ выходного тока i_S не строго синусоидальна. Ее основная гармоника сдвинута по фазе на угол φ: $\operatorname{tg}\varphi = 2L\omega/R$.

Вопрос. Выразить среднее и действующее значения напряжения u_S. Вывести отсюда среднее значение тока i_S.

Ответ. Кривая напряжения u_S идентична полученной при однофазном двухполупериодном выпрямлении на резистивную нагрузку (см. § 31.2.1, б). Тогда:

$$U_{S\,cp} = \frac{2U_{S\,Max}}{\pi}.$$

По закону контуров $u_S = u_L + u_R \Rightarrow U_{S\,cp} = U_{L\,cp} + U_{R\,cp}$, откуда:

$$I_{S\,cp} = \frac{U_{S\,cp}}{R} = \frac{U_{R\,cp}}{R} = \frac{2U_{S\,Max}}{R}, \text{ так как } U_{L\,cp} = 0.$$

31.3. Однополупериодное трехфазное выпрямление

31.3.1. Резистивная нагрузка (рис. 31.16 и 31.17)

Схема выпрямляет напряжения между фазами и нейтралью. При входных фазных напряжениях v_{1N}, v_{2N}, v_{3N} (см. гл. 6) напряжение v_S на зажимах сопротивления R определяется согласно табл. 31.1.

Рис. 31.16. Трехфазное однополупериодное выпрямление

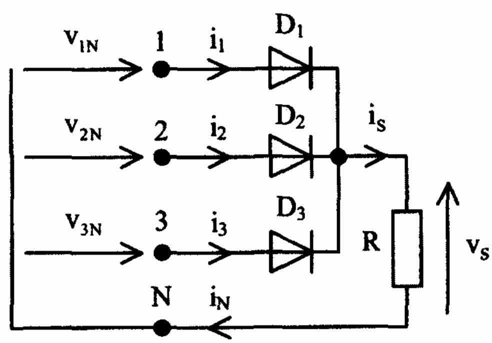


Таблица 31.1. Выходное напряжение при 3-х фазном однополупериодном выпрямлении

Угол проводимости θ (рад). Период 2π	**Проводящий диод**	**Выходное напряжение** v_S
$-\pi/3 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$	D_1	$v_S = v_{1N} = V_{Max}\cos\theta$
$\pi/3 \leqslant \theta \leqslant \pi$	D_2	$v_S = v_{2N} = V_{Max}\cos(\theta - 2\pi/3)$
$\pi \leqslant \theta \leqslant 5\pi/3$	D_3	$v_S = v_{3N} = V_{Max}\cos(\theta - 4\pi/3)$

При $v_S = Ri_S$, $V_{S\,Max} = V_{Max}$ (диоды идеальные), $\theta = \omega t - \pi/2$, $\omega T = 2\pi$ Период напряжения v_S равен трети периода фазного напряжения v_{1N}.

Вопрос. Выразить среднее и действующее значения напряжения v_S. Вывести отсюда значение коэффициента формы.

Ответ.

$$V_{S\,cp} = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} V_{S\,Max}\cos\theta d\theta, \text{ откуда } V_{S\,cp} = \frac{3\sqrt{3}V_{S\,Max}}{2\pi}.$$

$$V_S^2 = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} V_{S\,Max}^2\cos^2\theta d\theta, \text{ откуда } V_S = V_{S\,Max}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}}.$$

Или:

$$V_{S\,cp} \approx 0{,}83V_{S\,Max} \quad \text{и} \quad V_S \approx 0{,}84V_{S\,Max}.$$

$$F = \frac{V_S}{|V_{S\,cp}|} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{27}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}} \approx 1{,}017 \Rightarrow \beta = \sqrt{F^3-1} \approx 18{,}3\%.$$

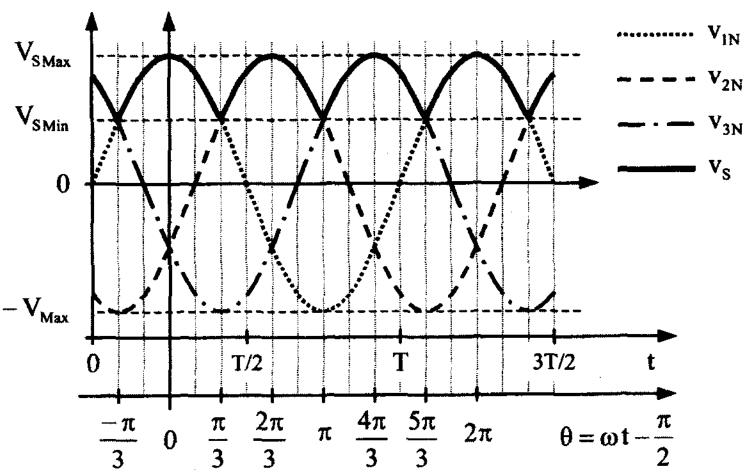


Рис. 31.17. Диаграмма напряжений при резистивной нагрузке

31.3.2. Сглаживание выходного напряжения

Это осуществляется включением конденсатора параллельно нагрузке (сопротивление на рис. 31.16). Аналогично § 31.1.2 (сглаживание выпрямленного однополупериодного напряжения в однофазной схеме) и приняв, что время разряда конденсатора равно примерно T/3, получим:

$$\frac{T}{\tau} \approx \frac{V_{S\,Max} - V_{S\,Min}}{V_{S\,Max}} = \frac{\Delta V_S}{V_{S\,Max}} \quad \Rightarrow \quad C \approx \frac{V_{S\,Max}}{\Delta V_S Rf},$$

где C — сглаживающая емкость в фарадах (Ф), R — сопротивление нагрузки в омах (Ом), $f = 1/T$ — частота входного сигнала в герцах (Гц).

$$V_{S\,ср} = V_{S\,Max}\left(1 - \frac{1}{6RCf}\right), \quad V_S^2 = V_{S\,Max}^2\left(1 - \frac{T}{3\tau} + \frac{T^2}{27\tau^2}\right),$$

$$V_{S\,пер}^2 = V_{S\,Max}^2\frac{T^2}{108\tau^2}, \quad \beta = \frac{V_{S\,пер}}{|V_{S\,ср}|} = \frac{1}{\sqrt{3}(6RCf - 1)}.$$

31.3.3. Сглаживание выходного тока

Это осуществляется включением катушки индуктивности последовательно с нагрузкой (сопротивление на рис. 31.16).

Покажем, что при $\tau = \frac{L}{R} > \frac{T}{5}$ будет:

$$\beta = \frac{I_{S\,пер}}{|I_{S\,ср}|} \approx \frac{T}{105\tau},$$

откуда $L \approx \frac{R}{105\beta f}$, где L — сглаживающая индуктивность в генри (Гн), R — сопротивление нагрузки в омах (Ом), $f = 1/T$ — частота входного сигнала в герцах (Гц), β — коэффициент пульсации тока i_S.

$$I_{S\,ср} = \frac{3\sqrt{3}V_{S\,Max}}{2\pi R}.$$

Примечание. Формула для определения L справедлива приблизительно для $\beta < 8\%$. Для больших значений β значения L избыточны.

31.4. Мостовая схема трехфазного двухполупериодного выпрямления

31.4.1. Резистивная нагрузка (рис. 31.18 и 31.19)

Схема выпрямляет линейные токи. При входных линейных напряжениях u_{12}, u_{23} и u_{31}(см. гл. 6) значения выходного напряжения u_S на зажимах *нагрузки R приведены в табл. 31.2.*

Рис. 31.18. Трехфазная мостовая схема выпрямления

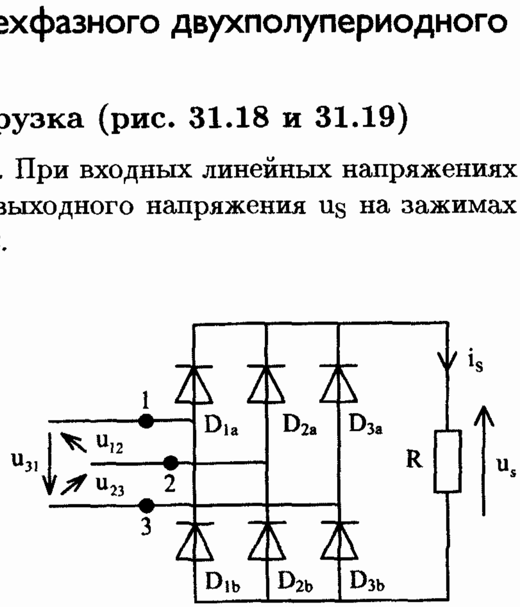


Таблица 31.2. Значения выходного напряжения в мостовой схеме

Угол проводимости θ (рад). Период 2π	Проводящие диоды	Выходное напряжение u_S
$-\pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/6$	D_{1a} и D_{2b}	$u_S = u_{12} = U_{Max}\cos\theta$
$\pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$	D_{1a} и D_{3b}	$u_S = u_{12} + u_{23} = -u_{31}$
$\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/6$	D_{2a} и D_{3b}	$u_S = u_{23} = U_{Max}\cos(\theta - 2\pi/3)$
$5\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/6$	D_{2a} и D_{1b}	$u_S = u_{23} + u_{31} = -u_{12}$
$7\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$	D_{3a} и D_{1b}	$u_S = u_{31} = U_{Max}\cos(\theta - 4\pi/3)$
$3\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 11\pi/6$	D_{3a} и D_{2b}	$u_S = u_{31} + u_{12} = -u_{23}$

Здесь $u_S = Ri_S$;$U_{S\,Max} = U_{Max}$(идеальные диоды); $\theta = \omega t - \pi/3$; $\omega T = 2\pi$; $U_{Max} = \sqrt{3}V_{Max}$, где U_{Max} — амплитуда линейного напряжения; V_{Max} — амплитуда фазного напряжения. Период выпрямленного напряжения u_S равен шестой части периода напряжения u_{12}.

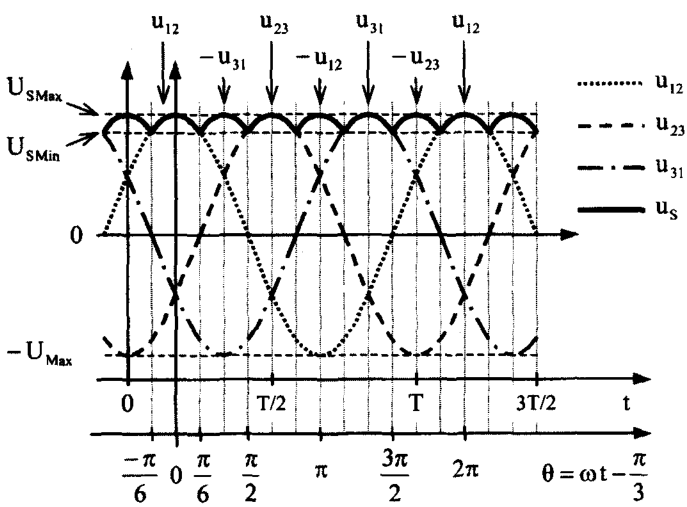


Рис. 31.19. Диаграмма напряжений при резистивной нагрузке в мостовой схеме выпрямления с резистивной нагрузкой

Вопрос. Выразить среднее и действующее значения напряжения u_S. Вывести отсюда значение коэффициента формы.

Ответ.

$$U_{S\,cp} = \frac{3}{2\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} U_{S\,Max}\cos\theta d\theta, \text{ откуда } U_{S\,cp} = \frac{3U_{S\,Max}}{\pi}.$$

$$U_S^2 = \frac{3}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} U_{S\,Max}^2\cos^2\theta d\theta, \text{ откуда } U_S = U_{S\,Max}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}.$$

Или:

$$U_{S\,ср} \approx 0{,}95U_{S\,Max} \quad \text{и} \quad U_S \approx 0{,}95U_{S\,Max}.$$

$$F = \frac{U_S}{|U_{S\,ср}|} = \sqrt{\frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}}} \approx 1{,}0009 \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{F^3 - 1} \approx 4{,}2\%.$$

31.4.2. Сглаживание выходного напряжения

Сглаживание выходного напряжения u_S осуществляется включением конденсатора параллельно нагрузке (сопротивление R на рис. 31.18). Аналогично § 31.1.2 (сглаживание выпрямленного однофазного однополупериодного выпрямления) и полагая, что время разряда конденсатора составляет приблизительно T/6, имеем:

$$\frac{T}{6\tau} \approx \frac{U_{S\,Max} - U_{S\,Min}}{U_{S\,Max}} = \frac{\Delta U_S}{U_{S\,Max}} \quad \Rightarrow \quad C \approx \frac{U_{S\,Max}}{6\Delta U_S Rf},$$

где C — сглаживающая емкость в фарадах (Ф), R — сопротивление нагрузки в омах (Ом), $f = 1/T$ — частота входного напряжения в герцах (Гц).

$$U_{S\,ср} = U_{S\,Max}\left(1 - \frac{1}{12RCf}\right), \quad U_S^2 = U_{S\,Max}^2\left(1 - \frac{T}{6\tau} + \frac{T^2}{108\tau^2}\right),$$

$$U_{S\,пер}^2 = U_{S\,Max}\frac{T^2}{432\tau^2}, \quad \beta = \frac{U_{S\,пер}}{|U_{S\,ср}|} = \frac{1}{\sqrt{3}(12RCf - 1)}.$$

31.4.3. Сглаживание выходного тока

Сглаживание тока осуществляется включением катушки индуктивности последовательно с нагрузкой (сопротивление на рис. 31.18).

При $\tau = \frac{L}{R} > \frac{T}{10}$ следует

$$\beta = \frac{I_{S\,пер}}{|I_{S\,ср}|} \approx \frac{T}{925\tau},$$

откуда

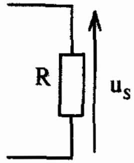
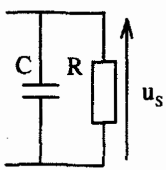
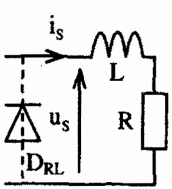
$$L \approx \frac{R}{925\beta f},$$

где L — сглаживающая индуктивность в генри (Гн), R — сопротивление нагрузки в омах (Ом), $f = 1/T$ — частота входного напряжения в герцах (Гц), β — коэффициент пульсаций тока i_S. $I_{S\,ср} = \frac{3U_{S\,Max}}{\pi R}$.

Примечание. Формула определения L справедлива приблизительно для $\beta < 1\%$. При больших значениях β значение индуктивности становится заниженным.

31.5. Основные характеристики схем выпрямления

Таблица 31.3.

Нагрузка ↓	Тип выпрямления →	Однополупериодное	Двухполупериодное: Средняя точка	Двухполупериодное: Мост	Однополупериодное	Двухполупериодное в мостовой схеме
	Число диодов	**1 диод**	**2 диода**	**4 диода**	**3 диода**	**6 диодов**
	$f_{выхода}/f_{входа}$	1	2		3	6
 	$U_{S\,Max}$ (идеальные диоды)	$= U_{E\,Max}$	$= U_{E\,Max}$		$V_{S\,Max} = V_{Max}$ (фазное напряжение)	$U_{S\,Max} = U_{Max}$ (линейное напряжение)
	$U_{S\,ср}$	$= U_{S\,Max}/\pi$	$= 2U_{S\,Max}/\pi$		$V_{S\,ср} \approx 0{,}83V_{S\,Max}$	$U_{S\,ср} \approx 0{,}95U_{S\,Max}$
	U_S	$= U_{S\,Max}/2$	$= U_{S\,Max}/\sqrt{2}$		$V_S \approx 0{,}84V_{S\,Max}$	$U_S \approx 0,95U_{S\,Max}$
	$U_{обратное/диод}$	$= U_{E\,Max}$	$= 2U_{E\,Max}$	$= U_{E\,Max}$	$= \sqrt{3}V_{Max}$	$= U_{Max}$
	$I_{ср/диод}$	$= U_{S\,ср}/R$	$= U_{S\,ср}/2R$		$= V_{S\,ср}/3R$	$= U_{S\,ср}/3R$
	F (коэффициент формы)	$= \pi/2 \approx 1{,}57$	$= \pi/2\sqrt{2} \approx 1{,}11$		$\approx 1{,}017$	$\approx 1{,}0009$
	β (коэф. пульсации)	$\approx 121\%$	$\approx 48\%$		$\approx 18\%$	$\approx 4\%$
 	$U_{S\,ср}$	$\approx U_{S\,Max} \times (1 - 1/2RCf)$	$\approx U_{S\,Max}(1 - 1/4RCf)$		$V_{S\,ср} = V_{S\,Max} \times (1 - 1/6RCf)$	$\approx U_{S\,Max}(1 - 1/12RCf)$
	$U_{обратное/диод}$	$= 2U_{E\,Max}$	$= 2U_{E\,Max}$	$= U_{E\,Max}$	$= 2V_{Max}$	$= 2U_{Max}$
	$I_{ср/диод}$	$= U_{S\,ср}/R$	$= U_{S\,ср}/2R$		$= V_{S\,ср}/3R$	$= U_{S\,ср}/3R$
	β (коэф. пульсации)	$\approx 1/\sqrt{3}(2RCf - 1)$	$\approx 1/\sqrt{3}(4RCf - 1)$		$1/\sqrt{3}(6RCf - 1)$	$1/\sqrt{3}(12RCf - 1)$
 	$I_{S\,ср}$	$= U_{S\,Max}/\pi R$	$= 2U_{S\,Max}/\pi R$		$\approx 0{,}83VS\,Max/R$	$\approx 0{,}95US\,Max/R$
	$U_{обратное/диод}$	$= U_{E\,Max}$	$= 2U_{E\,Max}$	$= U_{E\,Max}$	$\sqrt{3}V_{Max}$	U_{Max}
	$I_{ср/диод}$	$< I_{S\,ср}$	$= I_{S\,ср}/2$		$= I_{S\,ср}/3$	$= I_{S\,ср}/3$
	β (коэф. пульсации)	$\approx R/(5{,}5Lf)$ для $\beta < 40\%$	$\approx R/(26Lf)$ для $\beta < 8\%$		$\approx R/(105Lf)$ для $\beta < 5\%$	$\approx R/(95Lf)$ для $\beta < 1\%$
	Примечания	с D_{RL}	с или без D_{RL}		с D_{RL}	с или без D_{RL}

ГЛАВА 32

УПРАВЛЯЕМЫЕ ВЫПРЯМИТЕЛИ

Управляемый выпрямитель позволяет получить из источника переменного напряжения однонаправленный ток с регулируемыми средними и действующими значениями. Различают два рабочих режима: *непрерывной проводимости* или *прерывистой проводимости* тока в нагрузке. При некоторых условиях управляемый выпрямитель может выдавать энергию от источника постоянного тока в источник переменного тока. Тогда говорят о зависимом инверторе. Управляемое выпрямление используется для изменения скорости двигателей постоянного тока[1].

- Средние и действующие значения, коэффициент пульсации и коэффициент формы определены в гл. 7.
- В этой главе дается описание только установившегося (периодического) режима.
- Для упрощения материала рассматриваются идеальные элементы, особенно тиристоры (см. гл. 19).
- Угол подачи управляющего импульса тиристора обозначают α.

32.1. Однофазное однополупериодное выпрямление

Схема на рис. 32.1 работает как выпрямитель тока. Входное напряжение записывается в виде:

$$u_E = U_{E\,Max} \sin\theta, \quad \text{где} \quad \theta = \omega t \quad \text{и} \quad \omega T = 2\pi.$$

32.1.1. Выпрямитель без разрядного диода

а) Резистивная нагрузка (рис. 32.1 при $L = 0$ и без D_{RL}, рис. 32.2)

Управляющий импульс подается на управляющий электрод Т. Проводящая часть синусоиды изменяется в зависимости от значения угла управления тиристором α. Отсюда следует регулируемое значение среднего

[1]Область применения управляемых выпрямителей гораздо шире. Это различные по мощности и по функциональным возможностям источники питания в электротехнологических установках, электроприводе, источники бесперебойного питания в электроснабжении и т. п. — *Прим. перев.*

и действующего значения тока в нагрузке. Напряжение на зажимах R будет $u_S = U_{E\,Max}\sin\theta$ при $\alpha \pm 2k\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \pm 2k\pi$ и $u_S = 0$ вне этих значений угла управления. Здесь $u_S = Ri_S$ и $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$ (тиристор идеальный). Периоды напряжений u_S и u_E равны. Разрядный диод D_{RL} никакого влияния в схеме с чисто резистивной нагрузкой не имеет.

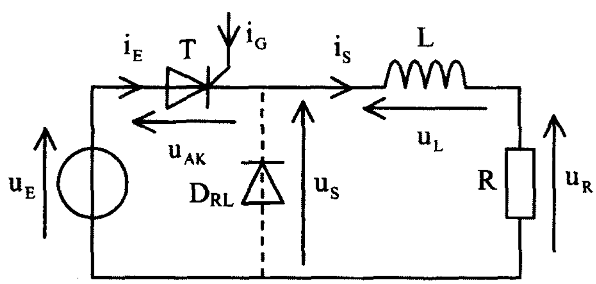


Рис. 32.1. Однополупериодное выпрямление с разрядным диодом или без него

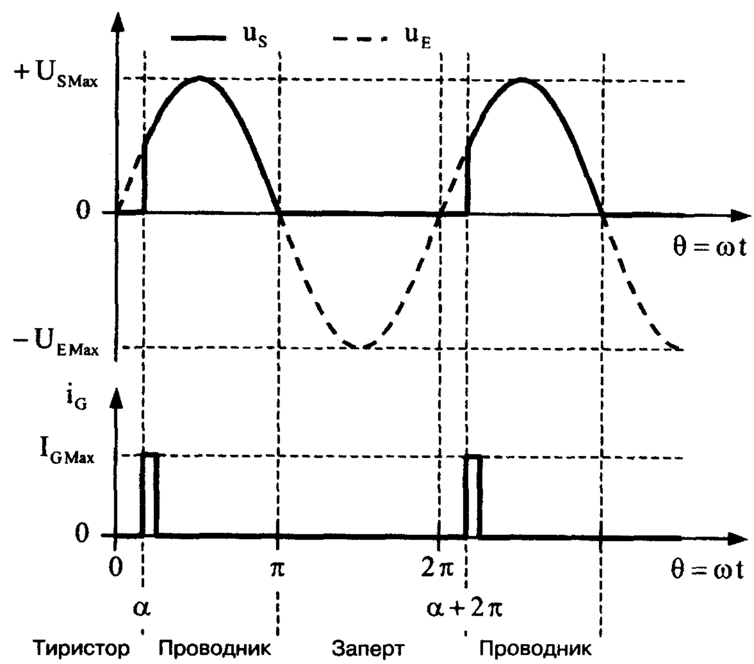


Рис. 32.2. Диаграмма в функции времени при резистивной нагрузке

Вопрос. Дать выражение среднего и действующего значений напряжения u_S. Вывести отсюда выражение коэффициента формы.

Ответ.

$$U_{S\,ср} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi} U_{S\,Max}\sin\theta d\theta,$$

откуда:

$$U_{S\,cp} = \frac{U_{S\,Max}}{2\pi}(1 + \cos\alpha).$$

$$U_S^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi} U_{S\,Max}^2 \sin^2\theta d\theta,$$

откуда:

$$U_S = \frac{U_{S\,Max}}{2}\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}.$$

$$F = \frac{U_S}{|U_{S\,cp}|} = \frac{\pi}{1 + \cos\alpha}\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}.$$

б) Индуктивная нагрузка (рис. 32.1 при L = 0 и без D_{RL}, рис. 32.2)

Наличие индуктивности проявляется запаздыванием выходного тока i_S по отношению к напряжению u_S. Поэтому тиристор сохраняет проводимость, пока проходящий через него ток остается положительным. Поэтому напряжение u_S становится отрицательным от $\pi \pm 2k\pi$ до $\psi \pm 2k\pi$. Затем, как только ток в тиристоре становится равным нулю, тиристор запирается, и выходное напряжение также становится равным нулю.

Примечания.

- Между $\pi \pm 2k\pi$ до $\psi \pm 2k\pi$ мощность $p_S = u_S i_S$ отрицательна. Накопленная ранее в индуктивности энергия передается в источник питания переменного тока.
- Ток в нагрузке прерывистый. Чем выше длительность состояния проводимости, тем меньше значение среднего тока. Из-за этого недостатка данная схема бесполезна.
- Точнее, тиристор запирается, когда проходящий по нему ток становится меньше его тока удержания, обозначаемого I_H (см. гл. 19).

32.1.2. Выпрямитель с разрядным диодом

Чтобы сделать ток в нагрузке непрерывным, параллельно нагрузке включают разрядный диод D_{RL} (рис. 32.3 и 32.4). Этот диод продляет прохождение тока i_S (отсутствие разрыва тока в индуктивности), когда напряжение становится отрицательным и, следовательно, позволит запереть тиристор. Во время проводимости разрядного диода D_{RL} индуктивность отдает ранее накопленную электромагнитную энергию сопротивлению. В питающую сеть переменного тока никакой энергии не передается. Проводимость тока в нагрузке прерывистая.

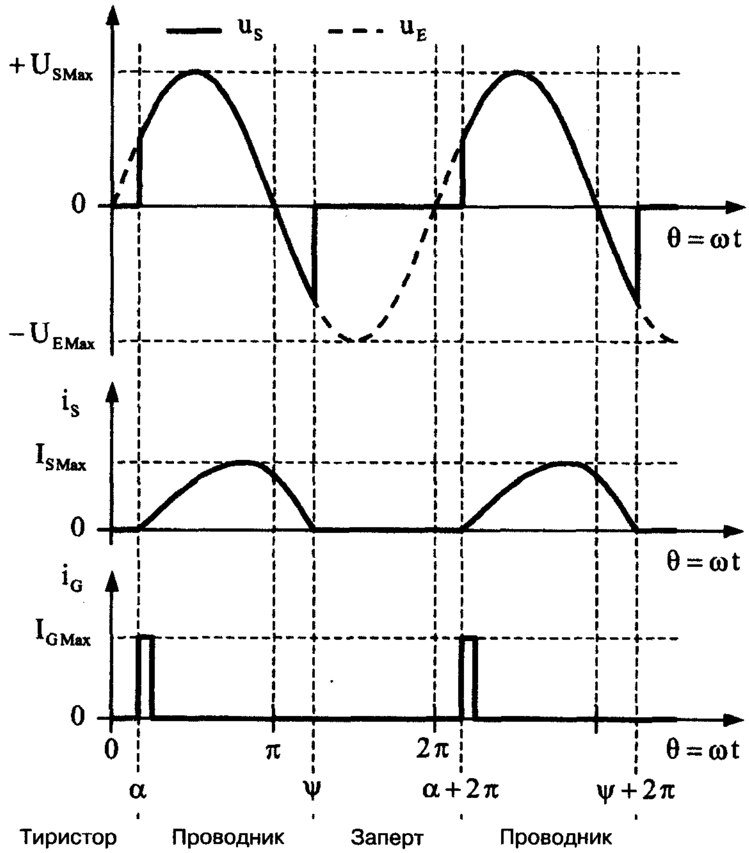


Рис. 32.3. Однополупериодное выпрямление с индуктивной нагрузкой. Проводимость прерывистая

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения u_S. Из него получить действующее значение тока i_S при очень большой постоянной времени $\tau = L/R$ по сравнению с периодом T тока i_S.

Ответ. Вид кривой u_S идентичен полученной ранее кривой для однофазного однополупериодного выпрямления с резистивной нагрузкой (см. § 32.1.1, а). Откуда:

$$U_{S\,\text{ср}} = \frac{U_{S\,Max}}{2\pi}(1 + \cos\alpha).$$

По закону контуров: $u_S = u_L + u_R \Rightarrow U_{S\,\text{ср}} = U_{L\,\text{ср}} + U_{R\,\text{ср}}$, откуда:

$$I_{S\,\text{ср}} = \frac{U_{S\,\text{ср}}}{R} = \frac{U_{R\,\text{ср}}}{R} = \frac{U_{RMax}}{R}(1 + \cos\alpha),\ \text{так как } U_{L\,\text{ср}} = 0.$$

Если $\tau = L/R \gg T$, то ток почти постоянный и $I_S \approx I_{S\,\text{ср}}$.

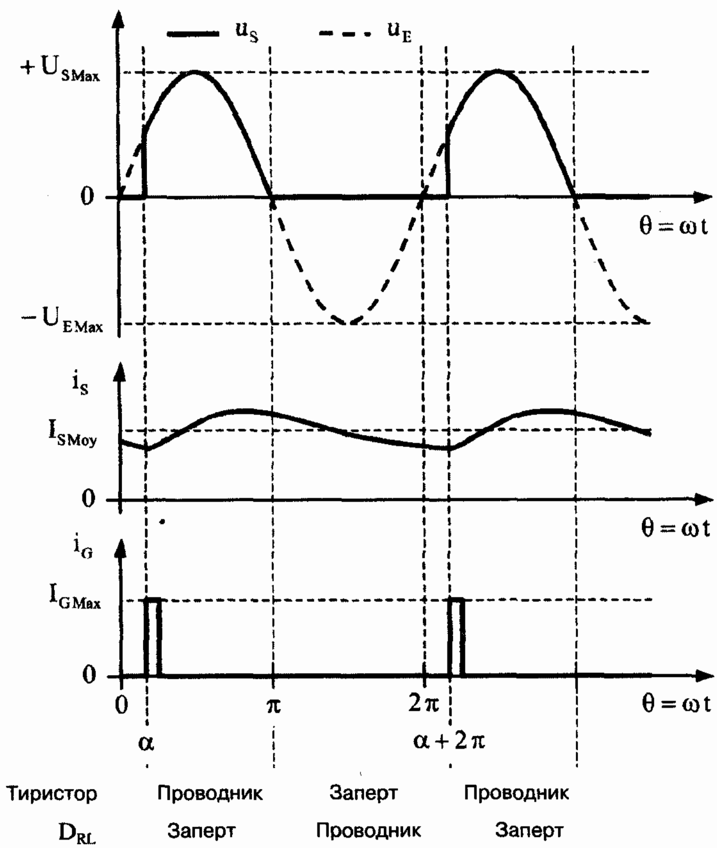


Рис. 32.4. Непрерывность тока в схеме однополупериодного выпрямления с индуктивной нагрузкой и разрядным диодом

32.2. Однофазное двухполупериодное выпрямление

Существует три типа однофазных двухполупериодных выпрямителей: симметричный мост Граэтца с четырьмя тиристорами; смешанный мост Граэтца с двумя тиристорами и двумя диодами; схема со средней точкой (здесь не рассматривается) с двумя тиристорами, требующая наличия трансформатора со средней точкой.

32.2.1. Симметричный мост без разрядного диода

Такая схема (рис. 32.5) работает как выпрямитель тока или при некоторых условиях как зависимый инвертор. Входное напряжение запишется в виде:

$$u_E = U_{E\,Max} \sin\theta, \quad \text{где} \quad \theta = \omega t \quad \text{и} \quad \omega T = 2\pi.$$

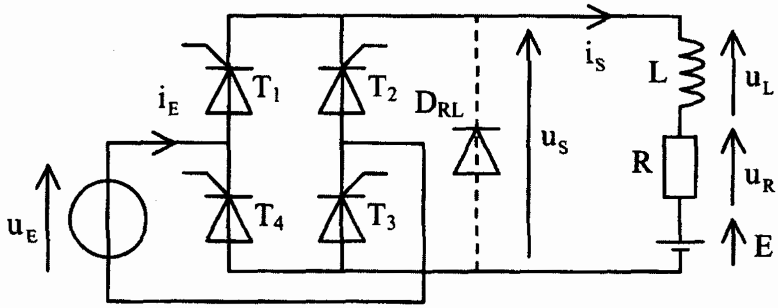


Рис. 32.5. Однофазное двухполупериодное выпрямление в симметричной мостовой схеме с разрядным сопротивлением или без него

а) Резистивная нагрузка (рис. 32.5 при $L = 0$, без D_{RL} и рис. 32.6)

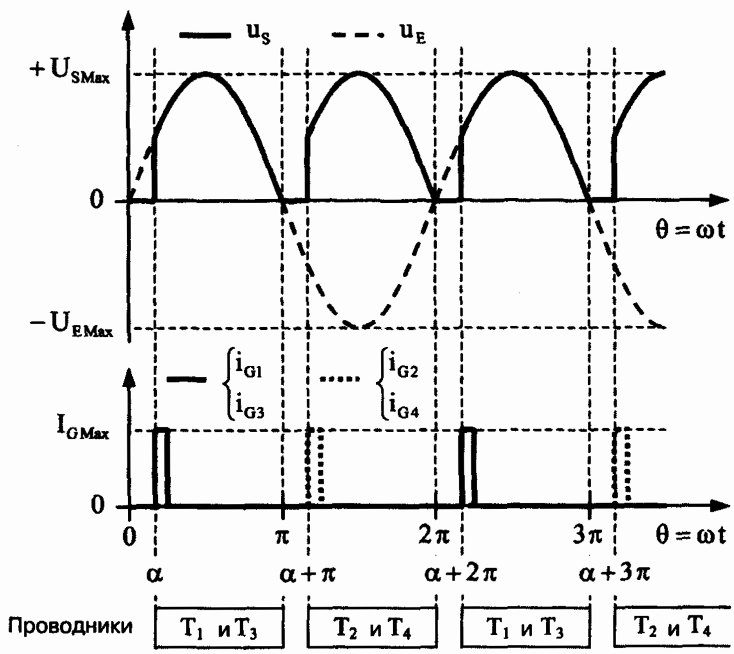


Рис. 32.6. Симметричный мост двухполупериодного выпрямления с резистивной нагрузкой (напряжение u_S идентично выделяющемуся на RLE с D_{RL}, см. § 32.2.2)

Устройство работает как выпрямитель тока. Мост проводит от α до π. Напряжение на зажимах R определяется как $u_S = |U_{S\,Max} \sin\theta|$ при $\alpha \pm 2k\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \pm 2k\pi$ и $u_S = 0$ вне этих значений угла управления. Здесь $u_S = Ri_S$

и $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$ (тиристор идеальный). Период напряжения u_S равен половине периода u_E.

Вопрос. Дать выражения среднего и действующего значений напряжения u_S. Отсюда получить выражение коэффициента формы.

Ответ.

$$U_{S\,cp} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\pi} U_{S\,Max}\sin\theta d\theta,$$

откуда:

$$U_{S\,cp} = \frac{U_{S\,Max}}{2\pi}(1+\cos\alpha).$$

$$U_S^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\pi} U_{S\,Max}^2\sin^2\theta d\theta,$$

откуда:

$$U_S = \frac{U_{S\,Max}}{2}\sqrt{1-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}.$$

$$F = \frac{U_S}{|U_{S\,cp}|} = \frac{\pi}{\sqrt{2}(1+\cos\alpha)}\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\pi}+\frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}.$$

б) Резистивная нагрузка с ЭДС (рис. 32.5 при L = 0, без D_{RL}, рис. 32.7)

Полагаем $E > 0$. Напряжение на зажимах нагрузки $u_S = |U_{S\,Max}\sin\theta|$, где $u_S = E + Ri_S$ и $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$ (идеальный тиристор) при $\alpha \pm k\pi \leqslant \theta \leqslant \leqslant \psi \pm k\pi$ и $u_S = E$ вне этих значений угла θ.

Отсюда: $i_S = \frac{|U_{S\,Max}\sin\theta| - E}{R}$ при $\alpha \pm k\pi \leqslant \theta \leqslant \psi \pm k\pi$ и $i_S = 0$ вне этих значений θ.

Вопрос. Дать выражения среднего значения напряжения u_S для $E > 0$. Отсюда вывести выражение среднего значения тока i_S.

Ответ.

$$U_{S\,cp} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\psi} U_{S\,Max}\sin\theta d\theta + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\psi}^{\alpha+\pi} E d\theta,$$

откуда:

$$U_{S\,cp} = \frac{2U_{S\,Max}}{\pi}(\cos\alpha - \cos\psi) + \frac{E}{\pi}(\alpha+\pi-\psi).$$

$$u_S = E + Ri_S,$$

откуда: $I_{S\,cp} = \frac{U_{S\,cp} - E}{R}$.

Примечание. Проводимость тока прерывистая (при $E > 0$). Поскольку ток может быть только положительным, из соотношения $i_S = (u_S - E)/R = 0$ следует:

– угол запирания тиристоров $\psi = \pi - \arcsin(E/U_{E\,Max})$;

– предельный угол открывания тиристоров $\alpha_{Lim} = \arcsin(E/U_{Max})$.

При $E < 0$ проводимость может быть как непрерывной, так и прерывистой.

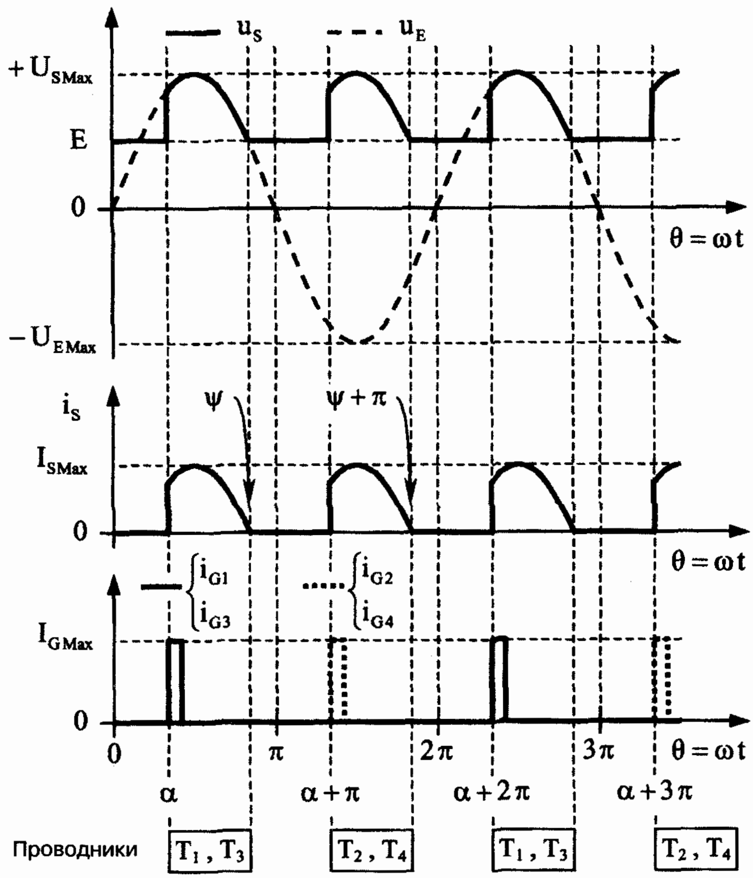


Рис. 32.7. Симметричный мост двухполупериодного выпрямления с резистивной нагрузкой и ЭДС $E > 0$

в) Индуктивная нагрузка с ЭДС (рис. 32.5 без D_{RL})

Проявлением наличия индуктивности является запаздывание тока i_S от напряжения u_S. Таким образом, тиристор сохраняет проводимость, если ток остается положительным. Поэтому напряжение u_S становится временно отрицательным для $\theta > \pi \pm k\pi$ (см. рис. 32.8 и 32.9). Возможны два случая:

– Пусть ток в T_1 и T_3 (или T_2 и T_4) не спадает до нуля, и они остаются проводниками: в этом случае ток в нагрузке непрерывный.

– Пусть ток в T_1 и T_3 (или T_2 и T_4) спадает до нуля, и они запираются: в этом случае ток в нагрузке прерывистый.

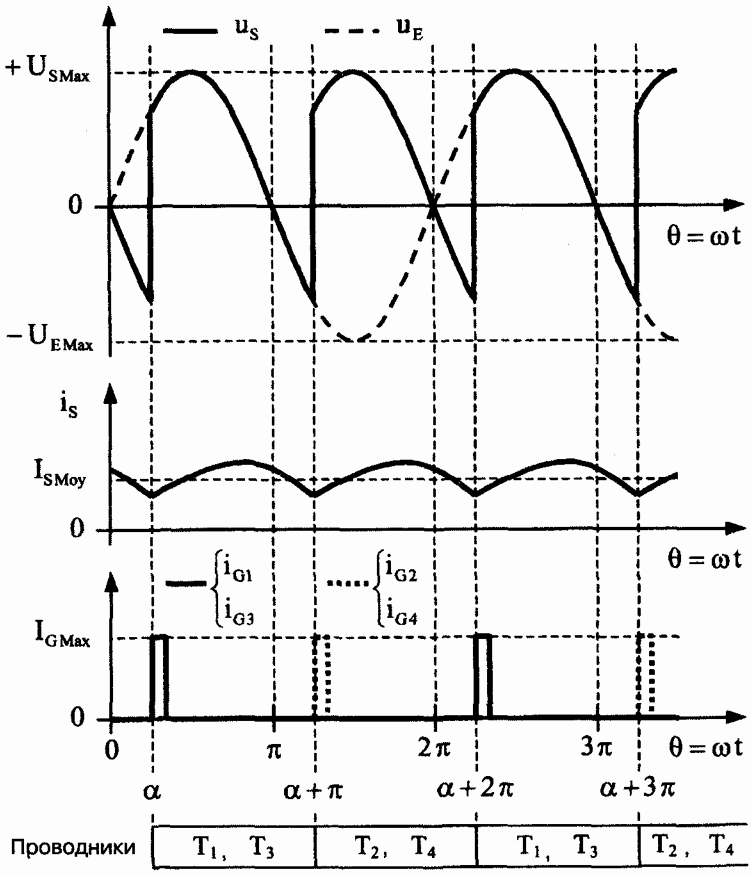


Рис. 32.8. Симметричная мостовая схема с индуктивной нагрузкой и ЭДС. Непрерывный ток в режиме управляемого выпрямителя

Покажем, что ток в нагрузке непрерывный при $\sin(\varphi - \alpha) \geqslant K$ и прерывистый в противном случае. Здесь:

$$K = \frac{E\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}{U_{S\,Max}} \frac{1 - e^{-\pi/\operatorname{tg}\varphi}}{1 + e^{-\pi/\operatorname{tg}\varphi}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\varphi = L\omega/R \quad (0 < \varphi < \pi/2).$$

Примечание. Ток i_S может быть только положительным или равным нулю (определяется направлением проводимости тиристоров). Если ЭДС E положительна (потребитель), преобразователь работает в режиме управляемого выпрямителя. Если ЭДС E отрицательна (генератор), преобразователь работает либо в режиме выпрямителя, либо в режиме зависимого инвертора.

При непрерывном токе в нагрузке (рис. 32.8) для $\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha + \pi$ имеем:

$$i_S = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\sin(\theta-\varphi) - \frac{E}{R} + \frac{2U_{S\,Max}}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\sin(\varphi-\alpha)\frac{e^{-(\theta-\alpha)/\operatorname{tg}\varphi}}{1-e^{-\pi/\operatorname{tg}\varphi}}.$$

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения u_S. Вывести с его использованием выражение среднего значения тока i_S, затем действующего значения тока i_S при очень большой постоянной времени $\tau = \frac{L}{R}$ по сравнению с периодом T тока i_S.

Ответ.

$$U_{S\,ср} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\pi} U_{S\,Max}\sin\theta d\theta, \text{ откуда: } U_{S\,ср} = \frac{2U_{S\,Max}}{\pi}\cos\alpha.$$

Из закона контуров: $u_S = u_L + u_R + E \Rightarrow U_{S\,ср} = U_{L\,ср} + U_{R\,ср} + E$, откуда среднее значение тока $I_{S\,ср}$ ($I_{S\,Moy}$ на рис. 32.8) определится как

$$I_{S\,ср} = \frac{U_{S\,ср} - E}{R} = \frac{2U_{S\,Max}\cos\alpha}{\pi R} - \frac{E}{R}, \text{ так как } U_{L\,ср} = 0.$$

Если $\tau = L/R$, то ток будет квазипостоянным и $I_S \approx I_{S\,ср}$.

При прерывистом токе в нагрузке (рис. 32.9) для $\alpha \leqslant \theta \leqslant \psi$ имеем:

$$i_S = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\sin(\theta-\varphi) - \frac{E}{R} + \left(\frac{-U_{S\,Max}}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\sin(\alpha-\varphi) + \frac{E}{R}\right)e^{-(\theta-\alpha)/\operatorname{tg}\varphi}.$$

Угол запирания тиристора определяется из условия $i_S(\psi) = 0$.

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения u_S. Вывести с его использованием выражение среднего тока i_S.

Ответ.

$$U_{S\,ср} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\psi} U_{S\,Max}\sin\theta d\theta + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\psi}^{\alpha+\pi} E d\theta,$$

откуда:

$$U_{S\,ср} = \frac{2U_{S\,Max}}{\pi}(\cos\alpha - \cos\psi) + \frac{E}{\pi}(\alpha+\pi-\psi).$$

Из закона контуров:

$$u_S = u_L + u_R + E \Rightarrow U_{S\,ср} = U_{L\,ср} + U_{R\,ср} + E = E + Ri_S,$$

откуда:

$$I_{S\,ср} = \frac{U_{S\,ср} - E}{R}, \text{ так как } U_{L\,ср} = 0.$$

Передаваемая при непрерывных токах средняя (или активная) мощность составит:

$$P_{S\,cp} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\pi} u_S i_S d\theta.$$

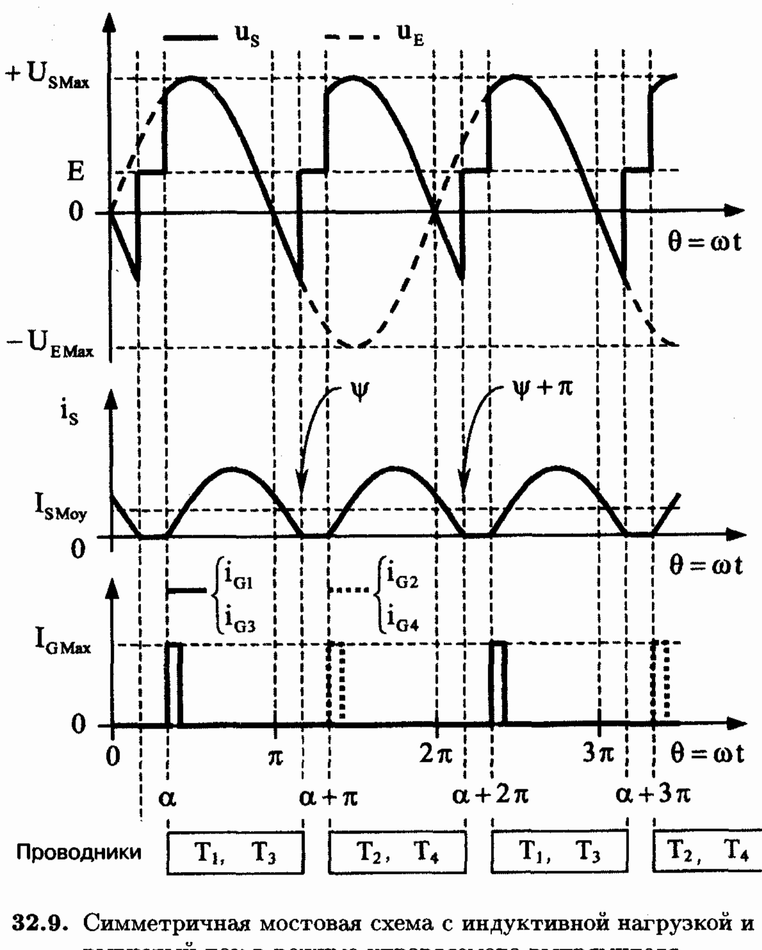


Рис. 32.9. Симметричная мостовая схема с индуктивной нагрузкой и ЭДС. Прерывистый ток в режиме управляемого выпрямителя

При непрерывном токе в нагрузке, полагая $i_S = I_{S0} = \text{const}$ (предполагается $L/R \gg T$), передаваемая в нагрузку мощность запишется как:

$$P_{S\,cp} = \frac{I_{S0}}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\pi} U_{S\,Max}\sin\theta d\theta,$$

откуда:

$$P_{S\,cp} = U_{S\,cp} I_{S0} = \frac{2U_{S\,Max} I_{S0}}{\pi}\cos\alpha.$$

Различают два случая:

- При $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ нагрузка получает ($P_{S\,cp} > 0$) в режиме управляемого выпрямителя (см. рис. 32.8 и 32.9).
- При $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ со стороны нагрузки выдается мощность $-P_{S\,cp}$ в источник переменного тока ($P_{S\,cp} < 0$) в режиме зависимого инвертора (см. рис. 32.10), если $E < 0$.

Примечание. Если $E \geqslant 0$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$, преобразователь работает как управляемый выпрямитель (генератора в цепи нагрузки нет), i_S прерывистый.

При работе преобразователя в режиме зависимого инвертора графики изменения переменных в функции времени приведены на рис. 32.10, (как, например, в схеме на рис. 32.5). Имеется в виду зависимость его от источника переменного тока. Условиями инверторного режима являются:

1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ при прерывистом токе.
2) Нагрузку питает генератор. Следовательно, с учетом показанных направлений на рис. 32.5 ЭДС E должна быть отрицательной.
3) Никакой разрядный диод не подключается на нагрузку.
4) Источник переменного напряжения u_E питает индуктивность реактивной мощностью и обеспечивает коммутацию тиристоров.

Примечание. В режиме зависимого инвертора ток в нагрузке может быть и прерывистым. Тогда граница между режимами выпрямителя и инвертора больше $\pi/2$.

• ***Предосторожности при работе в режиме зависимого инвертора.*** Тиристор запирается только при отрицательном напряжении между анодом и катодом u_{AK} за время бóльшее собственного времени запирания. Открыться он может только при положительном напряжении u_{AK}. Следовательно (см. рис. 32.10), угол управления должен быть ограничен максимальным значением $\alpha_{Max} < \pi$; значение $\gamma = \pi - \alpha_{Max}$ называется углом сохранения (около 15°).

• ***Использование при рекуперативном торможении двигателя постоянного тока.*** При наличии только одной мостовой схемы (выпрямитель/зависимый инвертор) можно инвертировать только направление напряжения u_S и, следовательно, она не позволяет двигателю переходить работать в режим генератора. Если для перехода двигателя в режим генератора быстродействие не нужно, то можно использовать только одну мостовую схему, а такой переход будет обеспечен изменением направления тока возбуждения. В противном случае необходимо иметь два встречно направленных мостовых преобразователя. Они позволят иметь полную реверсивность: два направления вращения в режиме как двигателя, так и генератора.

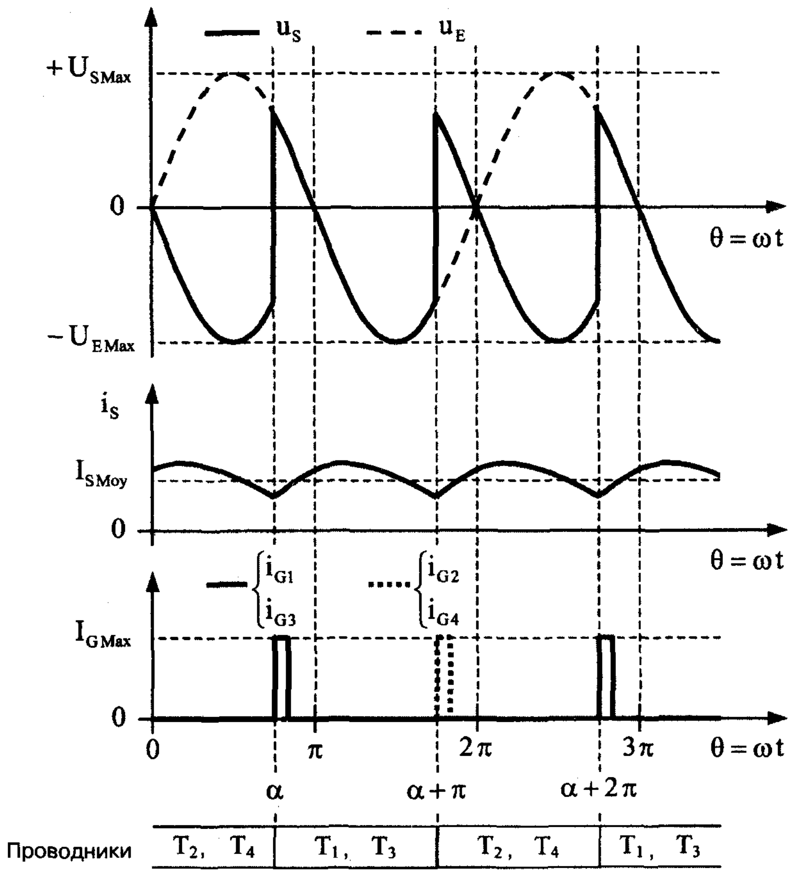


Рис. 32.10. Симметричная мостовая схема в режиме зависимого инвертора при $E < 0$

32.2.2. Симметричная мостовая схема с разрядным диодом

Схема на рис. 32.5 с разрядным диодом работает в режиме управляемого выпрямителя, но не может работать в режиме зависимого инвертора. При наличии разрядного диода D_{RL}, как только напряжение u_S на зажимах нагрузки становится отрицательным, диод D_{RL} становится проводящим, что приводит к запиранию тиристора. Напряжение u_S в этом случае сходно получаемым в симметричной мостовой схеме без D_{RL}, но с резистивной нагрузкой (см. рис. 32.6). Ток может быть как прерывистым, так и непрерывным. Получим:

$$U_{S\,cp} = \frac{U_{S\,Max}}{2\pi}(1+\cos\alpha); \quad I_{S\,cp} = \frac{U_{Scp} - E}{R}.$$

32.2.3. Смешанные мостовые схемы

Работа схемы рис. 32.11, называемой несимметричным смешанным мостом, идентична работе симметричной мостовой схемы с разрядным диодом (см. § 32.2.2).

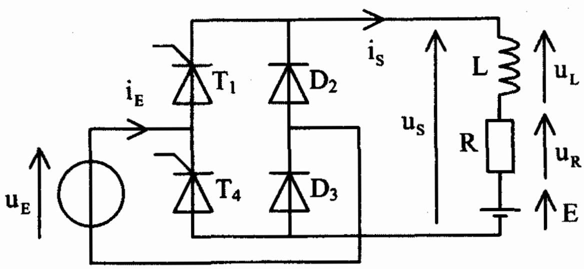


Рис. 32.11. Однофазная двухполупериодная смешанная мостовая схема с индуктивной нагрузкой и ЭДС

Примечание. Существует другая симметричная смешанная мостовая схема. Она получается заменой на рис. 32.5 тиристоров T_3 и T_4 диодами D_3 и D_4. Выражение среднего значения напряжения u_S идентично выражению для смешанных симметричных и несимметричных мостовых схем. В случае отказа управления тиристорами симметричный мостовой выпрямитель может перейти в режим однополупериодного выпрямления. Для устранения такого явления в схему вводится разрядный диод или используется несимметричный смешанный мост.

32.3. Трехфазное однополупериодное выпрямление

Схема на рис. 32.12 выпрямляет ток, проходящий межу фазами и нейтралью. Входные фазные напряжения v_{1N}, v_{2N}, v_{3N} запишутся в виде:

$$v_{1N} = V_{Max}\cos\theta, \quad v_{2N} = V_{Max}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right), \quad v_{1N} = V_{Max}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right),$$

где $\theta = \omega t - \pi/2$ и $\omega T = 2\pi$.

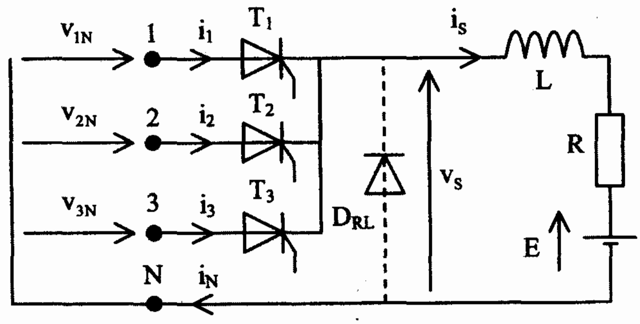
32.3.1. Выпрямитель без разрядного диода

а) Резистивная нагрузка (рис. 32.12 с L= 0, без D_{RL})

Отсчитывая угол управления α от значения ωt, при котором диод переходит в проводящее состояние в схеме неуправляемого трехфазного однополупериодного выпрямления (см. гл. 31)., т. е. $\omega t = \pi/6$ или $\theta = -\pi/3$, получим:

– Непрерывный ток i_S (см. рис. 32.13) будет при $0 < \alpha \leqslant \pi/6$.
– Прерывистый ток i_S (см. рис. 32.13) будет при $\pi/6 \leqslant \alpha < 5\pi/6$.

Рис. 32.12. Трехфазное однополупериодное выпрямление



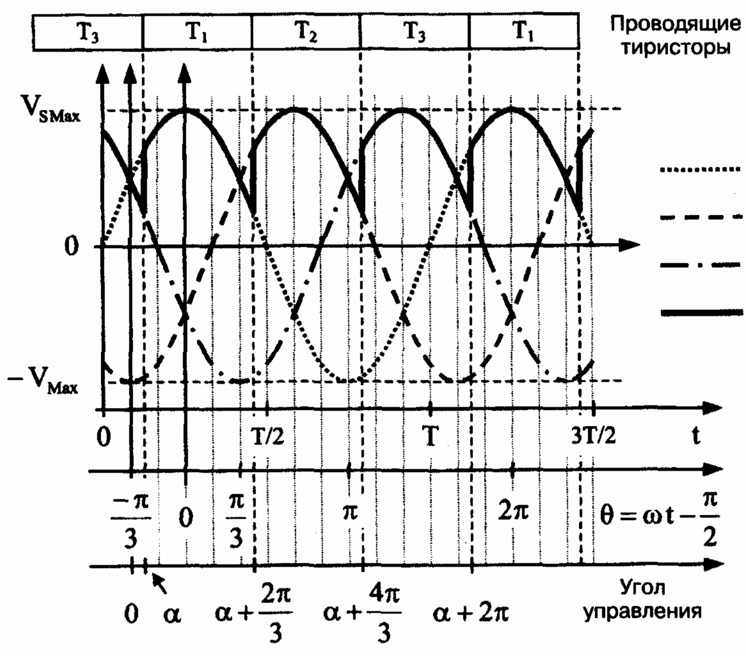


Рис. 32.13. Трехфазное однополупериодное выпрямление с резистивной нагрузкой $0 < \alpha \leqslant \pi/6$. (Напряжение u_S идентично случаю RLE нагрузки с D_{RL}, см. § 32.3.2)

Напряжением v_S на зажимах нагрузки будет наибольшее из фазных напряжений, когда проводит соответствующий тиристор, причем $v_S = Ri_S$ и $V_{S\,Max} = V_{Max}$ (тиристор идеален). Период напряжения v_S равен трети периода напряжения v_{1N}. Разрядный диод не играет никакой роли при чисто резистивной нагрузке.

Первый случай: $0 < \alpha \leqslant \pi/6$ (рис. 32.13).

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения v_S. Ток i_S непрерывен.

Ответ.

$$V_{S\,cp} = \frac{3}{2\pi}\int_{-\pi/3}^{\pi/3+\alpha} V_{S\,Max}\cos\theta d\theta, \quad \text{откуда:} \quad V_{S\,cp} = \frac{3\sqrt{3}V_{S\,Max}}{2\pi}\cos\alpha.$$

Второй случай: $\pi/6 \leqslant \alpha < 5\pi/6$.

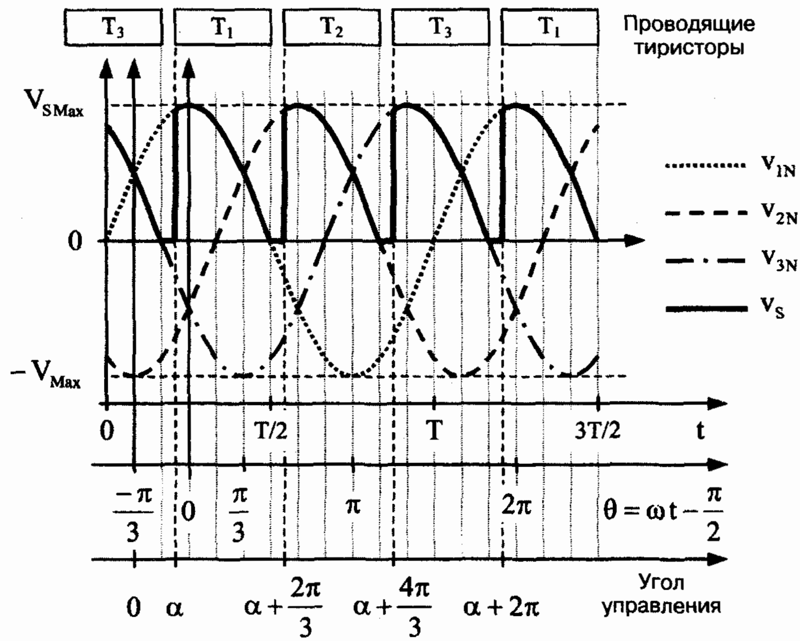


Рис. 32.14. Трехфазное однополупериодное выпрямление с резистивной нагрузкой $\pi/6 \leqslant \alpha < 5\pi/6$. (Напряжение u_S идентично случаю RLE нагрузки с D_{RL}, см. § 32.3.2)

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения v_S. Ток i_S прерывистый.

Ответ.

$$V_{S\,cp} = \frac{3}{2\pi}\int_{-\pi/3+\alpha}^{\pi/2} V_{S\,Max}\cos\theta d\theta,$$

откуда:

$$V_{S\,cp} = \frac{3V_{S\,Max}}{2\pi}(1+\cos(\alpha+\pi/6)).$$

Особый случай: проводимость одного из двух полупериодов.

В трехфазных системах полуволны наслаиваются. При $-\pi/6 < \alpha < 0$

это вызывает проводимость одной из двух полуволн, что обычно нежелательно.

Действительно, при $-\pi/6 < \alpha < 0$, если проводит T_1, то T_2 не может открыться, так как $u_{AK(T_2)} = u_2 - u_1 < 0$. А тиристор T_3 может открыться и т. д. Это приводит к циклу проводящих тиристоров $T_1 \to T_3 \to T_2 \to T_1 \to \ldots$ Эта проблема возникает при индуктивной нагрузке.

б) Индуктивная нагрузка с ЭДС (рис. 32.12 без D_{RL})

Без разрядного диода D_{RL} ток в нагрузке может быть как прерывистым, так и непрерывным, преобразователь может работать как в режиме выпрямителя, *так и в режиме зависимого инвертора как в случае однофазного* двухполупериодного управляемого выпрямления (см. § 32.2). Для упрощения здесь рассматривается только случай непрерывного тока i_S. Имеем:

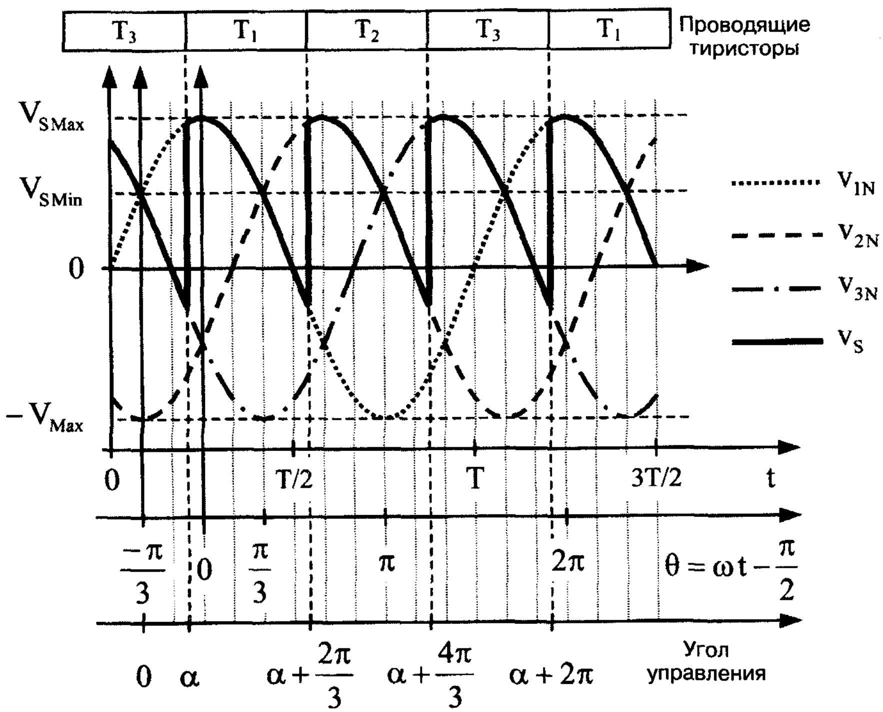


Рис. 32.15. Трехфазная однополупериодная схема с индуктивной нагрузкой. Управляемый выпрямитель с непрерывным током

- Работа в режиме управляемого выпрямителя (см. рис. 32.15) при $0 < \alpha \leqslant \pi/2$.
- Работа в режиме зависимого инвертора (см. рис. 32.16) при $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$, если $E < 0$.

При непрерывном токе i_S (режим выпрямителя или инвертора) получим:

$$V_{S\,cp} = \frac{3\sqrt{3}V_{S\,Max}}{2\pi}\cos\alpha.$$

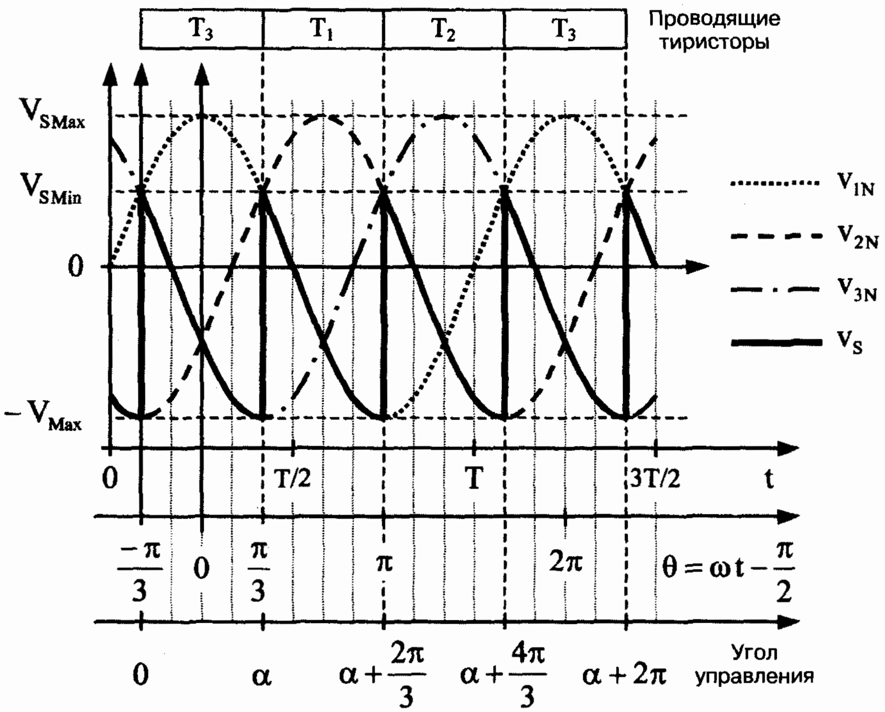


Рис. 32.16. Трехфазная однополупериодная схема с индуктивной нагрузкой. ЭДС $E < 0$. Зависимый инвертор с непрерывным током

Примечания.

- При $\alpha > \pi$ тиристоры не смогут открыться, так как напряжения между их анодами и катодами u_{AK} отрицательны. При уверенном открывании угол управления ограничивают максимальным значением $\alpha_{Max} = \pi - \gamma$, где γ — угол сохранения.
- Если $E \geqslant 0$ и $\pi/2 < \alpha < 5\pi/6$ преобразователь работает в режиме управляемого выпрямителя (генератора в цепи нагрузки нет); ток прерывистый.

32.3.2. Выпрямитель с разрядным диодом

Схема рис. 32.12 с разрядным диодом работает в режиме управляемого выпрямителя, но не в режиме зависимого инвертора. При наличии разрядного диода D_{RL}, как только напряжение v_S на зажимах нагрузки становится отрицательным, диод D_{RL} становится проводящим, что приводит к запиранию тиристора. Напряжение v_S в этом случае сходно с получаемым без D_{RL}, но с резистивной нагрузкой (см. рис. 32.13 при $0 < \alpha \leqslant \pi/6$ и рис. 32.14 при $\pi/6 < \alpha < 5\pi/6$). Формулы, определяющие $V_{S\,ср}$ при резистивной нагрузке, справедливы. В зависимости от ЭДС E ток в нагрузке может быть как прерывистым, так и непрерывным.

32.4. Трехфазное двухполупериодное выпрямление

32.4.1. Симметричный мост без разрядного сопротивления

Схема на рис. 32.17 без разрядного диода работает в режиме выпрямления линейных напряжений или, при определенных условиях, в режиме зависимого инвертора. Входные линейные напряжения запишутся в виде:

$$u_{12} = U_{Max} \cos\theta, \quad u_{23} = U_{Max} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right), \quad u_{31} = U_{Max} \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right),$$

где $\theta = \omega t - \pi/3$ и $\omega T = 2\pi$ (см. гл. 6).

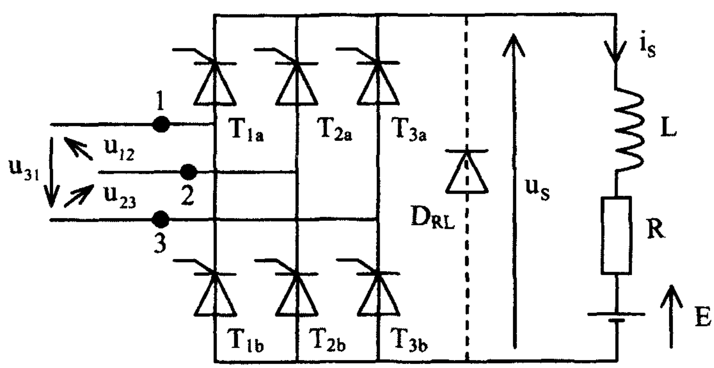


Рис. 32.17. Трехфазное двухполупериодное выпрямление в мостовой схеме с разрядным диодом или без него

а) Резистивная нагрузка (рис. 32.17 при $L = 0$, без D_{RL})

Отсчитывая угол управления α от значения ωt, при котором диод переходит в проводящее состояние в схеме неуправляемого трехфазного двухполупериодного выпрямления (см. гл. 31)., т.е. $\omega t = \pi/6$ или $\theta = -\pi/6$, получим:

- Непрерывный ток i_S (см. рис. 32.18) будет при $0 < \alpha \leqslant \pi/3$.
- Прерывистый ток i_S (см. рис. 32.19) будет при $\pi/3 \leqslant \alpha < 2\pi/3$.

Напряжение u_S на зажимах нагрузки — это наибольшее из линейных напряжений при проводимости соответствующих тиристоров, причем $u_S = Ri_S$ и $U_{S\,Max} = U_{Max}$ (идеальные тиристоры). Период напряжения u_S в шесть раз меньше периода напряжения u_{12}. Разрядный диод D_{RL} при чисто резистивной нагрузке не имеет никакого влияния.

Первый случай: $0 < \alpha \leqslant \pi/3$ (рис. 32.18).

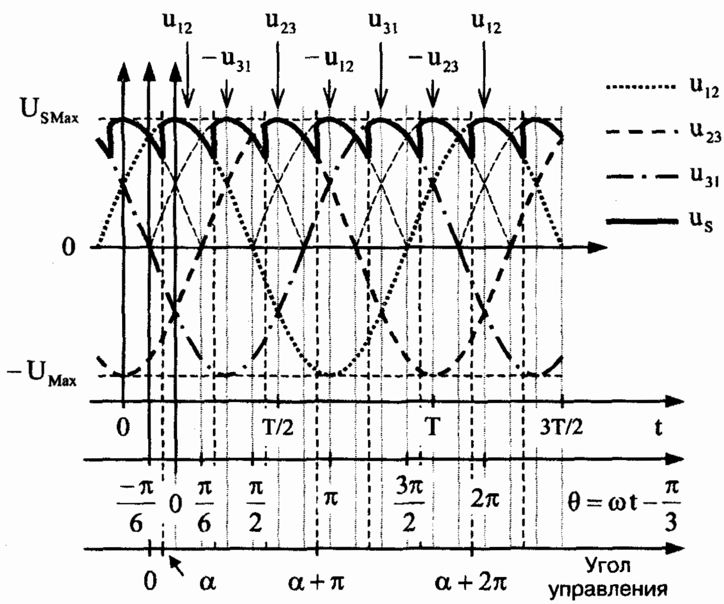


Рис. 32.18. Трехфазное двухполупериодное выпрямление с резистивной нагрузкой $0 < \alpha \leqslant \pi/3$. (Напряжение u_S идентично случаю RLE нагрузки с D_{RL}, см. §32.4.2)

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения u_S. Ток i_S непрерывный.

Ответ.

$$U_{S\,cp} = \frac{3}{\pi}\int_{-\pi/6+\alpha}^{\pi/6+\alpha} U_{S\,Max}\cos\theta d\theta, \quad \text{откуда:} \quad U_{S\,cp} = \frac{3U_{S\,Max}}{\pi}\cos\alpha.$$

Второй случай: $\pi/3 \leqslant \alpha < 2\pi/3$ (рис. 32.19).

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения u_S. Ток i_S прерывистый.

Ответ.

$$U_{S\,cp} = \frac{3}{\pi}\int_{-\pi/6+\alpha}^{\pi/6+\alpha} U_{S\,Max}\cos\theta d\theta, \quad \text{откуда:} \quad U_{S\,cp} = \frac{3V_{S\,Max}}{\pi}(1+\cos(\alpha+\pi/3)).$$

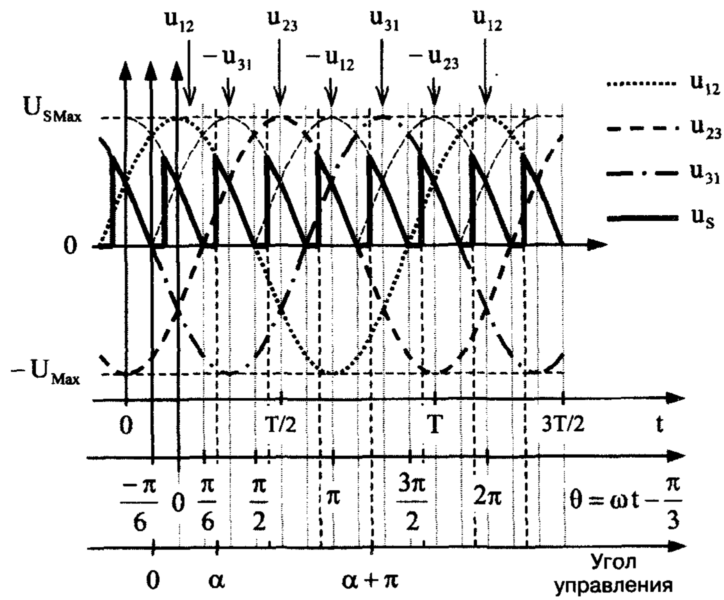


Рис. 32.19. Трехфазное двухполупериодное выпрямление с резистивной нагрузкой $\pi/3 \leqslant \alpha < 2\pi/3$. (Напряжение u_S идентично случаю RLE нагрузки с D_{RL}, см. § 32.4.2)

Особый случай: проводимость одного их двух полупериодов.

В трехфазных системах полуволны наслаиваются. При $-\pi/3 < \alpha < 0$ это вызывает проводимость одной из двух полуволн, что обычно нежелательно. Действительно, при $-\pi/6 < \alpha < 0$, если проводит T_1, T_2 не может открыться, так как $u_{AK(T_2)} = u_2 - u_1 < 0$. А тиристор T_3 может открыться и т. д. Это приводит к одному из двух циклов проводящих тиристоров T_{1a}, $T_{2b} \to T_{2a}$, $T_{3b} \to T_{3a}$, $T_{1b} \to T_{1a}$, $T_{2b} \to \ldots$ и т. д. или T_{1a}, $T_{3b} \to T_{2a}$, $T_{1b} \to T_{3a}$, $T_{2b} \to T_{1a}$, $T_{3b} \to \ldots$ и т. д. Эта проблема возникает при индуктивной нагрузке.

б) Индуктивная нагрузка с ЭДС (рис. 32.17 без D_{RL})

Для упрощения здесь рассматривается только случай непрерывного тока i_S. Без разрядного диода D_{RL} имеем:

- Работа в режиме управляемого выпрямителя (см. рис. 32.20) при $0 < \alpha \leqslant \pi/2$.
- Работа в режиме зависимого инвертора (см. рис. 32.21) при $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$, если $E < 0$.

Примечание. При $\alpha > \pi$ тиристоры могут открыться только при отрицательном напряжении u_{AK} между анодами и катодами. Для уверенного открывания угол управления ограничивают максимальным значением $\alpha_{Max} = \pi - \gamma$, где γ — угол сохранения.

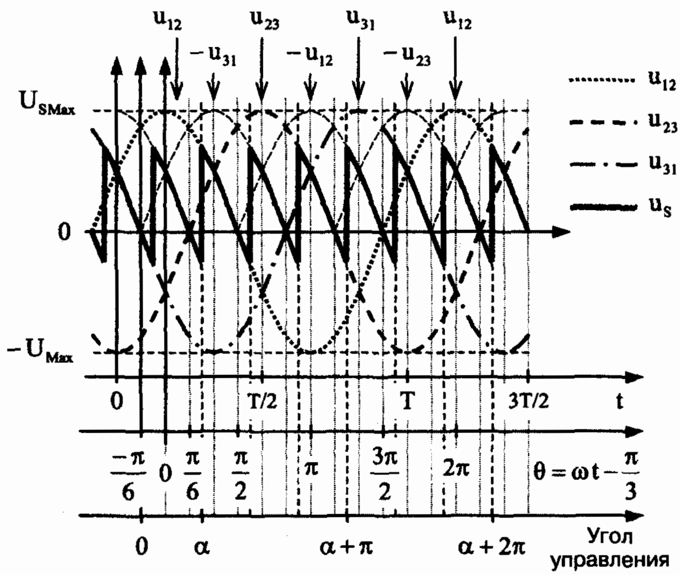


Рис. 32.20. Трехфазная двухполупериодная схема, индуктивная нагрузка и ЭДС в цепи нагрузки, режим выпрямителя

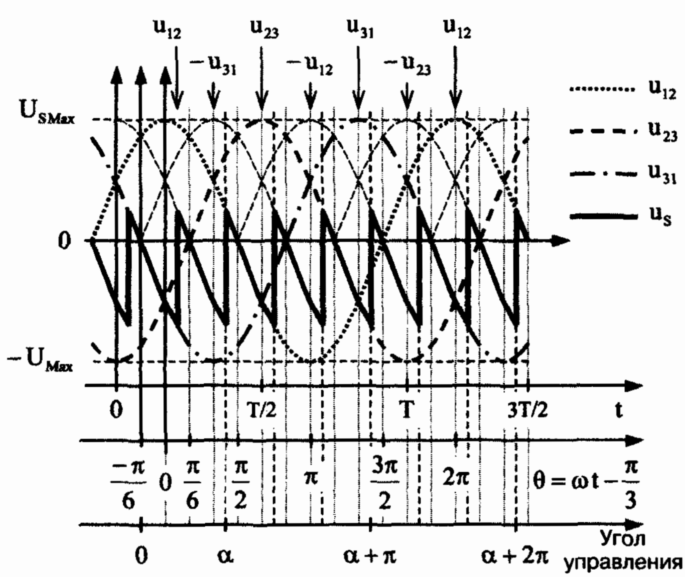


Рис. 32.21. Трехфазная двухполупериодная схема, индуктивная нагрузка, ЭДС $E < 0$ в цепи нагрузки, режим зависимого инвертора

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения u_S. Ток i_S непрерывный (режим выпрямителя или зависимого инвертора).
Ответ.

$$U_{S\,cp} = \frac{3}{\pi} \int\limits_{-\pi/6+\alpha}^{\pi/6+\alpha} U_{S\,Max} \cos\theta d\theta, \quad \text{откуда:} \quad U_{S\,cp} = \frac{3U_{S\,Max}}{\pi} \cos\alpha.$$

32.4.2. Симметричный мост с разрядным диодом

Схема рис. 32.17 с разрядным диодом работает в режиме управляемого выпрямителя, но не в режиме зависимого инвертора. При наличии разрядного диода D_{RL} как только напряжение u_S на зажимах нагрузки стремится стать отрицательным, наступает проводящее состояние диода D_{RL}, что запирает тиристор. Напряжение u_S подобно полученному в схеме с резистивной нагрузкой без D_{RL} (см. рис. 32.18 при $0 < \alpha \leqslant \pi/3$ и рис. 32.19 при $\pi/3 \leqslant \alpha < \pi/2$); формулы, определяющие $U_{S\,cp}$ при резистивной нагрузке остаются справедливыми. Ток на нагрузке может быть как непрерывным, так и прерывистым в зависимости от ЭДС E.

32.4.3. Смешанный мост

Он получается заменой тиристоров T_{1b}, T_{2b} и T_{3b} в симметричной мостовой схеме (см. рис. 32.17) диодами D_{1b}, D_{2b} и D_{3b}. В зависимости от значения α различают два случая (рис. 32.22 и 32.23).

а) Первый случай: $0 < \alpha \leqslant \pi/3$ (рис. 32.22)

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения u_S.
Ответ.

$$U_{S\,cp} = \frac{3U_{S\,Max}}{2\pi} \left(\int\limits_{-\pi/6+\alpha}^{\pi/6} \cos\theta d\theta + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2+\alpha} \cos(\theta - \pi/3) d\theta \right),$$

откуда:

$$U_{S\,cp} = \frac{3U_{S\,Max}}{2\pi}(1 + \cos\alpha).$$

б) Второй случай: $\pi/3 \leqslant \alpha < \pi$ (рис. 32.23)

Вопрос. Дать выражение среднего значения напряжения u_S.
Ответ.

$$U_{S\,cp} = \frac{3U_{S\,Max}}{2\pi} \left(\int\limits_{-\pi/6+\alpha}^{5\pi/6} \cos(\theta - \pi/3) d\theta \right),$$

откуда: $\quad U_{S\,cp} = \dfrac{3U_{S\,Max}}{2\pi}(1 + \cos\alpha).$

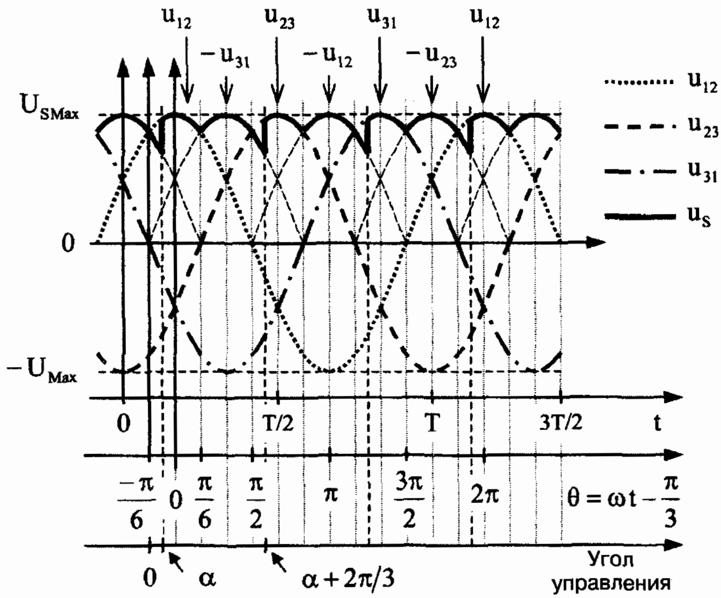


Рис. 32.22. Трехфазное двухполупериодное выпрямление в схеме смешанного моста $0 < \alpha \leqslant \pi/3$

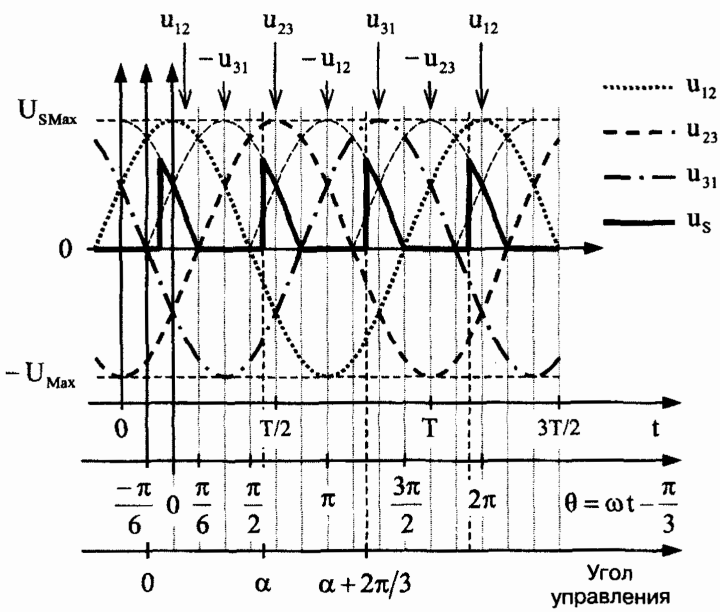


Рис. 32.23. Трехфазное двухполупериодное выпрямление в схеме смешанного моста $\pi/3 \leqslant \alpha < \pi$

32.5. Коэффициент мощности выпрямителя

Коэффициент мощности на входе выпрямителя f_{PE} — это отношение активной (или средней) входной мощности P_E к полной входной мощности S_E.

Вопрос. Привести выражение коэффициента мощности на входе симметричного тиристорного моста однофазного двухполупериодного выпрямления на резистивную нагрузку (см. § 32.2.1, а).

Ответ. С одной стороны $P_E = P_S$ (нет потерь) и $u_S = Ri_S$, откуда:

$$P_E = \quad P_S = \frac{U_S^2}{R} = \frac{U_{S\,Max}^2}{2R}\left(1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}\right)$$

(см. § 32.2.1, а).

С другой стороны $i_E = i_S = u_S/R$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $i_E = -i_S = -u_S/R$ при $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Следовательно, $I_E = I_S = U_S/R$, откуда:

$$S_E = U_E I_E = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{2}}\frac{U_S}{R}, \text{ так как } U_{E\,Max} = U_{S\,Max}.$$

Или:

$$S_E = \frac{U_{S\,Max}^2}{2R}\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}.$$

Окончательно:

$$f_{PE} = \frac{P_E}{S_E} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}.$$

Если $\alpha = 0$ (неуправляемое выпрямление), то $f_{PE} = 1$.

Вопрос. Привести выражение коэффициента мощности на входе симметричного тиристорного моста однофазного двухполупериодного выпрямления на индуктивную нагрузку, полагая выходной ток постоянным $i_S = I_S$ (см. § 32.2.1).

Ответ. С одной стороны $P_E = P_S$ (нет потерь) и $I_S = \text{const}$, откуда:

$$P_E = P_S = U_{S\,cp} I_S = \frac{2U_{S\,Max} I_S}{\pi}\cos\alpha$$

(см. § 32.2.1).

С другой стороны $i_E = I_S$ при $\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha + \pi$ и $i_E = -I_S$ при $\alpha + \pi \leqslant \leqslant \theta \leqslant \alpha + 2\pi$. Следовательно, $I_E = I_S$, откуда:

$$S_E = U_E I_E = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{2}} I_S, \text{ так как } U_{E\,Max} = U_{S\,Max}.$$

Окончательно:

$$f_{PE} = \frac{P_E}{S_E} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left|\cos\alpha\right|.$$

Если $\alpha = 0$ (неуправляемое выпрямление), то $f_{PE} = 2\sqrt{2}/\pi \approx 0{,}900$.

В табл. 32.1 обобщены значения коэффициентов мощности на входе управляемых выпрямителей при постоянном выходном токе ($i_S = I_S$). Значения коэффициентов мощности неуправляемых выпрямителей получим, полагая угол управления $\alpha = 0$. Напомним, что полная мощность трехфазной цепи определяется как $S = 3VI = \sqrt{3}UI$.

Таблица 32.1. Коэффициент мощности при постоянном I_S T_S период выходного напряжения. T_E период входного напряжения

Однофазное однополупериодное		
С D_{RL}	$f_{PE} = \frac{1+\cos\alpha}{\pi\sqrt{1-\alpha/\pi}}$	$\frac{T_S}{T_E} = 1$
Однофазное двухполупериодное		
Симметричный мост без D_{RL}	$f_{PE} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\lvert\cos\alpha\rvert$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{2}$
Симметричный мост с D_{RL} или смешанный	$f_{PE} = \frac{\sqrt{2}(1+\cos\alpha)}{\pi\sqrt{1-\alpha/\pi}}$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{2}$
Трехфазное однополупериодное		
Без D_{RL}	$f_{PE} = \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\lvert\cos\alpha\rvert$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{3}$
С D_{RL}	$f_{PE} = \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\lvert\cos\alpha\rvert$, если $\alpha \leqslant \frac{\pi}{6}$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{3}$
	$f_{PE} = \frac{1+\cos(\alpha+\pi/6)}{\pi\sqrt{5/6-\alpha/\pi}}$, если $\alpha \geqslant \frac{\pi}{6}$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{3}$
Трехфазное двухполупериодное		
Симметричный мост без D_{RL}	$f_{PE} = \frac{3}{\pi}\lvert\cos\alpha\rvert$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{6}$
Симметричный мост с D_{RL}	$f_{PE} = \frac{3}{\pi}\lvert\cos\alpha\rvert$, если $\alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{6}$
	$f_{PE} = \frac{\sqrt{3}(1+\cos(\alpha+\pi/3))}{\pi\sqrt{2/3-\alpha/\pi}}$, если $\alpha \geqslant \frac{\pi}{3}$	
Смешанный мост	$f_{PE} = \frac{3(1+\cos\alpha)}{2\pi}$, если $\alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{6}$
	$f_{PE} = \frac{\sqrt{3}(1+\cos\alpha)}{\pi\sqrt{2}\sqrt{1-\alpha/\pi}}$, если $\alpha \geqslant \frac{\pi}{3}$	

32.6. Критерии выбора

- Обратимость. Симметричные мостовые схемы без разрядного диода обратимы. Симметричные мостовые схемы с разрядным диодом и смешанные необратимы.
- Коэффициент мощности. В сопоставимых ситуациях (заданные однофазная или трехфазная сеть, двухполупериодное выпрямление, выходная мощность и выходной постоянный ток) смешанные мостовые

схемы имеют коэффициент мощности выше, чем симметричные тиристорные мостовые схемы.

– Соотношение периодов выходного и входного напряжений (T_S/T_E). Чем больше это соотношение, тем больше значение возможной индуктивности сглаживания.
– Число тиристоров. Число управляющих схем увеличивается с ростом числа тиристоров.
– Падение напряжения. Оно пропорционально числу выпрямителей (тиристоров и диодов), соединенных последовательно, и снижает КПД. Это единственное соображение, по которому при малых значениях выпрямленного среднего напряжения предпочтительными являются схемы с одним выпрямителем (однополупериодное выпрямление или со средней точкой трансформатора). Обычно выбор является функцией питания.
– Однофазная сеть. Если преобразователь должен быть обратимым, используют симметричные тиристорные мостовые схемы без разрядного диода, если нет — используют смешанные схемы.
– Трехфазная сеть. Особенно при малых и средних мощностях используют симметричные мостовые схемы без разрядного диода при обратимых и необратимых преобразователях. Из-за наличия гармоник при очень малых мощностях используют смешанные мостовые схемы. При больших мощностях используются другие схемы преобразователей.

ГЛАВА 33

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

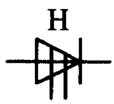


Рис. 33.1. Общее обозначение прерывателя

Преобразователь постоянного тока позволяет регулировать передачу энергии от источника постоянного тока к потребителю с высоким значением КПД. Соответственно структуре он может как понижать, так и повышать напряжение, а при выполнении некоторых условий он может возвращать энергию источнику питания. Он используется для питания двигателей постоянного тока и управления ими.

– В этой главе описывается только установившийся (периодический) режим.

– Для упрощения мы рассматриваем идеальные составляющие и, в частности, электронный однонаправленный прерыватель тока, управляемый на размыкание и на замыкание. Это может быть реализовано с биполярным полевым МОП-транзистором, с двухоперационным тиристором и т. д. Общее условное обозначение дано на рис. 33.1.

33.1. Последовательный вольтопонижающий регулятор

33.1.1. Принцип действия (рис. 33.2)

Последовательный регулятор позволяет регулировать передачу энергии от источника постоянного напряжения (или емкостного питания) к источнику постоянного тока (индуктивной нагрузке) с прямой связью, т. е. без промежуточных элементов накопления энергии.

Электронный прерыватель H, включенный последовательно с источником напряжения, периодически замыкается на время αT, а в течение времени $(1-\alpha)T$ размыкается. Здесь T — период.

От $t = 0$ до $t = \alpha T$ электронный прерыватель H замкнут, диод D заперт и представляет собой разомкнутый прерыватель. Источник напряжения передает энергию источнику тока. Имеем:

$$u_S = U_E, \qquad i_E = I_S, \qquad i_D = 0.$$

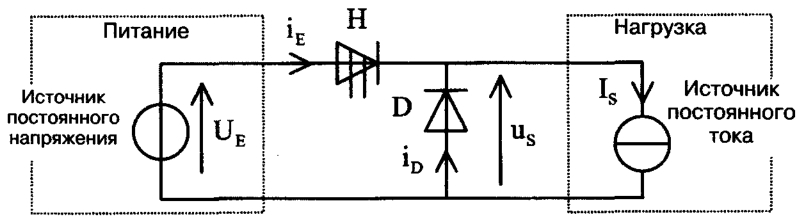


Рис. 33.2. Принцип построения схемы последовательного регулятора

От $t = \alpha T$ до $t = T$ электронный прерыватель H разомкнут, диод D находится в проводящем состоянии и является замкнутым прерывателем. Имеем:

$$u_S = 0, \qquad i_E = 0, \qquad i_D = I_S.$$

Тогда:

$$U_{S\,ср} = \alpha U_E, \quad I_{E\,ср} = \alpha I_S; \quad P_{E\,ср} = U_E I_{E\,ср} = \alpha U_E I_S = U_{S\,ср} I_S = P_{S\,ср}.$$

Среднее выходное напряжение меньше постоянного входного напряжения: последовательный преобразователь является *вольтопонижающим.* Но постоянный ток, напротив, больше среднего входного тока.

33.1.2. Последовательный регулятор со сглаживанием тока (рис. 33.3)

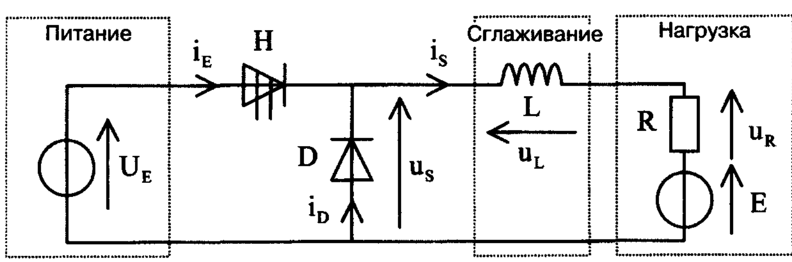


Рис. 33.3. Последовательный регулятор со сглаживанием тока

На практике для сглаживания тока добавляется сглаживающая индуктивность, когда нагрузка не может рассматриваться как источник тока. Постоянное напряжение питания U_E и постоянное напряжение на нагрузке E (противо-ЭДС двигателя, например) таковы, что $0 \leqslant E \leqslant U_E$.

а) Условие непрерывности тока i_S

- ***Режимы работы*** (рис. 33.5).

– От $t = 0$до $t = \alpha T$ электронный прерыватель замкнут, диод D заперт. Питание передает энергию нагрузке и индуктивности. Имеем:

$$u_S = U_E = L\frac{di}{dt} + Ri_S + E, \qquad i_E = i_S, \qquad i_D = 0,$$

откуда:

$$i_S = I_{S\,Max}e^{-t/\tau} + \frac{U_E - E}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

– От $t = \alpha T$ до $t = T$ электронный прерыватель H разомкнут, диод D находится в проводящем состоянии. Индуктивность передает в нагрузку ранее накопленную энергию. Имеем:

$$u_S = 0 = L\frac{di_S}{dt} + Ri_S + E, \qquad i_E = 0, \quad i_D = i_S,$$

откуда:

$$i_S = I_{S\,Max}e^{-(t-\alpha T)/\tau} + \frac{E}{R}\left(-1 + e^{-(t-\alpha T)/\tau}\right), \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

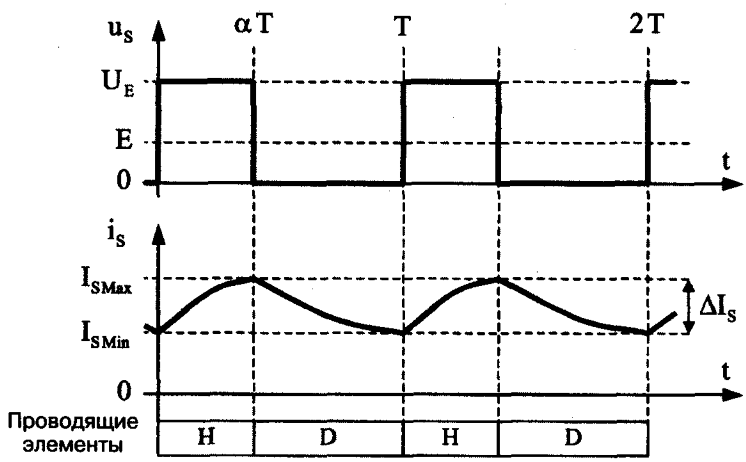


Рис. 33.4. Непрерывная проводимость последовательного преобразователя

• ***Средние значения*** (см. рис. 33.3 и 33.4).

$$U_{S\,cp} = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} U_E dt \quad \Rightarrow \quad U_{S\,cp} = \alpha U_E.$$

$$\begin{cases} u_S = u_L + Ri_S + E, \\ U_{L\,cp} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_{S\,cp} = \frac{U_{S\,cp} - E}{R} = \frac{\alpha U_E - E}{R}.$$

Вопрос. Полагая ток i_S постоянным и равным $I_{S\,cp}$, привести выражение средних значений входного тока $I_{E\,cp}$ и тока в диоде $I_{D\,cp}$.

Ответ. Если $i_S = \mathrm{const} = I_{S\,ср}$, то

$$I_{E\,ср} = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} i_E dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} i_S dt = \alpha I_{S\,ср};$$

$$I_{D\,ср} = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} i_D dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} i_S dt = (1-\alpha) I_{S\,ср}.$$

Примечание. Полагая отсутствие потерь в электронном прерывателе и в диоде, имеем $P_{S\,ср} = P_{E\,ср}$, где $P_{S\,ср} = U_{S\,ср} I_{S\,ср}$ (это соотношение справедливо, так как предположили $i_S = \mathrm{const} = I_{S\,ср}$) и $P_{E\,ср} = U_E I_{E\,ср}$. Тогда:

$$P_{S\,ср} = P_{E\,ср} = \frac{\alpha U_E(\alpha U_E - E)}{R}, \text{ если } i_S = \mathrm{const} = I_{S\,ср}.$$

• ***Максимальное и минимальное значения тока. Амплитудный размах.*** Зная, что $i_S(\alpha T) = I_{S\,Max}$ и $i_S(T) = I_{S\,Min}$, найдем:

$$I_{S\,Max} = \frac{U_E}{R}\frac{1-e^{-\alpha T/\tau}}{1-e^{-T/\tau}} - \frac{E}{R} \quad \text{и} \quad I_{S\,Min} = \frac{U_E}{R}\frac{1-e^{-\alpha T/\tau}}{1-e^{-T/\tau}}e^{-(1-\alpha)T/\tau} - \frac{E}{R},$$

откуда:

$$\Delta I_S = I_{S\,Max} - I_{S\,Min} = \frac{U_E}{R}\frac{1-e^{-\alpha T/\tau}}{1-e^{-T/\tau}}\left(1 - e^{-(1-\alpha)T/\tau}\right).$$

Вопрос. Полагая $\tau \gg T$, выразить амплитудный размах тока ΔI_S. Рассчитать значение α, при котором ΔI_S будет максимальным. Отсюда вывести $(\Delta I_S)_{Max}$.

Ответ. Поскольку $\tau \gg T$, выполним преобразование, ограниченное экспонентой 1-го порядка. Откуда:

$$\Delta I_S = I_{S\,Max} - I_{S\,Min} \approx \frac{U_E}{R}\frac{\alpha(1-\alpha)T}{\tau}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Решая уравнение $(d\Delta I_S/d\alpha) = 0$, получим, что ΔI_S будет максимальным при $\alpha = 0{,}5$. Следует:

$$(\Delta I_S)_{Max} \approx \frac{U_E}{R}\frac{T}{4\tau} = \frac{U_E T}{4L}.$$

Это то, что позволяет определить индуктивность L (см. также ниже примечание п. б).

б) Условие прерывистости тока i_S

• ***Режимы работы*** (рис. 33.5).

– От $t = 0$ до $t = \alpha T$ электронный прерыватель замкнут, диод D заперт. Имеем:

$$u_S = U_E = L\frac{di}{dt} + Ri_S + E, \qquad i_E = i_S i_D = 0,$$

откуда:

$$i_S = \frac{U_E - E}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{R},$$

(так как $I_{S\,Min} = 0$).

– От $t = \alpha T$ до $t = \gamma T$ электронный прерыватель H разомкнут, диод D находится в проводящем состоянии. Имеем:

$$u_S = 0 = L\frac{di_S}{dt} + Ri_S + E, \quad i_E = 0, \quad i_D = i_S,$$

откуда:

$$i_S = I_{S\,Max}e^{-(t-\alpha T)/\tau} + \frac{E}{R}\left(-1 + e^{-(t-\alpha T)/\tau}\right), \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

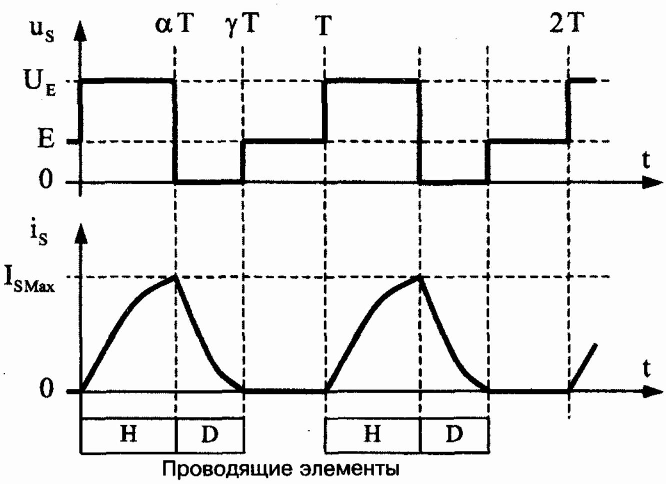


Рис. 33.5. Прерывистая проводимость последовательного преобразователя

- ***Средние значения*** (см. рис. 33.3 и 33.4).

$$U_{S\,cp} = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\alpha T} U_E dt + \int_{\gamma T}^{T} E dt\right) \quad \Rightarrow \quad U_{S\,cp} = \alpha U_E + (1-\gamma)E.$$

$$\begin{cases} u_S = u_L + Ri_S + E, \\ U_{L\,cp} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_{S\,cp} = \frac{U_{S\,cp} - E}{R} = \frac{\alpha U_E - E}{R}.$$

- ***Максимальное значение тока.*** Исходя из выражения тока i_S, справедливого от $t = 0$ до $t = \alpha T$, и зная, что $i_S(\alpha T) = I_{S\,Max}$, находим:

$$I_{S\,Max} = \frac{U_E - E}{R}(1 - e^{-\alpha T/\tau}).$$

Вопрос. Определить значение γT, при котором ток i_S прерывается.

Ответ. Исходя из выражения тока i_S, справедливого от $t = \alpha T$ до $t = \gamma T$, и зная, что $i_S(\gamma T) = 0$, находим:

$$\gamma = \frac{\tau}{T}\ln\left(1 + \frac{U_E}{E}\left(e^{\alpha T/\tau} - 1\right)\right).$$

Примечание. Прерывистость проводимости тока в нагрузке обычно нежелательна. Выражение для γ позволяет измерить значение сглаживающей индуктивности, зная, что $\gamma = 1$ разделяет условия непрерывности и прерывистости.

33.2. Параллельный вольтоповышающий регулятор

33.2.1. Принцип действия (рис. 33.6)

Параллельный регулятор позволяет передавать энергию источника постоянного тока (или индуктивного питания) источнику постоянного напряжения (или емкостной нагрузки), т. е. без промежуточных накопительных элементов.

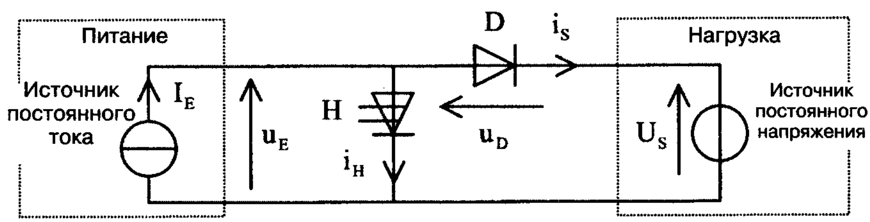


Рис. 33.6. Принцип построения схемы параллельного регулятора

Электронный прерыватель H, включенный параллельно источнику тока, периодически размыкается на время βT, а в течение времени αT ($\alpha = 1 - \beta$) замыкается. Здесь T — период.

- От $t = 0$ до $t = \beta T$ электронный прерыватель H разомкнут, диод D находится в проводящем состоянии и представляет собой замкнутый прерыватель. Источник тока передает энергию источнику напряжения. Имеем:

$$i_S = I_E, \qquad u_E = U_S, \qquad i_H = 0.$$

- От $t = \beta T$ до $t = T$ электронный прерыватель H замкнут, диод D заперт и является разомкнутым прерывателем. Имеем:

$$i_S = 0, \qquad u_E = 0, \qquad i_H = I_E.$$

Тогда:

$$I_{S\,ср} = \beta I_E = (1-\alpha)I_E, \quad U_{E\,ср} = \beta U_S = (1-\alpha)U_S,$$
$$P_{E\,ср} = U_{E\,ср}I_E = \beta U_S I_E = U_S I_{S\,ср} = P_{S\,ср}.$$

Среднее выходное напряжение больше среднего входного напряжения: параллельный преобразователь является *вольтоповышающим*. Но средний выходной ток, напротив, меньше постоянного входного тока.

33.2.2. Параллельный регулятор со сглаживанием напряжения

На практике для сглаживания напряжения добавляется сглаживающая емкость, когда нагрузка не может рассматриваться как источник постоянного напряжения. Постоянный ток питания I_E и постоянный ток нагрузки I таковы, что $0 \leqslant I \leqslant I_E$.

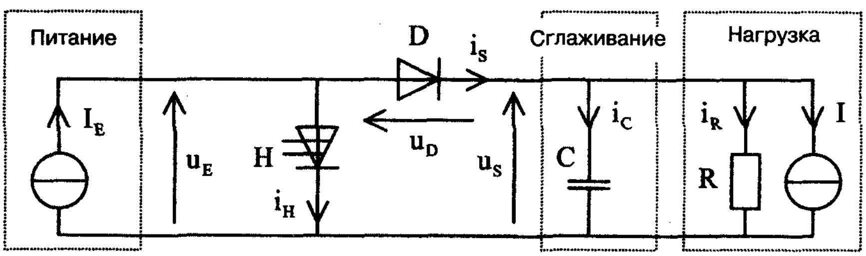


Рис. 33.7. Параллельный регулятор со сглаживанием напряжения

а) Непрерывность напряжения u_S

- ***Режимы работы*** (рис. 33.8).

  – От $t = 0$ до $t = \beta T$ электронный прерыватель H разомкнут, диод D находится в проводящем состоянии. Источник тока передает энергию нагрузке и конденсатору. Имеем:

$$i_S = I_E = C\frac{du_S}{dt} + \frac{u_S}{R} + I, \quad u_E = u_S, \quad i_H = 0,$$

откуда:

$$u_S = U_{S\,Min}e^{-t/\tau} + R(I_E - I)(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = RC.$$

  – От $t = \beta T$ до $t = T$ электронный прерыватель H замкнут, диод D заперт. Конденсатор передает нагрузке ранее накопленную энергию. Имеем:

$$i_S = 0 = C\frac{du_C}{dt} + \frac{u_S}{R} + I, \quad u_E = 0, \quad i_H = I_E,$$

откуда:

$$u_S = U_{S\,Min}e^{-(t-\beta T)/\tau} + RI(1 - e^{-(t-\beta T)/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = RC.$$

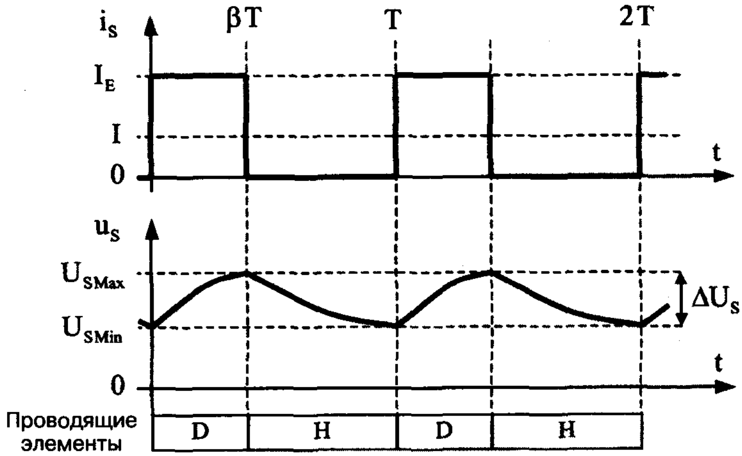


Рис. 33.8. Параллельный регулятор с непрерывностью напряжения

- ***Средние значения*** (см. рис. 33.3 и 33.4).

$$I_{S\,ср} = \frac{1}{T}\int_0^{\beta T} I_E dt \quad \Rightarrow \quad I_{Sср} = \beta I_E.$$

$$\begin{cases} u_S = R(i_S - i_C - I), \\ I_{Cср} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U_{S\,ср} = R((1-\alpha)I_E - I) = R(\beta I_E - I),$$

откуда, заменяя β на $1 - \alpha$, получим:

$$I_{S\,ср} = (1-\alpha)I_E \quad \text{и} \quad U_{S\,ср} = R((1-\alpha)I_E - I).$$

Вопрос. Полагая напряжение $u_S = U_{S\,ср} = \text{const}$, привести выражения среднего входного напряжения $U_{E\,ср}$ и напряжения на зажимах диода $U_{D\,ср}$.

Ответ. Если $u_S = U_{S\,ср} = \text{const}$, то

$$U_{E\,ср} = \frac{1}{T}\int_0^{\beta T} u_E dt = \frac{1}{T}\int_0^{\beta T} u_S dt = \beta U_{S\,ср} = (1-\alpha)U_{S\,ср};$$

$$U_{D\,ср} = \frac{1}{T}\int_{\beta T}^{T} u_D dt = \frac{1}{T}\int_{\beta T}^{T} -u_S dt = -(1-\beta)U_{S\,ср} = -\alpha U_{S\,ср}.$$

Примечание. Электронный прерыватель и диод предположительно не вызывают потерь. Имеем $P_{S\,ср} = P_{E\,ср}$, где $P_{S\,ср} = U_{S\,ср} I_{S\,ср}$ (это соотношение справедливо, так как по предположению $u_S = U_{S\,ср} = \text{const}$). Тогда:

$$P_{S\,ср} = P_{E\,ср} = R\beta I_E(\beta I_E - I), \text{ если } u_S = U_{S\,ср} = \text{const}.$$

• ***Максимальное и минимальное значения тока. Амплитудный размах.*** Зная, что $u_S(\beta T) = U_{S\,Max}$ и $u_S(T) = U_{S\,Min}$, найдем:

$$U_{S\,Max} = RI_E \frac{1 - e^{-\beta T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} - RI \quad \text{и} \quad U_{S\,Min} = RI_E \frac{1 - e^{-\beta T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-(1-\beta)T/\tau} - RI,$$

откуда:

$$\Delta U_S = U_{S\,Max} - U_{S\,Min} = RI_E \frac{1 - e^{-\beta T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} (1 - e^{-(1-\beta)T/\tau}).$$

Вопрос. Полагая $\tau \gg T$, выразить амплитудный размах напряжения ΔU_S. Рассчитать значение β, при котором ΔU_S будет максимальным. Отсюда вывести $(\Delta U_S)_{Max}$.

Ответ. Поскольку $\tau \gg T$, выполним преобразование, ограниченное экспонентой 1-го порядка. Откуда:

$$\Delta U_S = U_{S\,Max} - U_{S\,Min} \approx RI_E \frac{\beta(1-\beta)T}{\tau}, \quad \text{где} \quad \tau = RC.$$

Решая уравнение $(d\Delta U_S/d\beta) = 0$, получим, что ΔU_S будет максимальным при $\beta = 0{,}5$. Следует:

$$(\Delta U_S)_{Max} \approx RI_E \frac{T}{4\tau} = \frac{I_E T}{4C}.$$

Это то, что позволяет определить емкость C (см. также ниже примечание п. б).

б) Условие прерывистости напряжения u_S

• ***Режимы работы*** (рис. 33.9).

– От $t = 0$ до $t = \beta T$ электронный прерыватель H разомкнут, диод D находится в проводящем состоянии. Имеем:

$$i_S = I_E = C\frac{du_S}{dt} + \frac{u_S}{R} + I, \quad u_E = u_S, \quad i_H = 0,$$

откуда:

$$u_S = R(I_E - I)(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = RC,$$

(так как $U_{S\,Min} = 0$).

– От $t = \beta T$ до $t = \gamma T$ электронный прерыватель H замкнут, диод D заперт. Имеем:

$$i_S = 0 = C\frac{du_S}{dt} + \frac{u_S}{R} + I, \quad u_E = 0, \quad i_H = I_E,$$

откуда

$$u_S = U_{S\,Max}e^{-(t-\beta T)/\tau} + RI(-1 + e^{-(t-\beta T)/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = RC.$$

– От $t = \gamma T$ до $t = T$ электронный прерыватель H замкнут и диод находится в проводящем состоянии. Имеем:

$$u_S = 0, \quad u_E = 0, \quad i_S = I, \quad i_H = I_E - I.$$

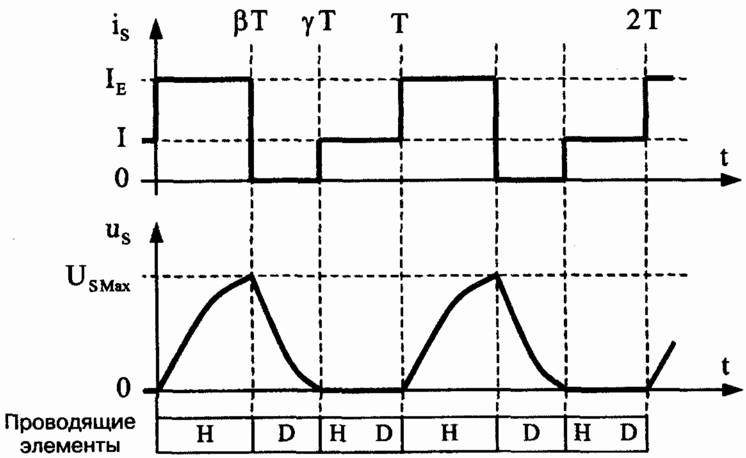


Рис. 33.9. Прерывистость напряжения в параллельном регуляторе

• ***Средние значения*** (см. рис. 33.7 и 33.9).

$$I_{S\,ср} = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\beta T} I_E dt + \int_{\gamma T}^{T} I dt\right) \quad \Rightarrow \quad I_{S\,ср} = \beta I_E + (1-\gamma)I.$$

$$\begin{cases} u_S = R(i_S - i_C - I), \\ I_{Cср} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U_{S\,ср} = R(I_{S\,ср} - I) = R(\beta I_E - \gamma I).$$

• ***Максимальное значение напряжения.*** Исходя из выражения напряжения u_S, справедливого от $t = 0$ до $t = \beta T$, и зная, что $u_S(\beta T) = U_{S\,Max}$, находим:

$$U_{S\,Max} = R(I_E - I)(1 - e^{-\beta T/\tau}).$$

Вопрос. Определить значение γT, при котором напряжение u_S прерывается.

Ответ. Исходя из выражения напряжения u_S, справедливого от $t = \beta T$

до $t = \gamma T$, и зная, что $u_S(\gamma T) = 0$, находим:

$$\gamma = \frac{\tau}{T}\ln\left(1 + \frac{I_E}{I}\left(e^{\beta T/\tau} - 1\right)\right).$$

Примечание. Выражение для γ позволяет получить значение сглаживающего конденсатора, зная, что $\gamma = 1$ разделяет области прерывистого и непрерывного напряжений.

в) Реализация токового питания (рис. 33.10)

На практике токовое питание реализуется включением последовательно с источником постоянного напряжения U_0 катушки индуктивности L. Сопротивление r является активным сопротивлением включенной последовательно катушки.

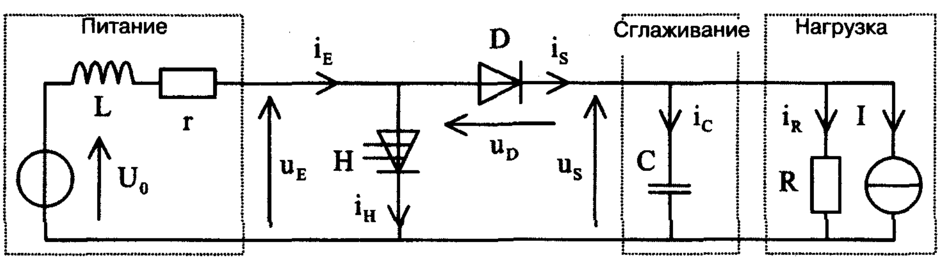


Рис. 33.10. Параллельный регулятор как источник тока

• ***Принцип действия.*** Чтобы иметь возможность рассматривать ток $i_E = I_E = \text{const}$, предположим индуктивность L достаточно большой. Тогда (см. п. а):

$$I_{S\,ср} = (1-\alpha)I_E \quad \text{и} \quad U_{S\,ср} = R((1-\alpha)I_E - I), \quad \text{где} \quad \beta = 1-\alpha.$$

Кроме того, чтобы иметь возможность рассматривать напряжение $u_S = U_{S\,ср} = \text{const}$, мы предполагаем достаточно большой емкость C. Тогда можно записать выражение среднего значения:

$$U_0 = rI_E + U_{D\,ср} + U_{S\,ср}, \quad \text{где} \quad U_{D\,ср} = -\alpha U_{S\,ср},$$

откуда:

$$U_{S\,ср} = \frac{(1-\alpha)U_0 - rI}{(1-\alpha)^2 + r/R}.$$

Примечания.

– Кривая напряжения $U_{S\,ср}$ обладает максимумом. При токе $I = 0$ для упрощения имеем:

$$U_S = U_{S\,Max} = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{R}{r}} \quad \text{при} \quad \alpha = 1 - \sqrt{\frac{r}{R}}.$$

– Если r = 0, мы воспроизведем ранее полученный результат (см. п. а):

$$U_{S\,ср} = \frac{U_0}{1-\alpha} \quad \text{при} \quad U_{E\,ср} = U_0.$$

• ***Определение индуктивности.*** Для того чтобы иметь возможность рассматривать напряжение $u_S = U_{S\,ср} = \text{const}$, мы предполагаем достаточно большой емкость C и r = 0 для упрощения.

– От t = 0 до t = βT электронный прерыватель H разомкнут, диод D находится в проводящем состоянии. Имеем:

$$U_0 = L\frac{di_E}{dt} + U_{S\,ср}, \quad i_S = i_E, \quad u_E = u_S, \quad i_H = 0,$$

откуда:

$$i_E = \frac{U_0 - U_{S\,ср}}{L}t + I_{E\,Max} \quad \Rightarrow \quad I_{E\,Min} = \frac{U_0 - U_{S\,ср}}{L}\beta T + I_{E\,Max},$$

– От t = βT до t = T электронный прерыватель H замкнут, диод D заперт. Имеем:

$$U_0 = L\frac{di_E}{dt}, \quad i_S = 0, \quad u_E = 0, \quad i_H = i_E,$$

откуда:

$$i_E = \frac{U_0}{L}(t - \beta T) + I_{E\,Min} \quad \Rightarrow \quad I_{E\,Max} = \frac{U_0}{L}(1-\beta)T + I_{E\,Min}.$$

Окончательно получим следующее выражение, которое позволит определить L:

$$\Delta I_E = I_{E\,Max} - I_{E\,Min} = \frac{U_E}{L}(1-\beta)T = \frac{U_E}{L}\alpha T.$$

33.3. Регулятор с индуктивным накоплением

Регулятор с индуктивным накоплением (рис. 33.11) позволяет регулировать передачу энергии от источника постоянного напряжения (емкостной источник) к другому источнику напряжения (емкостная нагрузка) с использованием накопительной индуктивности. Для упрощения принимаем $u_S = E = \text{const}$.

• ***Режимы работы*** (рис. 33.12).

– От t = 0 до t = αT электронный прерыватель H замкнут, диод D заперт. Элемент питания передает энергию в индуктивность. Имеем:

$$u_L = U_E = L\frac{di_L}{dt}, \quad i_E = i_L, \quad i_S = 0,$$

откуда:

$$i_L = \frac{U_E}{L}t + I_{L\,Min} \quad \Rightarrow \quad I_{L\,Max} = \frac{U_E}{L}\alpha T + I_{L\,Min}.$$

– От $t = \alpha T$ до $t = T$ электронный прерыватель H разомкнут и диод находится в проводящем состоянии. Индуктивность передает накопленную ранее энергию нагрузке. Имеем:

$$u_L = -E = L\frac{di_L}{dt}, \qquad i_E = 0, \qquad i_S = i_L,$$

откуда:

$$i_L = \frac{-E}{L}(t - \alpha T) + I_{L\,Max} \quad \Rightarrow \quad I_{L\,Min} = \frac{-E}{L}(t - \alpha)T + I_{L\,Max}.$$

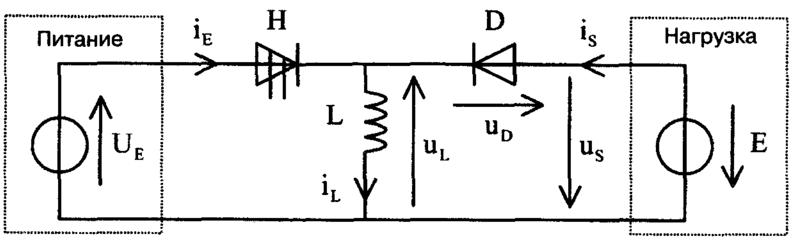


Рис. 33.11. Регулятор с индуктивным накопителем

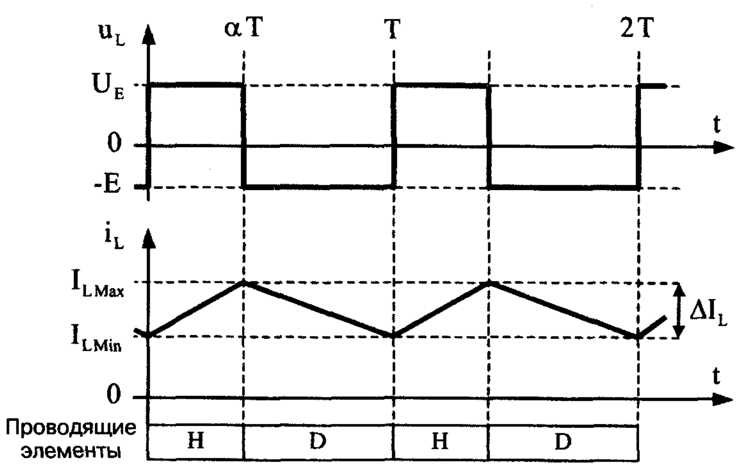


Рис. 33.12. Регулятор с накоплением энергии

- ***Среднее значение.***

$$\begin{cases} U_{L\,ср} = \alpha U_E - (1-\alpha)E, \\ U_{L\,ср} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\alpha U_E}{1-\alpha}.$$

Если $\alpha < 0{,}5$ регулятор понижает напряжение, если $\alpha > 0{,}5$ регулятор повышает напряжение.

• ***Амплитудный размах токовых колебаний.*** Он позволяет определить L.

$$\Delta I_L = I_{L\,Max} - I_{L\,Min} = \frac{U_E}{L}\alpha T = \frac{E}{L}(1-\alpha)T.$$

33.4. Двухквадрантный или полумостовой регулятор

33.4.1. Принцип действия

Двухквадрантный регулятор (рис. 33.13) объединяет последовательный и параллельный регуляторы. Он реверсивный по току, но не реверсивный по напряжению. Энергия передается от источника постоянного напряжения к источнику постоянного тока, если $I_S > 0$, и обратно, если $I_S < 0$. Элемент источника ($U_E > 0$) должен быть реверсивным по току.

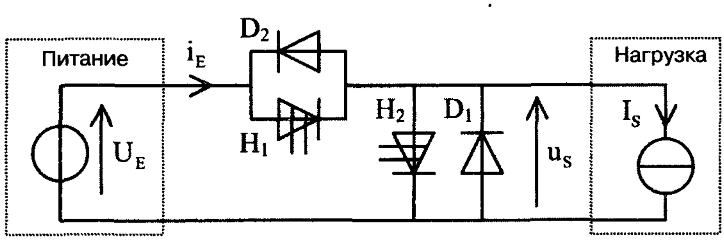


Рис. 33.13. Схема двухквадрантного регулятора

Дополнительное управление электронными прерывателями осуществляется так, что:

– H_1 замкнут или D_2 проводит; H_2 разомкнут и D_1заперт в течение αT.

– Затем H_1разомкнут и D_2заперт; H_2 замкнут или D_1 проводит в течение $(1-\alpha)T$. Тогда получается следующая эквивалентная схема (рис. 33.14).

– От $t = 0$ до $t = \alpha T$ замкнут K_1 и разомкнут K_2. Имеем: $u_S = U_E$ и $i_E = I_S$.

– От $t = \alpha T$ до $t = T$ разомкнут K_1, а K_2 замкнут. Имеем: $u_S = 0$ и $i_E = 0$. Тогда: $U_{S\,Max} = \alpha U_E$, $I_{E\,ср} = \alpha I_S$, $P_{E\,ср} = U_E I_{E\,ср} = \alpha U_E I_S = U_{S\,ср} I_S = P_{S\,ср}$.

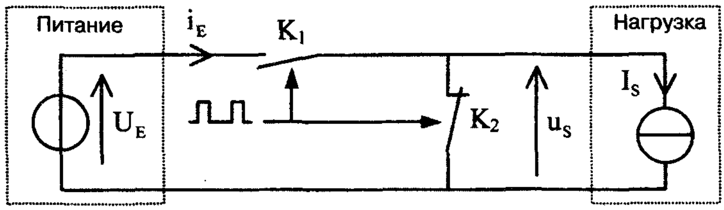


Рис. 33.14. Эквивалентная схема двухквадрантного регулятора

Таким образом, работа в двух квадрантах ($U_E > 0$) осуществляется при условии $0 < \alpha < 1 \Rightarrow U_{S\,cp} > 0$. В первом квадранте ($I_S > 0$) имеем:

$$P_{E\,cp} = P_{S\,cp} > 0.$$

Во втором квадранте ($I_S < 0$) имеем: $P_{E\,cp} = P_{S\,cp} < 0$. Если $P_{E\,cp} = P_{S\,cp} > 0$, источник напряжения передает энергию источнику тока, и наоборот, если $P_{E\,cp} = P_{S\,cp} < 0$.

Примечания.

- Можно было бы рассматривать раздельное управление последовательным и параллельным регуляторами, но только рассмотренное здесь дополнительное управление обеспечивает непрерывность регулирования $U_{S\,cp}$, каким бы ни было направление тока I_S.
- Мы получаем те же формулы, что и для последовательного регулятора (см. принцип действия в §33.1.1), но ток I_S в двухквадрантном регуляторе может быть как положительным, так и отрицательным, тогда как в последовательном регуляторе он может быть только положительным.

33.4.2. Двухквадрантный регулятор со сглаживанием тока

На практике добавляют сглаживающую ток индуктивность (рис. 33.15), когда нагрузка не проявляет свойства источника постоянного тока. Такой регулятор позволяет, например, управлять машиной постоянного тока. Эта машина работает в режиме двигателя, если $P_{E\,cp} > 0$, и в режиме генератора, если $P_{E\,cp} < 0$ (рекуперативное торможение). Источники постоянного напряжения таковы, что $U_E > 0$ и $E \geqslant 0$.

Мы получим те же формулы, что и для последовательного регулятора, но в двухквадрантном регуляторе ток i_S в нагрузке может быть как положительным, так и отрицательным, и он всегда непрерывный (за исключением предельного случая, когда $E = 0$ и $L/R \ll T$).

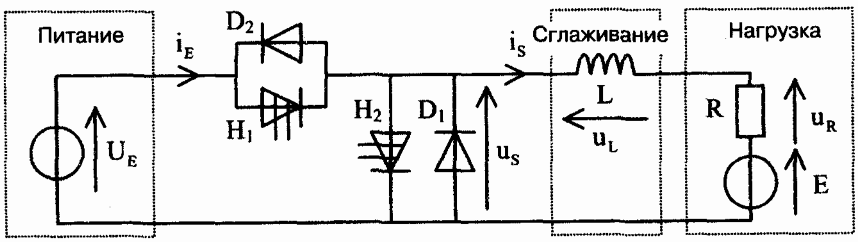


Рис. 33.15. Двухквадрантный регулятор со сглаживанием тока

- ***Режимы работы*** (см. § 33.1.2, а).
  - От $t = 0$ до $t = \alpha T$ замкнут K_1 и разомкнут K_2. Имеем:
$$i_S = I_{S\,Min}e^{-t/\tau} + \frac{U_E - E}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = L/R.$$
  - От $t = \alpha T$ до $t = T$ разомкнут K_1 и замкнут K_2. Имеем:
$$i_S = I_{S\,Max}e^{-(t-\alpha T)/\tau} + \frac{E}{R}(-1 + e^{-(t-\alpha T)/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = L/R.$$

В зависимости от значений α, U_E и E различают три типовых случая (рис. 33.16): ток в нагрузке i_S может быть либо только положительным (режим последовательного регулятора), либо только отрицательным (режим параллельного регулятора), либо как положительным, так и отрицательным (режим последовательно-параллельного регулятора).

- ***Средние значения*** (см. последовательный регулятор в § 33.1.2, а).
$$U_{S\,ср} = \alpha U_E, \quad I_{S\,ср} = \frac{U_{S\,ср} - E}{R} = \frac{\alpha U_E - E}{R}.$$

- ***Минимальное и максимальное значения тока. Амплитудный размах. Определение индуктивности L.*** (см. последовательный регулятор в § 33.1.2, а).

33.5. Четырехквадрантный или мостовой регулятор

33.5.1. Принцип действия (рис. 33.17)

Четырехквадрантный регулятор представляет собой объединение двух полумостовых регуляторов. Энергия передается от источника постоянного напряжения к источнику постоянного тока, если $P_{S\,ср} > 0$, и обратно, если $P_{S\,ср} < 0$. Элемент питания должен быть обратимым по току.

Дополнительное управление электронными прерывателями осуществляется так, что:

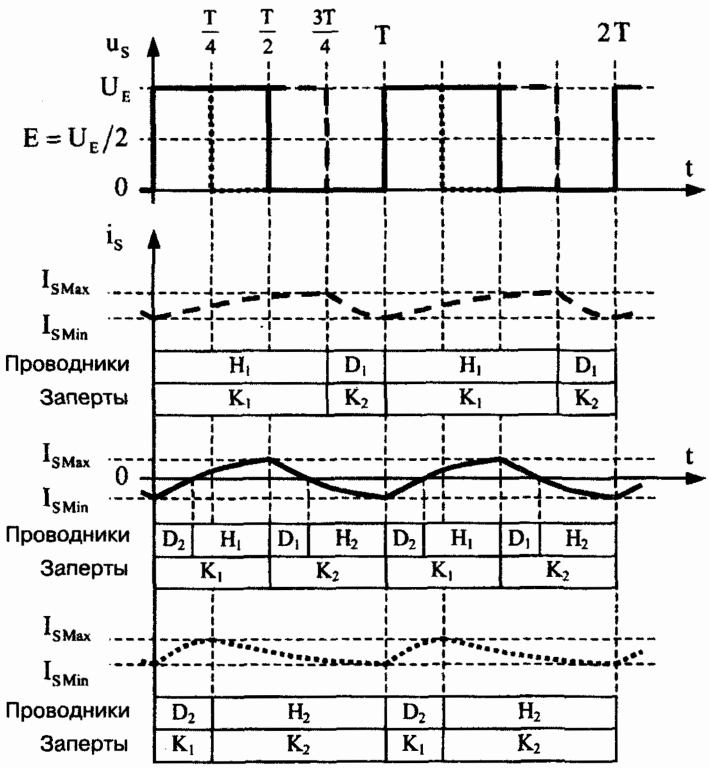


Рис. 33.16. Двухквадрантный регулятор

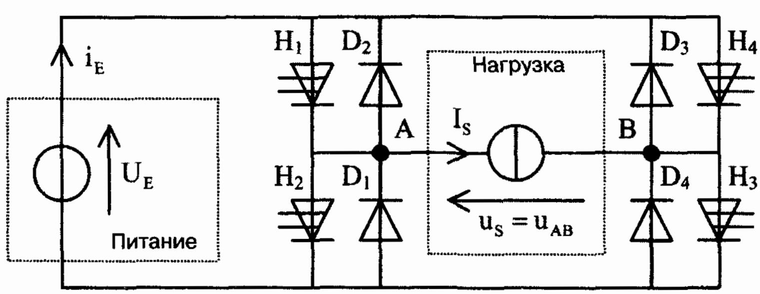


Рис. 33.17. Схема четырехквадрантного регулятора

– H_1 замкнут или D_2 проводящий, H_3 замкнут или D_4 проводящий, H_2 разомкнут и D_1 заперт, H_4 разомкнут и D_3 заперт в течение αT.
– Затем H_1 разомкнут и D_2 заперт, H_3 разомкнут и D_4 заперт, H_2 замкнут или D_1 проводящий, H_4 замкнут или D_3 проводящий в течение $(1 - \alpha)T$.

Тогда получаем следующую эквивалентную схему (рис. 33.18).

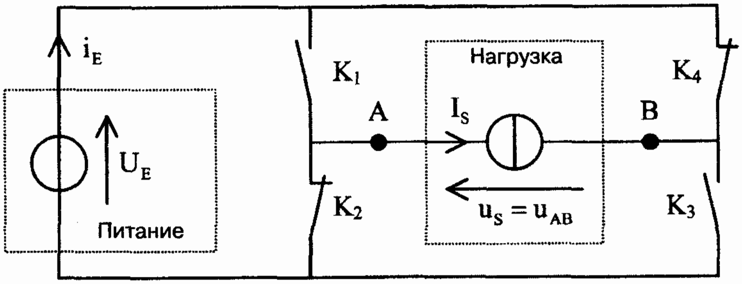


Рис. 33.18. Эквивалентная схема четырехквадрантного регулятора

– От $t = 0$ до $t = \alpha T$ замкнуты K_1 и K_3, разомкнуты K_2 и K_4. Имеем:

$$u_S = U_E \quad \text{и} \quad i_E = I_S.$$

– От $t = \alpha T$ до $t = T$ разомкнуты K_1 и K_3, замкнуты K_2 и K_4. Имеем:

$$u_S = -U_E \quad \text{и} \quad i_E = -I_S.$$

Тогда:

$$U_{S\,ср} = (2\alpha - 1)U_E, \quad I_{E\,ср} = (2\alpha - 1)I_S,$$
$$P_{E\,ср} = U_E I_{E\,ср} = (2\alpha - 1)U_E I_S = U_{S\,ср} I_S = P_{S\,ср}.$$

Четыре квадранта ($U_E > 0$)	$I_S > 0$	$I_S < 0$
$0{,}5 < \alpha < 1 \Rightarrow U_{S\,ср} > 0$	1-й кв. $P_{E\,ср} = P_{S\,ср} > 0$	2-й кв. $P_{E\,ср} = P_{S\,ср} < 0$
$0 < \alpha < 0{,}5 \Rightarrow U_{S\,ср} < 0$	3-й кв. $P_{E\,ср} = P_{S\,ср} < 0$	4-й кв. $P_{E\,ср} = P_{S\,ср} > 0$

Если $P_{E\,ср} = P_{S\,ср} > 0$, источник напряжения передает энергию источнику тока и наоборот, если $P_{E\,ср} = P_{S\,ср} < 0$.

Примечание. Возможны другие управления, но только описанное здесь дополнительное обеспечивает непрерывность управления $U_{S\,ср}$, включая переход к нулю при любых направлении и значении тока I_S. Если K_3 всегда замкнут, а K_4 всегда разомкнут, получим двухквадрантный регулятор, описанный выше.

33.5.2. Четырехквадрантный регулятор со сглаживанием тока

На практике добавляют сглаживающую ток индуктивность, когда нагрузка не проявляет свойства источника постоянного тока (рис. 33.19). Такой регулятор позволяет, например, управлять машиной постоянного тока в двух направлениях непрерывного вращения ($U_{S\,ср}$ может быть положительным, равным нулю, отрицательным). Эта машина работает в режиме двигателя, если $P_{E\,ср} > 0$, и в режиме генератора, если $P_{E\,ср} < 0$ (рекуперативное торможение).

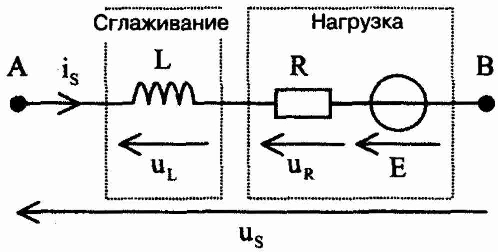


Рис. 33.19. Схема сглаживания тока нагрузки

• ***Режимы работы.***

– От $t = 0$ до $t = \alpha T$ замкнуты K_1 и K_3, разомкнуты K_2 и K_4. Имеем:

$$u_S = U_E = L\frac{di_S}{dt} + Ri_S + E \quad \text{и} \quad i_E = i_S,$$

откуда:

$$i_S = I_{S\,Min}e^{-t/\tau} + \frac{U_E - E}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = L/R.$$

– От $t = \alpha T$ до $t = T$ разомкнуты K_1 и K_3, замкнуты K_2 и K_4. Имеем:

$$u_S = -U_E = L\frac{di_S}{dt} + Ri_S + E \quad \text{и} \quad i_E = -i_S,$$

откуда:

$$i_S = I_{S\,Min}e^{-(t-\alpha T)/\tau} + \frac{U_E - E}{R}(1 - e^{-(t-\alpha T)/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = L/R.$$

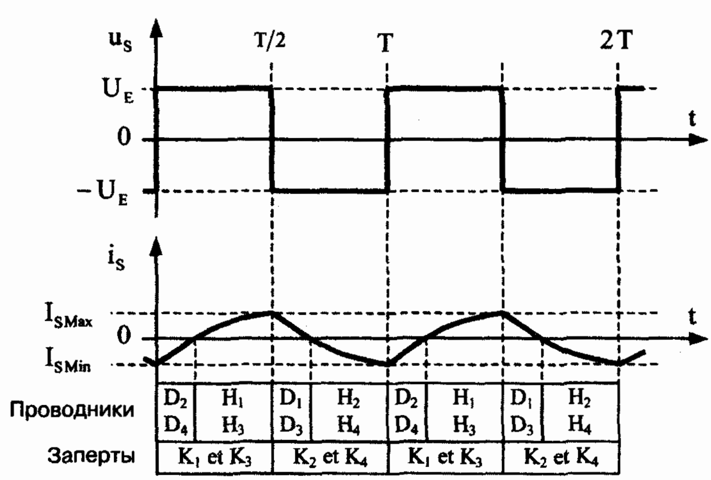


Рис. 33.20. Четырехквадрантный регулятор ($\alpha = 0{,}5$ и $E = 0$)

• ***Средние значения*** (см. рис. 33.19 и 33.20).

$$U_{S\,ср} = \frac{1}{T}\int_0^T u_S dt \quad \Rightarrow \quad U_{S\,ср} = (2\alpha - 1)U_E.$$

$$\begin{cases} u_S = u_L + Ri_S + E, \\ U_{L\,ср} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_{S\,ср} = \frac{U_{S\,ср} - E}{R} = \frac{(2\alpha - 1)U_E - E}{R}.$$

• ***Минимальное и максимальное значения тока. Амплитудный размах.*** Зная, что $i_S(\alpha T) = I_{S\,Max}$ и $i_S(T) = I_{S\,Min}$, находим:

$$I_{S\,Max} = \frac{U_E}{R}\frac{1 - 2e^{-\alpha T/\tau} + e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} - \frac{E}{R}$$

$$\text{и} \quad I_{S\,Max} = \frac{-U_E}{R}\frac{1 - 2e^{-\alpha T/\tau} + e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} - \frac{E}{R},$$

откуда:

$$\Delta I_S = I_{S\,Max} - I_{S\,Min} = \frac{2U_E}{R}\frac{1 - e^{-\alpha T/\tau} - e^{-(1-\alpha)T/\tau} + e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}(1 - e^{-(1-\alpha)T/\tau}).$$

При $\tau \gg T$ выполним преобразования, ограниченные вторым порядком экспоненциальной функции. Получим:

$$\Delta I_S = I_{S\,Max} - I_{S\,Min} \approx \frac{4U_E}{R}\frac{\alpha(1-\alpha)T}{\tau}, \quad \text{где} \quad \tau = L/R.$$

Максимальное значение ΔI_S получаем при $\alpha = 0{,}5$:

$$(\Delta I_S)_{Max} \approx \frac{U_E}{R}\frac{T}{\tau} = \frac{U_E T}{L}.$$

ГЛАВА 34

ИСТОЧНИКИ ИМПУЛЬСНОГО ПИТАНИЯ

Источники импульсного питания или преобразователи постоянного напряжения в постоянное напряжение используются всякий раз, если требуется высокий КПД, низкие габаритно-весовые показатели. Но они являются к тому же более шумящими преобразователями, чем непрерывные источники питания, имеют повышенную колебательность выходных переменных и меньшее быстродействие. Такой источник позволяет получать на выходе меньшее или бо́льшее и/или с противоположным знаком по сравнению со входным напряжение.

- В этой главе рассматривается только установившийся (периодический) режим.
- Для упрощения рассматриваются только идеальные составляющие. Электронный прерыватель представляется условным обозначением согласно гл. 33.

34.1. Преобразователи без гальванической развязки

34.1.1. Вольтопонижающий преобразователь

Структура вольтопонижающего преобразователя представляет собой последовательный регулятор со сглаживанием тока и напряжения LC-цепью. Это преобразователь прямой передачи энергии, т. е. энергия от источника питания в нагрузку передается без промежуточного накопления энергии. Питающее напряжение U_E постоянное, предполагается, что ток в нагрузке I_S постоянный в установившемся режиме.

а) Непрерывная проводимость тока i_L

• ***Режимы работы*** (рис. 34.2). Здесь мы рассматриваем, что напряжение u_S постоянно и равно $U_{S\,ср}$, и, следовательно, запасаемая конденсатором энергия не меняется, что предполагает достаточность значенияЁС.

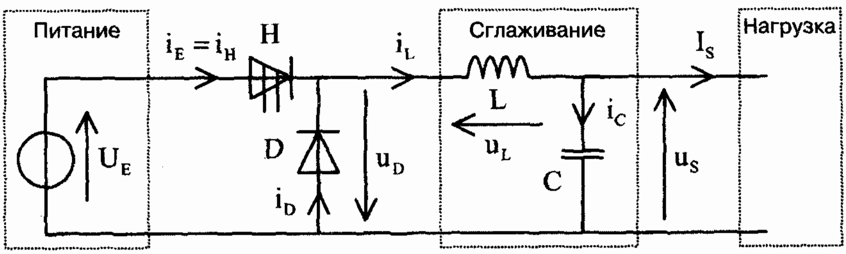


Рис. 34.1. Вольтопонижающий преобразователь

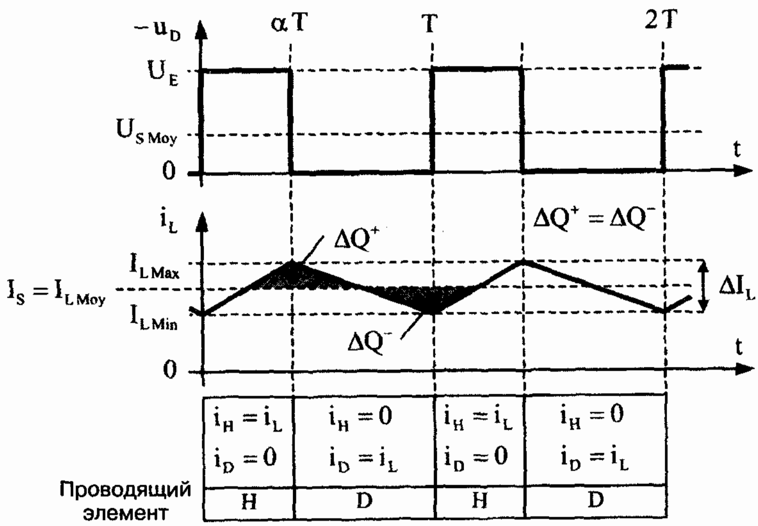


Рис. 34.2. Вольтопонижающий преобразователь в режиме непрерывного тока

– От $t = 0$ до $t = \alpha T$ электронный прерыватель H замкнут, а диод D заперт. Источник питания передает энергию нагрузке и индуктивности. Имеем:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = U_E - U_{S\,cp} \quad \text{и} \quad -u_D = U_E,$$

откуда:

$$i_L = \frac{U_E - U_{S\,cp}}{L}t + I_{L\,Min}.$$

– От $t = \gamma T$ до $t = T$ электронный прерыватель H разомкнут, а диод D находится в проводящем состоянии. Индуктивность передает нагрузке ранее накопленную энергию. Имеем:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = -U_{S\,cp} \quad \text{и} \quad -u_D = 0,$$

откуда:

$$\begin{cases} -u_D = u_L + u_S, \\ U_{L\,cp} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U_{S\,cp} = \alpha U_E,$$

$$\begin{cases} i_L = i_C + I_S, \\ I_{Ccp} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_S = I_{L\,cp} = \frac{I_{L\,Max} + I_{L\,Min}}{2} = \frac{I_{E\,cp}}{\alpha}.$$

• ***Амплитудный размах. Выбор индуктивности.*** Зная, что $i_L(\alpha T) = I_{L\,Max}$ и $i_L(T) = I_{L\,Min}$, получим:

$$\Delta I_L = I_{L\,Max} - I_{L\,Min} = \frac{\alpha(1-\alpha)TU_E}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\alpha(1-\alpha)TU_E}{\Delta I_L}.$$

Вопрос. Рассчитать α, чтобы ΔI_L был наибольшим. Вывести отсюда $(\Delta I_L)_{Max}$.

Ответ. Решая уравнение $d(\Delta I_L)/dt = 0$, найдем, что ΔI_L будет наибольшим при $\alpha = 0{,}5$. Следовательно:

$$(\Delta I_L)_{Max} = \frac{U_E T}{4L}.$$

• ***Выбор конденсатора.*** Здесь мы полагаем, что напряжение u_S мало изменяется в окрестности значения $U_{S\,cp}$. Накапливаемый конденсатором C заряд увеличивается при $i_C > 0$ ($\Leftrightarrow i_L > I_S$). Но $i_L > I_S$ при $\alpha T/2 < t < (1+\alpha)T/2$. Повышение заряда определяется согласно следующим выражениям:

$$\int\limits_{\alpha T/2}^{(1+\alpha)T/2} dq = C \int\limits_{U_{S\,Min}}^{U_{S\,Max}} du_S = \int\limits_{\alpha T/2}^{(1+\alpha)T/2} i_C dt = \int\limits_{\alpha T/2}^{(1+\alpha)T/2} (i_L - I_S)dt =$$

$$= \Delta Q^+ = \frac{1}{2}\frac{\Delta I_L}{2}\frac{T}{2},$$

откуда:

$$\Delta Q^+ = C\Delta U_S = C(U_{S\,Max} - U_{S\,Min}) = \frac{T\Delta I_L}{8} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{T\Delta I_L}{8\Delta U_S}.$$

б) Прерывистая проводимость тока i_L

• ***Рабочие режимы*** (рис. 34.3). Здесь рассматриваем напряжение u_S постоянным и равным $U_{S\,cp}$ (на рис. 34.3 $U_{S\,cp} = U_{S\,Moy}$).

– От $t = 0$ до $t = \alpha T$ электронный прерыватель H замкнут, а диод D заперт. Имеем:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = U_E - U_{S\,cp} \quad \text{и} \quad -u_D = U_E,$$

откуда:

$$i_L = \frac{U_E - U_{S\,cp}}{L}t, \text{ так как } I_{L\,Min} = 0.$$

– От $t = \alpha T$ до $t = \gamma T$ электронный прерыватель H разомкнут, а диод D находится в проводящем состоянии. Имеем:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = -U_{S\,cp} \quad \text{и} \quad -u_D = 0,$$

откуда:

$$i_L = \frac{-U_{S\,cp}}{L}(t - \alpha T) + I_{L\,Max}.$$

– От $t = \gamma T$ до $t = T$ электронный прерыватель H разомкнут, а диод D заперт (отсутствие энергии в индуктивности). Имеем:

$$i_L = 0 \quad \text{и} \quad -u_D = U_{S\,Max}.$$

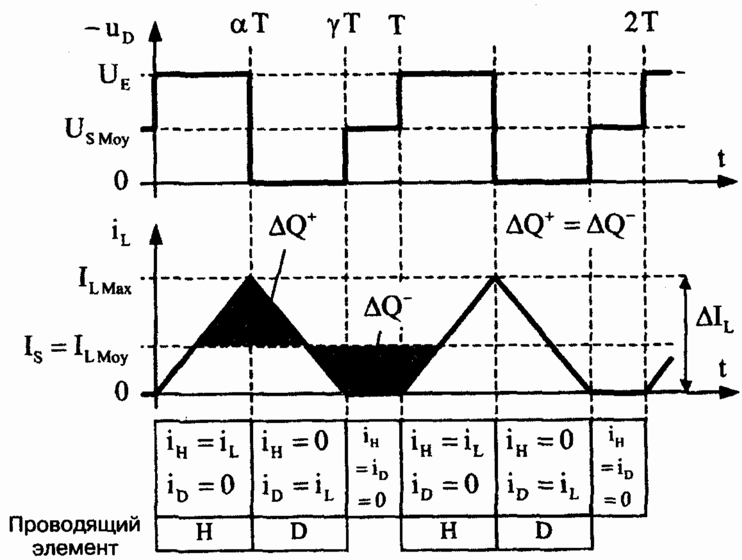


Рис. 34.3. Вольтопонижающий преобразователь в режиме прерывистого тока

Вопрос. Дать выражение значения γ затухания тока i_L. Из него определить предел α, для которого проводимость становится прерывистой.

Ответ.

$$\begin{cases} i_L(\gamma T) = \frac{-U_{S\,cp}}{L}(\gamma - \alpha)E + I_{L\,Max} = 0, \\ I_{L\,Max} = \frac{\alpha(U_E - U_{S\,cp})T}{L}, \end{cases} \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\alpha U_E}{U_{S\,cp}}.$$

Проводимость прерывистая, если

$$\gamma \leqslant 1 \Rightarrow \alpha \leqslant \frac{U_{S\,cp}}{U_E}.$$

• ***Средние значения.***

$$\begin{cases} -u_D = u_L + u_S, \\ U_{L\,cp} = 0, \\ -U_{D\,cp} = \alpha U_E + (1-\lambda)U_{S\,cp}, \end{cases} \Rightarrow \quad U_{S\,cp} = \frac{\alpha}{\gamma}U_E.$$

$$\begin{cases} li_L = i_C + I_S, \\ I_{Ccp} = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad I_S = I_{L\,cp} = \frac{\gamma I_{L\,Max}}{2} = \frac{\lambda I_{E\,cp}}{\alpha}.$$

Или:

$$I_{L\,Max} = \frac{\alpha(U_E - U_{S\,cp})E}{L} \quad \Rightarrow \quad U_{S\,cp} = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2LI_S + \alpha^2 U_E T}.$$

• ***Амплитудный размах.*** Зная, что $i_L(\alpha T) = I_{L\,Max}$ и $i_L(\gamma T) = I_{L\,Min}$, получим:

$$\Delta I_L = I_{L\,Max} = \frac{U_E - U_{S\,cp}}{L}\alpha T = \frac{\alpha(\gamma-\alpha)TU_E}{\gamma L}.$$

Граница между непрерывной и прерывистой проводимостями соответствует $\gamma = 1$. Тогда:

$$\Delta I_{L(\gamma=1)} = I_{LMax(\gamma=1)} = 2I_S \Rightarrow I_{L(\gamma=1)} = \frac{\alpha(1-\alpha)TU_E}{2I_S}.$$

Вопрос. Для границы между непрерывной и прерывистой проводимостями дать расчет значения α, для которого значение $L_{(\gamma=1)}$ будет максимальным. Вывести затем значение $L_{(\gamma=1)Max}$.

Ответ. Решая уравнение $dL_{(\gamma=1)}/d\alpha = 0$, найдем, что индуктивность $L_{(\gamma=1)}$ максимальна при $\alpha = 0{,}5$. Следовательно: $L_{(\gamma=1)Max} = \frac{TU_E}{8I_S}$.

• ***Средняя мощность. Выбор индуктивности.***

$$\begin{cases} P_S = U_{S\,cp}I_S = U_E I_{E\,cp} = \frac{\alpha I_{LMax}U_E}{2}, \\ I_{L\,Max} = \frac{\alpha(U_E - U_{S\,cp})}{L}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_S = P_E = \frac{\alpha^2 U_E(U_E - U_{S\,cp},)T}{2L}, \\ L = \frac{\alpha^2 U_E(U_E - U_{S\,cp})T}{2P_E}. \end{cases}$$

34.1.2. Вольтоповышающий преобразователь (рис. 34.4)

Структура вольтоповышающего преобразователя содержит параллельный регулятор со сглаживанием выходного напряжения конденсатором. Преобразователь осуществляет прямой перенос энергии. Напряжение источника питания U_0 постоянное, и предполагается, что ток в нагрузке I_S в установившемся режиме постоянный. Здесь рассматривается только случай непрерывности проводимости тока i_L.

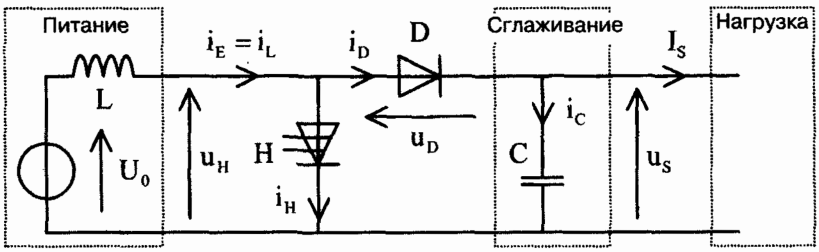


Рис. 34.4. Вольтоповышающий преобразователь

• ***Рабочие режимы*** (рис. 34.5). Здесь рассматриваем напряжение u_S постоянным и равным $U_{S\,ср}$ (на рис. 34.5 $U_{S\,ср} = U_{S\,Moy}$).

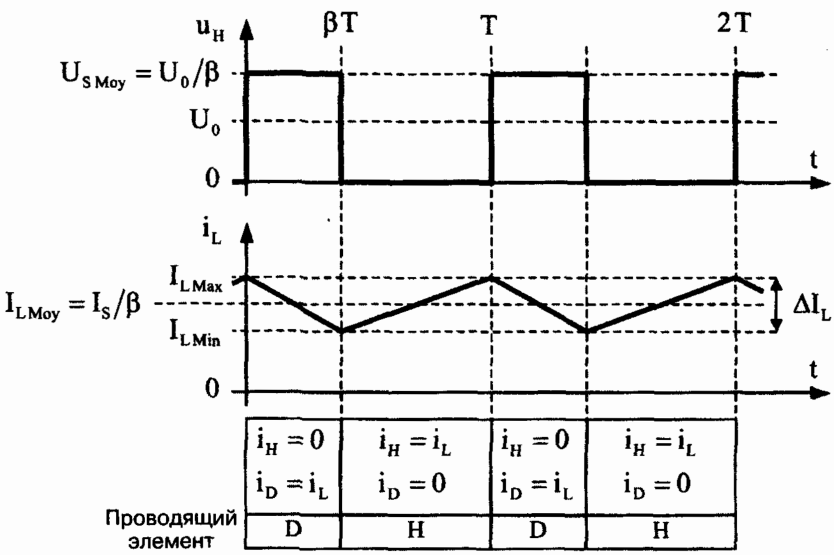


Рис. 34.5. Вольтоповышающий преобразователь с непрерывной проводимостью

– От $t = 0$ до $t = \beta T$ электронный прерыватель H разомкнут, а диод D находится в проводящем состоянии. Имеем:

$$U_0 = L\frac{di_L}{dt} + U_{S\,ср} \quad \text{и} \quad u_H = U_{S\,ср},$$

откуда:

$$i_L = \frac{U_0 - U_{S\,ср}}{L}t + I_{L\,Max}.$$

– От $t = \beta T$ до $t = T$ электронный прерыватель H замкнут, а диод D заперт. Имеем:

$$U_0 = L\frac{di_L}{dt} \quad \text{и} \quad u_H = 0,$$

откуда:

$$i_L = \frac{U_0}{L}(t - \beta T) + I_{L\,Min}.$$

• ***Средние значения.***

$$\begin{cases} U_0 = u_L + u_H, \\ U_{L\,ср} = 0, \\ U_{Hср} = \beta U_{S\,ср}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U_{S\,ср} = \frac{U_0}{1-\alpha}, \ \text{полагая } \beta = 1 - \alpha.$$

$$\begin{cases} i_D = i_C + I_S, \\ I_{Cср} = 0, \\ I_{D\,ср} = \delta\frac{I_{L\,Max}+I_{L\,Min}}{2}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_S = (1-\alpha)\frac{I_{L\,Max} + I_{L\,Min}}{2} = (1-\alpha)I_{Lср}.$$

Примечание. В действительности напряжение $U_{S\,ср}$ не может быть бесконечным, если α стремится к единице. Приведенное выражение $U_{S\,ср}$ — это результат аппроксимации, в частности, пренебрегли активным сопротивлением последовательной катушки индуктивности (см. гл. 33).

• ***Амплитудный размах. Выбор индуктивности.*** При $i_L(\beta T) = I_{L\,Min}$ и $i_L(T) = I_{L\,Max}$ получим:

$$\Delta I_L = I_{L\,Max} - I_{L\,Min} = \frac{\alpha U_0 T}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\alpha U_0 T}{\Delta I_L}.$$

• ***Выбор конденсатора.*** Здесь мы рассматриваем, что напряжение u_S мало меняется в окрестности значения $U_{S\,ср}$. Накапливаемый конденсатором C заряд увеличивается при $i_C > 0$ ($\Leftrightarrow i_D > I_S$). Чтобы он повышался во время от $t = 0$ до $t = \beta T$, нужно, чтобы $I_S \leqslant I_{L\,Min}$. Если это условие выполняется, то конденсатор разряжается только от $t = \beta T$ до $t = T$. Тогда:

$$\Delta Q = C\Delta U_S = C(U_{S\,Max} - U_{S\,Min}) = \alpha I_S T \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\alpha I_S T}{\Delta U_S}.$$

Вопрос. Дать выражение условия $I_S \leqslant I_L$ в функции относительного амплитудного размаха $\Delta I_L / I_{L\,ср}$.

Ответ. Согласно рис. 34.5 имеем:

$$I_{L\,Min} = I_{L\,ср} - \frac{\Delta I_L}{2} \quad \text{и} \quad I_S = \beta I_{L\,ср},$$

откуда:

$$I_S \leqslant I_{L\,Min} \Leftrightarrow \beta I_{L\,ср} < I_{L\,ср} - \frac{\Delta I_L}{2} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta I_L}{I_{L\,ср}} \leqslant 2\alpha.$$

34.1.3. Инвертирующий напряжение преобразователь (рис. 34.6)

Структура инвертирующего напряжение преобразователя — это структура регулятора с накоплением индуктивной энергии при сглаживании напряжения конденсатором. Напряжение питания U_E постоянное, и предполагается, что ток в нагрузке I_S в установившемся режиме также постоянный. Здесь рассматривается только случай непрерывной проводимости тока i_L.

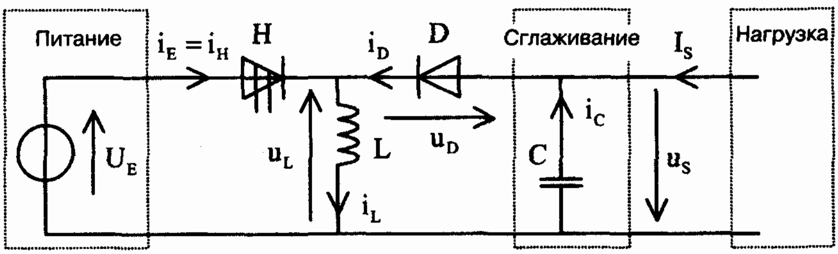


Рис. 34.6. Инвертирующий напряжение преобразователь

- ***Рабочие режимы*** (рис. 34.7). Здесь рассматриваем напряжение u_S постоянным и равным $U_{S\,cp}$ (на рис. 34.7 $U_{S\,cp} = U_{S\,Moy}$).

  – От $t = 0$ до $t = \alpha T$ электронный прерыватель H замкнут, а диод D заперт. От источника питания энергия передается индуктивности. Имеем:
$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = U_E,$$
  откуда
$$i_L = \frac{U_E}{L}t + I_{L\,Min},$$
  – От $t = \alpha T$ до $t = T$ электронный прерыватель H разомкнут, а диод D находится в проводящем состоянии. Ранее накопленная в индуктивности энергия передается в нагрузку. Имеем:
$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = -U_{S\,cp},$$
  откуда
$$i_L = \frac{-U_{S\,cp}}{L}(1 - \alpha T) + I_{L\,Max}.$$

- ***Средние значения.***

$$U_{L\,cp} = \alpha U_E - (1 - \alpha)U_{S\,cp} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{S\,cp} = \frac{\alpha U_E}{1 - \alpha}.$$

$$\begin{cases} i_D = i_C + I_S, \\ I_{C\,cp} = 0, \\ I_{D\,cp} = (1-\alpha)\frac{I_{L\,Max}+I_{L\,Min}}{2}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_S = (1-\alpha)I_{L\,cp},$$

$$I_{E\,cp} = \alpha\frac{I_{L\,Max}+I_{L\,Min}}{2} = \alpha I_{L\,cp} \quad \Rightarrow \quad I_S = \frac{1-\alpha}{\alpha}I_{E\,cp}.$$

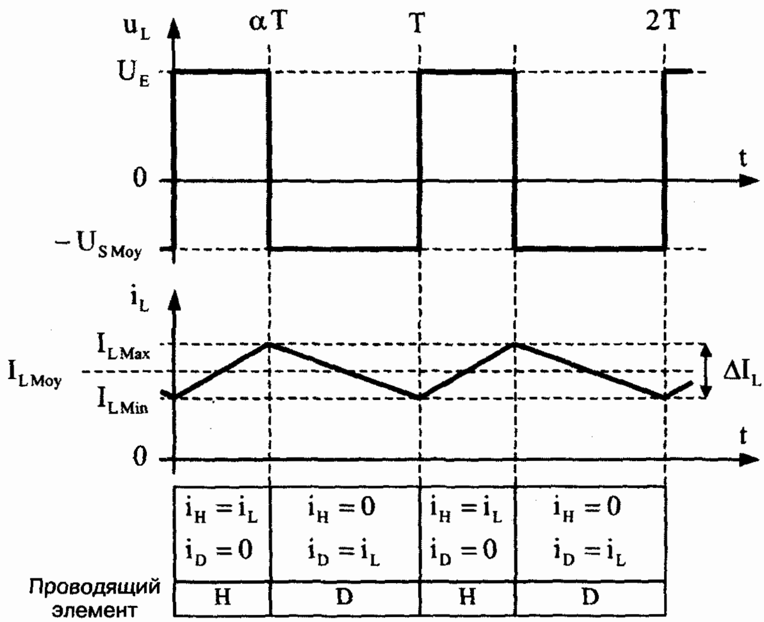


Рис. 34.7. Инвертор напряжения с непрерывной проводимостью

• ***Амплитудный размах. Выбор индуктивности.*** При $i_L(\alpha T) = I_{L\,Max}$ и $i_L(T) = I_{L\,Min}$ получим:

$$\Delta I_L = I_{L\,Max} - I_{L\,Min} = \frac{\alpha U_E T}{L} = \frac{U_{S\,cp}}{L}(1-\alpha)T \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\alpha U_E T}{\Delta I_L}.$$

• ***Выбор конденсатора.*** Здесь мы рассматриваем, что напряжение u_S мало меняется в окрестности значения $U_{S\,cp}$. Накапливаемый конденсатором C заряд увеличивается при $i_C > 0$ ($\Leftrightarrow i_D > I_S$). Чтобы он повышался во время от $t = \alpha T$ до $t = T$, нужно, чтобы $I_S \leqslant I_{L\,Min}$. Если это условие выполняется, то конденсатор разряжается только от $t = 0$ до $t = \alpha T$. Тогда:

$$\Delta Q = C\Delta U_S = C(U_{S\,Max} - U_{S\,Min}) = \alpha I_S T \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\alpha I_S T}{\Delta U_S}.$$

Примечание. Подобно вопросу в § 34.1.2 условие $I_S \leqslant I_{L\,Min}$ выражается в функции относительного амплитудного размаха $\Delta I_L / I_{L\,cp}$. А именно:

$$\frac{\Delta I_L}{I_{L\,cp}} \leqslant 2\alpha.$$

34.2. Преобразователи с гальванической развязкой

34.2.1. Преобразователь с рекуперацией энергии (рис. 34.8)

Это преобразователь с индуктивным накоплением энергии. Передача энергии источника питания нагрузке осуществляется через промежуточное накопление в индуктивностях трансформатора. Напряжение питания U_E постоянное, и предполагается, что ток в нагрузке I_S в установившемся режиме также постоянный.

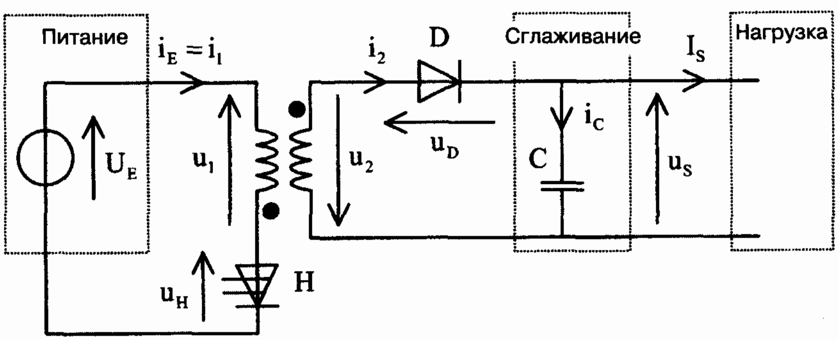


Рис. 34.8. Изолированный преобразователь с рекуперацией энергии

а) Эквивалентная схема трансформатора (рис. 34.9)

Предполагается трансформатор линейным, без рассеяния и потерь (см. гл. 15). Имеем:

$$\Re\varphi = n_1 i_1 + n_2 i_2 \qquad \text{— закон Гопкинсона,}$$

откуда:

$$i_1 + m i_2 = i_{10}, \quad \text{где} \quad m = n_2/n_1;$$

$$n_1\varphi = L i_{10} \quad \text{— потокосцепление с первичной обмоткой;}$$

$$u_1 = n_1 \frac{d\varphi}{dt}, \quad u_2 = n_2 \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{— закон Ленца–Фарадея.}$$

Здесь $\Re$ — магнитное сопротивление магнитопровода (см. гл. 4), φ — поток намагничивания по сечению магнитной цепи (т. е. поток на виток),

n_1 (соответственно n_2) — число витков первичной (соответственно вторичной) обмотки, i_{10} — ток намагничивания, $L = n_1^2/\Re$ — собственная индуктивность первичной обмотки.

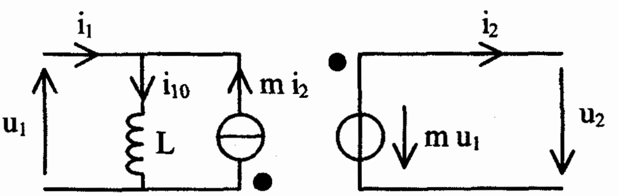


Рис. 34.9. Эквивалентная схема трансформатора без рассеяния и потерь ($m > 0$)

б) Неполное размагничивание

Это означает непрерывность потока φ или непрерывность намагничивающего тока i_{10}. Ток i_2 не спадает до нуля в течение фазы размагничивания.

• ***Рабочие режимы*** (рис. 34.10). Здесь рассматриваем напряжение u_S постоянным и равным $U_{S\,ср}$ (на рис. 34.10 $U_{S\,ср} = U_{S\,Moy}$).

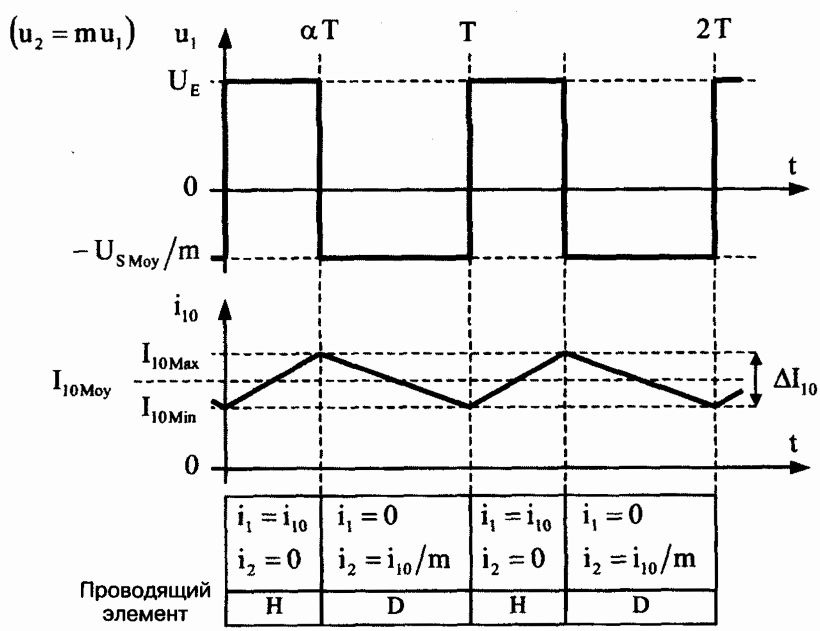


Рис. 34.10. Диаграмма неполного размагничивания

– От $t = 0$ до $t = \alpha T$ электронный прерыватель H замкнут $\Rightarrow u_1 = U_E \Rightarrow u_2 = mU_E > 0 \Rightarrow$ диод D заперт $\Rightarrow i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_{10}$.

От источника питания энергия передается индуктивности. Имеем:

$$u_1 = L\frac{di_{10}}{dt} = U_E,\ \text{откуда}\ i_{10} = \frac{U_E}{L}t + I_{10Min},$$

– От $t = \alpha T$ до $t = T$ электронный прерыватель H разомкнут $\Rightarrow i_1 = 0$ $\Rightarrow i_{10} = mi_2 > 0 \Rightarrow$ диод D находится в проводящем состоянии $\Rightarrow$ $u_2 = -U_{S\,cp} \Rightarrow u_1 = -U_{S\,cp}/m$. Ранее накопленная в индуктивности энергия передается в нагрузку. Имеем:

$$u_1 = L\frac{di_{10}}{dt} = -U_{S\,cp}/m,\ \text{откуда}\ i_{10} = \frac{-U_{S\,cp}}{mL}(1-\alpha T) + I_{10Max}.$$

Вопрос. Дать выражение напряжения u_H. Из него вывести максимальное значение.

$$u_H = U_E - u_1 \Rightarrow U_{HMax} = U_E + \frac{U_{S\,cp}}{m}.$$

• ***Средние значения.***

$$U_{1\,cp} = \alpha U_E - (1-\alpha)U_{S\,cp}/m = 0 \quad\Rightarrow\quad U_{S\,cp} = \frac{m\alpha U_E}{1-\alpha}.$$

$$\begin{cases} i_2 = i_C + I_S, \\ I_{Ccp} = 0, \\ I_{2cp} = \frac{(1-\alpha)}{m}\frac{I_{10Max}+I_{10Min}}{2}, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad I_S = \frac{(1-\alpha)}{m}I_{10cp}$$

$$I_{E\,cp} = \alpha\frac{I_{10Max}+I_{10Min}}{2} = \alpha I_{10cp} \quad\Rightarrow\quad I_S = \frac{1-\alpha}{m\alpha}I_{E\,cp}.$$

Примечание. Работа трансформатора при неполном размагничивании происходит с постоянным значением среднего выходного напряжения при заданном значении коэффициента заполнения.

• ***Амплитудный размах. Выбор индуктивности.*** При $i_{10}(\alpha T) = I_{10Max}$ и $i_{10}(T) = I_{10Min}$ получим:

$$\Delta I_{10} = I_{10Max} - I_{10Min} = \frac{\alpha U_E T}{L} \quad\Rightarrow\quad L = \frac{\alpha U_E T}{\Delta I_{10}}.$$

• ***Средняя мощность.***

$$\begin{cases} P_S = U_{S\,cp}I_S = U_{E\,cp}I_{E\,cp} = \frac{\alpha(I_{1Max}+I_{1Min})U_E}{2}, \\ (I_{1Max} - I_{1Min}) = (I_{10Max} + I_{10Min}) = \frac{\alpha U_E T}{L}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_S = P_E = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2L} + \alpha U_E I_{1Min},$$

где I_{Min} зависит от нагрузки.

• ***Выбор конденсатора.*** Здесь мы рассматриваем, что напряжение u_S мало меняется в окрестности значения $U_{S\,cp}$. Накапливаемый конденсатором C заряд увеличивается при $i_C > 0$ ($\Leftrightarrow i_2 > I_S$). Чтобы он повышался во время от $t = \alpha T$ до $t = T$, нужно, чтобы $I_S \leqslant I_{2Min} = I_{10Min}/m$. Если это условие выполняется, то конденсатор разряжается только от $t = 0$ до $t = \alpha T$. Тогда:

$$\Delta Q = C\Delta U_S = C(U_{S\,Max} - U_{S\,Min}) = \alpha I_S T \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\alpha I_S T}{\Delta U_S}.$$

Вопрос. Дать выражение условия $I_S \leqslant I_L = I_{10Min}$ в функции относительного амплитудного размаха $\Delta I_L/I_{L\,cp}$.

Ответ. Согласно рис. 34.10 имеем:

$$I_{10Min} = I_{10cp} - \frac{\Delta I_{10}}{2} \quad \text{и} \quad I_S = (1-\alpha)I_{10cp}/m,$$

откуда:

$$I_S \leqslant I_{2Min} \Leftrightarrow (1-\alpha)I_{10cp} \leqslant I_{10cp} - \frac{\Delta I_{10}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta I_{10}}{I_{10cp}} \leqslant 2\alpha.$$

в) Полное размагничивание

Это означает прерывистость потока φ или намагничивающего тока i_{10}. Ток i_2 спадает до нуля в течение фазы размагничивания.

• ***Рабочие режимы*** (рис. 34.11). Здесь рассматриваем напряжение u_S постоянным и равным $U_{S\,cp}$ (на рис. 34.11 $U_{S\,cp} = U_{S\,Moy}$).

– От $t = 0$ до $t = \alpha T$ электронный прерыватель H замкнут $\Rightarrow u_1 = U_E \Rightarrow u_2 = mU_E > 0 \Rightarrow$ диод D заперт $\Rightarrow i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_{10}$. Имеем:

$$u_1 = L\frac{di_{10}}{dt} = U_E, \text{ откуда } i_{10} = \frac{U_E}{L}t, \text{ так как} I_{10Min} = 0.$$

– От $t = \alpha T$ до $t = \gamma T$ электронный прерыватель H разомкнут $\Rightarrow i_1 = 0 \Rightarrow i_{10} = mi_2 > 0 \Rightarrow$ диод D находится в проводящем состоянии $\Rightarrow u_2 = -U_{S\,cp} \Rightarrow u_1 = -U_{S\,cp}/m$. Ранее накопленная в индуктивности энергия передается в нагрузку. Имеем: $u_1 = L\frac{di_{10}}{dt} = -U_{S\,cp}/m$, откуда $i_{10} = \frac{-U_{S\,cp}}{mL}(1 - \alpha T) + I_{10Max}$.

– От $t = \gamma T$ до $t = T$ электронный прерыватель H разомкнут $\Rightarrow i_1 = 0$ и $i_{10} = mi_2 = 0 \Rightarrow$ диод D заперт $\Rightarrow u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$.

Вопрос. Дать выражение аргумента, при котором ток намагничивания спадает до нуля. Отсюда вывести предельное значение α, при котором имеет место полное размагничивание.

Ответ.

$$\left\{\begin{array}{l} li_{10}(\gamma T) = \frac{U_{S\,cp}}{mL}(\gamma - \alpha)T + I_{10Max} = 0, \\ I_{10Max} = \frac{\alpha U_E T}{L}, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha\left(1 + \frac{mU_E}{U_{S\,cp}}\right).$$

Размагничивание полное, если $\gamma \leqslant 1 \Rightarrow \alpha \leqslant \frac{U_{S\,cp}}{U_{S\,cp} + mU_E}$.

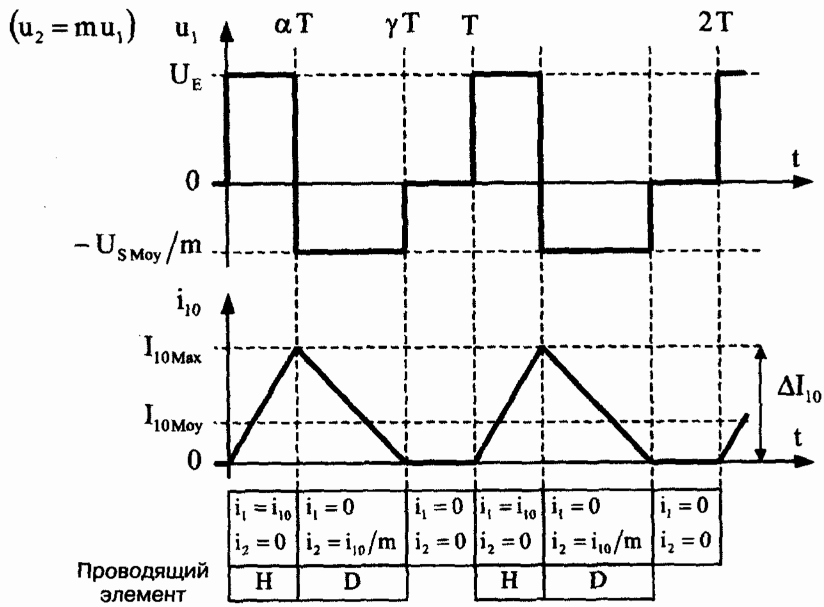


Рис. 34.11. Полное размагничивание

• ***Средние значения.***

$$U_{1\text{ср}} = \alpha U_E - (\lambda - \alpha)U_{S\,\text{ср}}/m = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{S\,\text{ср}} = \frac{m\alpha U_E}{\gamma - \alpha}.$$

$$\begin{cases} i_2 = i_C + I_S, \\ I_{C\text{ср}} = 0, \\ I_{2\text{ср}} = \frac{(\gamma-\alpha)}{m}\frac{I_{10Max}}{2} = \frac{(\gamma-\alpha)}{m\lambda}I_{10\text{ср}}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_S = \frac{(\gamma-\alpha)}{m\lambda}I_{10\text{ср}},$$

$$I_{E\,\text{ср}} = \alpha\frac{I_{10Max}}{2} = \alpha I_{10\text{ср}}/\gamma \quad \Rightarrow \quad I_S = \frac{\gamma - \alpha}{m\alpha}I_{E\,\text{ср}}.$$

Или:

$$I_{10Max} = \frac{\alpha U_E T}{L} \Rightarrow \quad U_{S\,\text{ср}} = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2LI_S}.$$

• ***Амплитудный размах. Выбор индуктивности.*** При $i_{10}(\alpha T) = I_{10Max}$ и $i_{10}(\gamma T) = I_{10Min}$ получим:

$$\Delta I_{10} = I_{10Max} = \frac{\alpha U_E T}{L}.$$

Граница между полным и неполным размагничиванием соответствует $\gamma = 1$, откуда:

$$\Delta I_{10(\gamma=1)} = I_{10Max(\gamma=1)} = \frac{2mI_S}{1-\alpha} \Rightarrow L_{(\gamma=1)} = \frac{\alpha(1-\alpha)TU_E}{2mI_S}.$$

• ***Средняя мощность.***

$$P_S = U_{S\,ср} I_S = U_{E\,ср} I_{E\,ср} \quad \Rightarrow \quad P_S = P_E = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2P_E}.$$

Примечание. В режиме полного размагничивания трансформатор работает с постоянной средней выходной мощностью при заданном значении коэффициента заполнения.

• ***Выбор конденсатора.*** Здесь мы предполагаем, что напряжение u_S мало меняется в окрестности значения $U_{S\,ср}$. Накапливаемый конденсатором C заряд увеличивается при $i_C > 0$ ($\Leftrightarrow i_2 > I_S$), т. е. между $t = \alpha T$ и $t = T$ будет $I_S \leqslant i_2(\sigma T)$, где σT — это отрезок времени, при котором $I_S = i_2(\sigma T)$. Зная, что конденсатор разряжается только от $t = 0$ до $t = \alpha T$, получим:

$$\Delta Q = C\Delta U_S = C(U_{S\,Max} - U_{S\,Min}) = (\alpha + 1 - \sigma) I_S T \ \Rightarrow\ C = \frac{(\alpha + 1 - \sigma) I_S T}{\Delta U_S}.$$

Вопрос. Дать выражение длительности σT.

Ответ.

$$I_S = i_2(\sigma T) \Leftrightarrow m I_S = i_{10}(\sigma T) = \frac{-U_{S\,ср}}{mL}(\sigma - \alpha) T + I_{10Max},$$

где

$$I_S = I_{2ср} = \frac{\lambda - \alpha}{m} \frac{I_{10Max}}{2}; \quad I_{10Max} = \frac{\alpha U_E T}{L}; \quad U_{S\,ср} = \frac{m\alpha U_E}{\gamma - \alpha},$$

откуда

$$\sigma = \gamma - \frac{(\gamma - \alpha)^2}{2}.$$

34.2.2. Преобразователь прямой передачи энергии с гальванической развязкой

Напряжение питания U_A постоянное, и предполагается, что ток в нагрузке в установившемся режиме такого преобразователя (рис. 34.12) постоянный.

а) Эквивалентная схема трансформатора (рис. 34.13)

Предполагается трансформатор линейным, без рассеяния и потерь (см. гл. 15). Имеем:

$$\Re\varphi = n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = n_1 i_{10} \text{ — закон Гопкинсона, откуда:}$$

$$i_1 + m_2 i_2 + m_3 i_3 = i_{10}, \quad \text{где} \quad m_2 = n_2/n_1 \quad \text{и} \quad m_3 = n_3/n_1;$$

$$n_1 \varphi = L i_{10} \text{ — потокосцепление с первичной обмоткой;}$$

$$u_1 = n_1 \frac{d\varphi}{dt}, \quad u_2 = n_2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad u_3 = n_3 \frac{d\varphi}{dt} \text{ — закон Ленца–Фарадея.}$$

Здесь $\Re$ — магнитное сопротивление магнитопровода (см. гл. 4), φ — поток намагничивания через сечение магнитной цепи (т. е. поток на виток), n_1 (соответственно n_2 и n_3) — число витков первичной (соответственно вторичной и третичной) обмотки, i_{10} — ток намагничивания, $L = n_1^2/\Re$ — собственная индуктивность первичной обмотки.

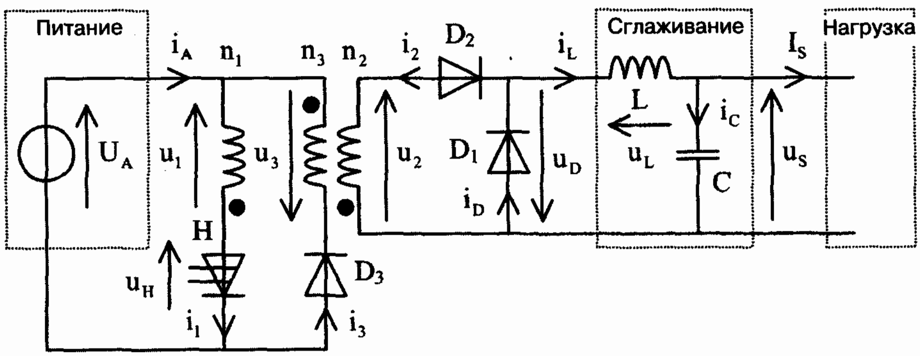
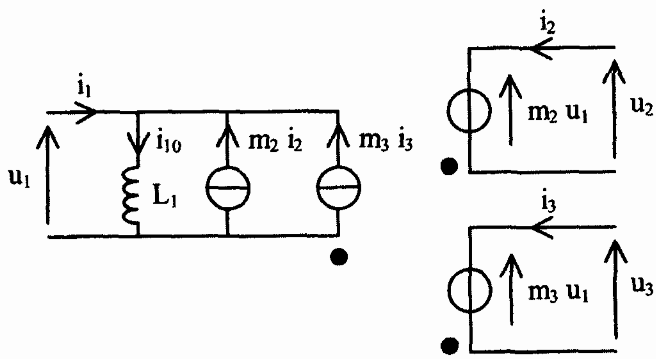


Рис. 34.12. Преобразователь прямой передачи энергии

Рис. 34.13. Эквивалентная схема трансформатора без рассеяния и потерь (m_2 и $m_3 > 0$)



б) Рабочие режимы (рис. 34.14)

Здесь рассматриваем напряжение u_S постоянным и равным $U_{S\,ср}$.

От $t = 0$ до $t = \alpha T$ электронный прерыватель H замкнут $\Rightarrow u_1 = U_A \Rightarrow$

(1) $u_2 = m_2 u_1 = m_2 U_A > 0 \Rightarrow$ диод D_2 находится в проводящем состоянии, а диод D_1 заперт. Энергия от источника питания поступает нагрузке и индуктивности. Имеем:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = m_2 U_A - U_{S\,ср}, \text{ откуда: } i_L = \frac{m_2 U_A - U_{S\,ср}}{L} t + I_{L\,Min}.$$

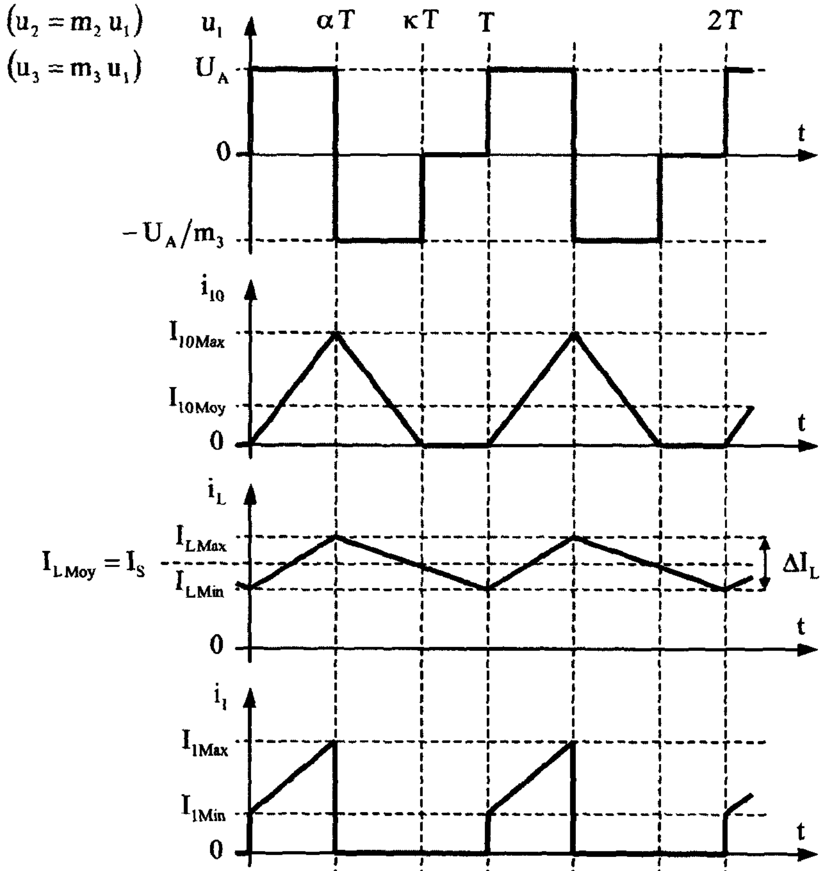
(2) $u_3 = m_3 u_1 = m_3 U_A > 0 \Rightarrow$ диод D_3 заперт $\Rightarrow i_3 = 0$;

(3) $u_1 = L_1 \frac{di_{10}}{dt} = U_A$, откуда:

$$i_{10} = \frac{U_A}{L_1} t + I_{10Min}, \quad \text{где} \quad I_{10Min} = 0 \Rightarrow I_{10Max} = \frac{\alpha T U_A}{L_1}.$$

Или $i_{10} = i_1 + m_2 i_2 + m_3 i_3$, где $-i_2 = i_L$ и $i_3 = 0$, откуда:

$$i_1 = i_{10} + m_2 i_L = \frac{U_A}{L_1} t + m_2 \left(\frac{m_2 U_A - U_{S\,cp}}{L} t + I_{L\,Min} \right).$$



	$-i_2 = i_L$, $i_3 = 0$, $i_D = 0$	$-i_2 = 0$, $i_3 = i_{10}/m_3$, $i_D = i_L$	$i_2 = 0$, $i_3 = 0$, $i_D = i_L$	$-i_2 = i_L$, $i_3 = 0$, $i_D = 0$	$-i_2 = 0$, $i_3 = i_{10}/m_3$, $i_D = i_L$	$i_2 = 0$, $i_3 = 0$, $i_D = i_L$
Проводящие элементы	H	D_3		H	D_3	
	D_2	D_1		D_2	D_1	

Рис. 34.14. Непрерывность тока i_L

От $t = \alpha T$ до $t = \kappa T$ электронный прерыватель H разомкнут $\Rightarrow i_1 = 0 \Rightarrow i_{10} = m_2 i_2 + m_3 i_3 > 0$ (нет разрывов тока i_{10}), и он может только снижаться (нет источника для его повышения) $\Rightarrow u_1 \leqslant 0 \Rightarrow$

(1) $u_2 = m_2 u_1 < 0 \Rightarrow$ диод D_2 заперт, а диод D_1 находится в проводящем состоянии $\Rightarrow i_2 = 0$. Ранее накопленная в индуктивности L энергия передается в нагрузку. Имеем:

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = -U_{S\,cp}, \text{ откуда } i_L = \frac{-U_{S\,cp}}{L}(1 - \alpha T) + I_{L\,Max}.$$

(2) $u_3 = m_3 u_1 < 0 \Rightarrow$ диод D находится в проводящем состоянии $\Rightarrow$ $u_3 = -U_A$.

(3) $u_1 = L_1 \frac{di_0}{dt} = \frac{u_3}{m_3} = \frac{-U_A}{m_3}$, откуда: $i_{10} = \frac{-U_A}{m_3 L_1}(1 - \alpha T) + I_{10Max}$, где $i_{10} = m_3 i_3$.

От $t = \kappa T$ до $t = T$ электронный прерыватель H разомкнут, и $i_{10} = 0$, так как трансформатор полностью размагничен $\Rightarrow u_1 = u_2 = u_3 = 0$, а ток i_L продолжает спадать: $i_L = \frac{-U_{S\,cp}}{L}(t - \alpha T) + I_{L\,Max}$.

Примечание. Третья обмотка обеспечивает размагничивание трансформатора, которое должно быть полным во избежание насыщения магнитной цепи и для получения хороших рабочих показателей. Иначе говоря, намагничивающий ток должен спадать до нуля. Это вызывает некоторые сложности, касающиеся максимального значения α:

$$i_{10}(T) = \frac{-U_A}{m_3 L_1}(1 - \alpha_{Max})T + \frac{\alpha_{Max} T U_A}{L_1} = 0,$$

откуда: $\alpha_{Max} = \frac{1}{1+m_3}$ (распространенный случай: $m_3 = 1 \Rightarrow \alpha_{Max} = 0{,}5$).

в) Эквивалентная схема вторичной стороны (рис. 34.15)

Эта схема идентична схеме вольтоповышающего гальванически связанного преобразователя (см. § 34.1.1), для которой мы вывели основные соотношения (при непрерывном токе i_L).

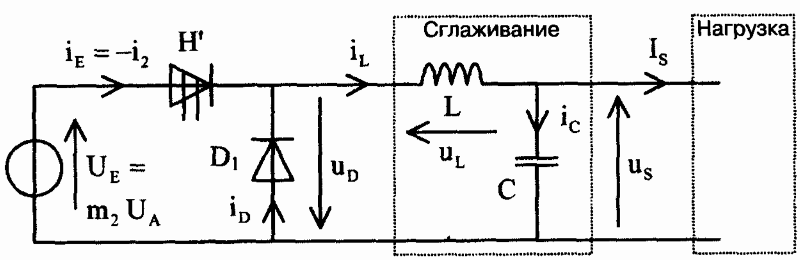


Рис. 34.15. Эквивалентная схема вторичной стороны

$$U_{S\,cp} = \alpha m_2 U_A, \quad I_S = I_{L\,cp} = \frac{I_{L\,Max} + I_{L\,Min}}{2} = \frac{I_{E\,cp}}{\alpha},$$

$$\Delta I_L = I_{L\,Max} - I_{L\,Min} = \frac{\alpha(1-\alpha)Tm_2U_A}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\alpha(1-\alpha)Tm_2U_A}{\Delta I_L},$$

$$\Delta Q^{+} = C\Delta U_S = C(U_{S\,Max} - U_{S\,Min}) = \frac{T\Delta I_L}{8} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{T\Delta I_L}{8\Delta U_S},$$

$$I_{1ср} = \frac{\alpha^2 U_A T}{2L_1} + m_2 \alpha I_S.$$

ГЛАВА 35

СТАТИЧЕСКИЕ РЕЛЕ. ПЛАВНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

35.1. Статические реле

Статическое реле позволяет замкнуть или разомкнуть электрическую цепь сравнимым с электромеханическим реле способом.

35.1.1. Состав — электронный прерыватель переменного тока

Статическое реле (рис. 35.1) обычно состоит из управляемого устройства, гальванической развязки (фотосемистора, фототранзистора и т. п.) и двунаправленного электронного прерывателя (встречно-параллельно включенных тиристоров, семистора) для использования в цепях переменного тока (AC) или однонаправленного (биполярный плоскостной транзистор, полевой МОП-транзистор) для использования в цепях постоянного тока (DC). В этой главе мы рассмотрим только реле типа AC, для упрощения будем рассматривать идеальные составляющие, в особенности тиристоры и семисторы (см. гл. 19).

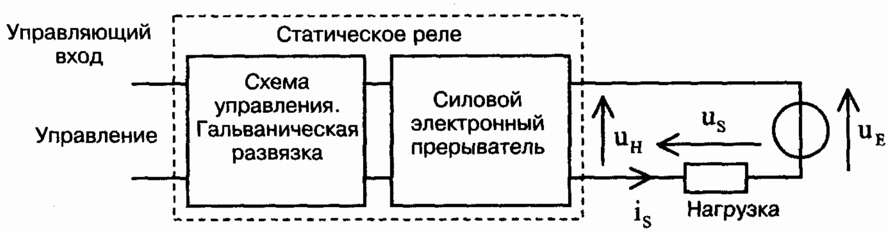


Рис. 35.1. Типовой состав статического реле

Электронный прерыватель AC (рис. 35.2) реализован на основе двух тиристоров, включенных встречно-параллельно, или одного семистора. Подачей тока на управляющий электрод можно привести в проводящее состояние тиристор или семистор, тогда как стремление к нулю анодного тока позволяет им запереться естественно. Напряжение питания определяется как $u_E = U_{E\,Max}\sin(\omega t)$.

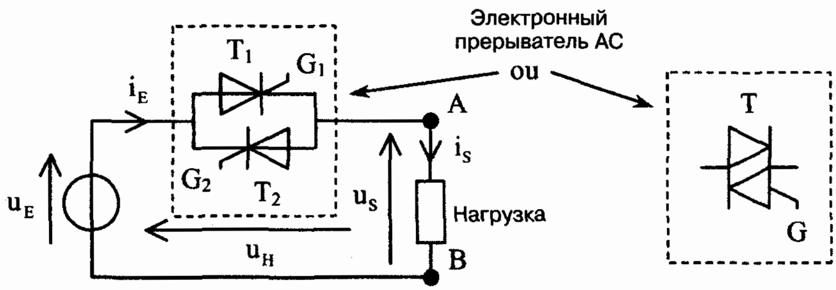


Рис. 35.2. Электронный прерыватель АС

35.1.2. Принцип действия

Существует два способа действия статических реле АС:

– *асинхронная*, или *мгновенная, коммутация*, при которой замыкание или размыкание электронного прерывателя осуществляется «мгновенно»;
– *синхронная коммутация*, или *коммутация на ноль напряжения*, при которой замыкание или размыкание электронного прерывателя осуществляется при переходе напряжения через ноль.

В обоих случаях размыкание электронного прерывателя осуществляется при первом исчезновении анодного тока, которое следует за отключением управляющего сигнала.

а) Резистивная нагрузка (рис. 35.3 и 35.4)

$$u_S = ri_S$$

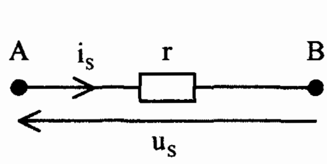


Рис. 35.3. Резистивная нагрузка

• ***Установившийся режим в положении «Откл».*** Электронный прерыватель разомкнут, ток в нагрузке $i_S = 0$ (в идеальном электронном прерывателе), откуда $u_S = 0$.

• ***Установившийся режим в положении «Вкл».*** Электронный прерыватель замкнут, напряжение на зажимах нагрузки $u_S = U_{E\,Max}\sin(\omega t)$, где $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$ (электронный прерыватель идеальный). Ток i_S и напряжение u_S совпадают по фазе.

• ***Мгновенное замыкание*** (см. рис. 35.4). Замыкание цепи происходит при $\theta = \alpha$ со значительным изменением $\mathrm{di_S}/\mathrm{dt}$. Эти изменения на практике ограничены обычно достаточной индуктивностью питающей линии, предотвращая разрушение электронного прерывателя. Но значительное изменение тока порождает паразитные составляющие.

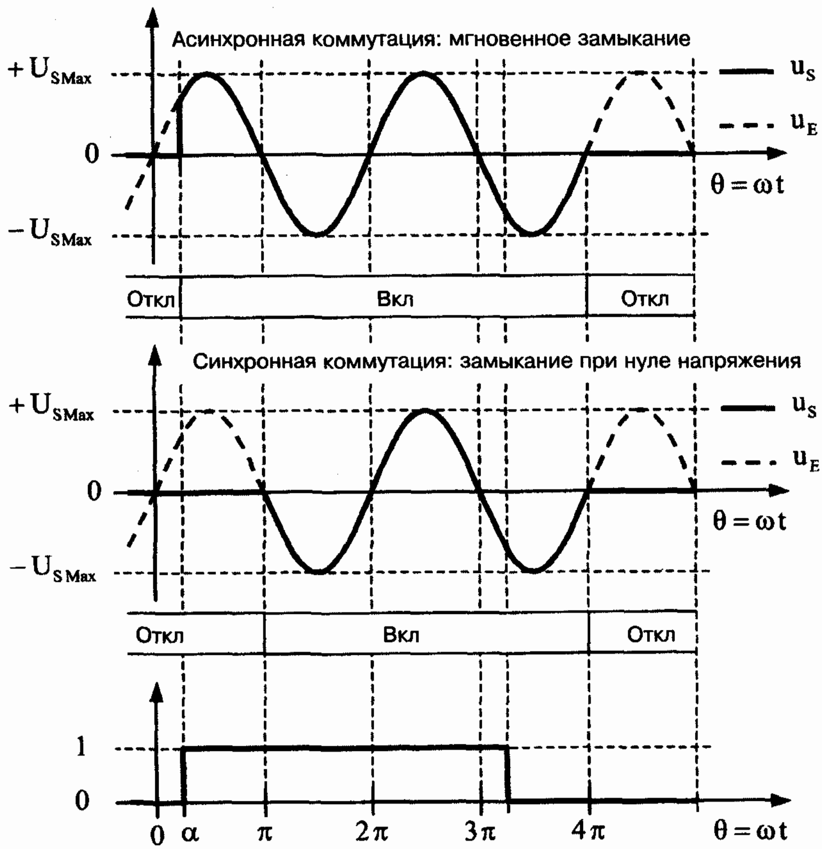


Рис. 35.4. Асинхронная/синхронная коммутация с резистивной нагрузкой

• ***Замыкание при нуле напряжения*** (см. рис. 35.4). Замыкание происходит при $\theta = k\pi$ без проблем, так как:

$$\mathrm{i_S} = \frac{\mathrm{U_{S\,Max}}}{\mathrm{r}}\sin(\omega \mathrm{t}) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\mathrm{di_S}}{\mathrm{dt}}\right|_{\omega t = k\pi} = \left|\frac{\mathrm{di_S}}{\mathrm{dt}}\right|_{Max} = \frac{\omega \mathrm{U_{S\,Max}}}{\mathrm{r}}.$$

• ***Размыкание при нуле тока*** (см. рис. 35.4). Размыкание происходит при $\theta = k\pi$ без проблем, так как $\mathrm{u_S} = 0$ при $\mathrm{i_S} = 0$.

• ***Коммутация лампы накаливания.*** Сопротивление вольфрамовой нити лампы в холодном состоянии от 10 до 20 раз меньше, чем в установившемся рабочем режиме. Учитывая термическую инерцию рассматриваемой лампы, номинальный ток ее может установиться только несколько периодов спустя после включения. Таким образом, при включении ток может достичь значения $I_{S\,Max} \approx 20\sqrt{2}I$, где I — действующее значение тока лампы в установившемся режиме. Изменения di_S/dt также возрастают.

• ***Заключение.*** При резистивной нагрузке замыкание при нуле напряжения (синхронная коммутация) происходит при незначительных изменениях di_S/dt. Электромагнитное излучение также ограничено: как при замыкании, так и при размыкании. Срок службы лампы накаливания увеличивается при замыкании на напряжение, равное нулю (и, следовательно, тока), ограничивая начальный сверхток.

б) Индуктивная нагрузка (рис. 35.5)

$$u_S = L\frac{di_S}{dt} + ri_S \text{ (предполагается } L = \text{const).}$$

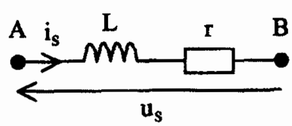


Рис. 35.5. Индуктивная нагрузка

• ***Установившийся режим в положении «Откл».*** Электронный прерыватель разомкнут, ток в нагрузке $i_S = 0$ (в идеальном электронном прерывателе).

• ***Установившийся режим в положении «Вкл».*** Электронный прерыватель замкнут, напряжение на зажимах нагрузки $u_S = U_{S\,Max}\sin(\omega t)$, где $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$ (электронный прерыватель идеальный). Напряжение u_S опережает ток i_S по фазе. Имеем:

$$i_S = I_{S\,Max}\sin(\omega t - \varphi), \quad \text{где} \quad I_{S\,Max} = U_{S\,Max}/Z \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{Arg}\underline{Z},$$

$$\underline{Z} = r + jL\omega, \quad Z = |\underline{Z}| = \sqrt{r^2+(L\omega)^2} = r\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$\cos\varphi = \frac{r}{Z}, \quad \sin\varphi = \frac{L\omega}{Z}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{r} = \tau\omega, \quad \tau = \frac{L}{r} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

• ***Мгновенное замыкание.*** Замыкание цепи происходит при $\theta = \alpha$. Тогда:

$$\tau\frac{di_S(t)}{dt} + i_S(t) = \frac{U_{S\,Max}}{r}\sin(\omega t)u(t - \alpha/\omega), \text{ где } u(t) \text{ — единичный скачок.}$$

$$\Leftrightarrow \tau\omega\frac{di_S(\theta)}{d\theta} + i_S(\theta) = \frac{U_{S\,Max}}{r}\sin\theta u(\theta - \alpha), \quad \text{где} \quad \theta = \omega t.$$

Учитывая начальные условия $i_S(\alpha^+) = 0$, так как ток в индуктивности непрерывен, это дифференциальное уравнение имеет решение:

$$i_S(\theta) = I_{S\,Max}\left(\sin(\varphi - \alpha)e^{\frac{-(\theta-\alpha)}{\operatorname{tg}\varphi}} + \sin(\theta - \varphi)\right)u(\theta - \alpha).$$

В качестве примера на рис. 35.6 приведен график $i_S(\theta)$ при $\alpha = 0$ и $\varphi \approx 85°$.

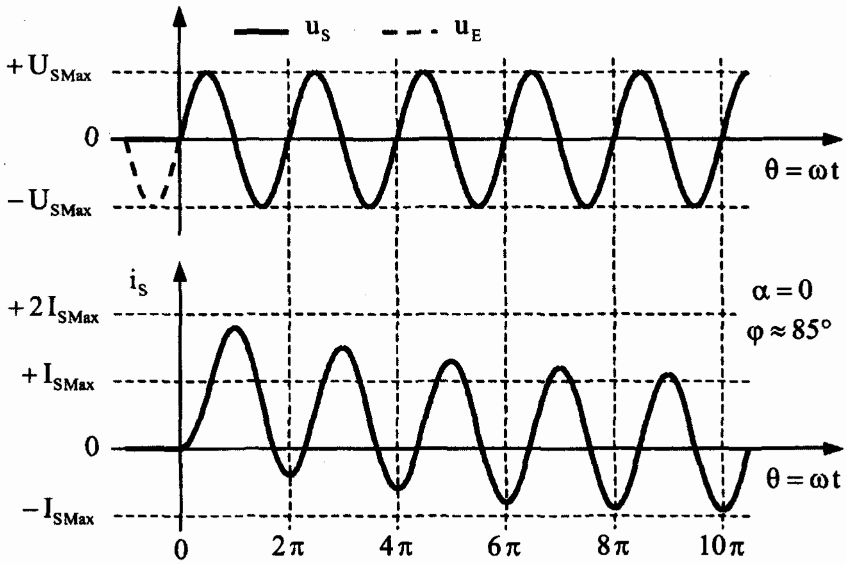


Рис. 35.6. Замыкание при нуле напряжения и индуктивной нагрузке

Примечания.

- Приведенное выражение тока $i_S(\theta)$ представляет собой сумму свободной составляющей (слева от знака +) и принужденной составляющей (справа от знака +).
- После затухания переходного процесса (экспонента стремится к нулю) наступает установившийся режим в состоянии «Вкл», описанном выше.
- Если $\alpha = \varphi$, свободная составляющая равна нулю, и установившийся режим возникает мгновенно.
- В теоретически предельном случае, когда $r = 0$ ($\Rightarrow \varphi = \pi/2$), выражение $i_S(\theta)$ запишется в виде:

$$i_S(\theta) = I_{S\,Max}(\sin(\pi/2 - \alpha) + \sin(\theta - \pi/2))u(\theta - \alpha).$$

Это установившийся режим (не переходный), сумма постоянной составляющей (свободной) и синусоидальной (принужденной). Имеем два предельных случая:

1) Постоянная составляющая максимальна при $\alpha = 0$, а синусоида максимальна при $\theta = (2k+1)\pi$. Таким образом, $i_S(\theta)$ достигает значения $+2I_{S\,Max}$.
2) Постоянная составляющая минимальна при $\alpha = \pi$, а синусоида минимальна при $\theta = 2k\pi$. Таким образом, $i_S(\theta)$ достигает значения $-2I_{S\,Max}$.

На практике функция $i_S(\theta)$ близка к предельному теоретическому случаю для первых периодов синусоиды, когда $\tau \gg 2\pi/\omega$.

Чтобы тиристор (или семистор) оставался проводящим, нужно, чтобы его анодный ток был больше тока возбуждения, обозначаемого как I_L, до исчезновения тока управляющего электрода. Отсюда возникает условие: $i_S(\theta) >]I_L$, которое определяет угол θ, исходя из значения которого ток управляющего электрода может быть отключен при заданном α, или максимальный угол управления α_{Max} для $\theta = \pi$ (первый полупериод).

• ***Замыкание при нуле напряжения.*** Все сказанное относительно мгновенного замыкания справедливо в частном случае $\alpha = 0$. В частности, замыкание при нуле напряжения соответствует неблагоприятному случаю, когда $i_S(\theta)$ может достичь значений $\pm 2I_{S\,Max}$.

• ***Размыкание при нуле тока.*** В установившемся режиме в состоянии «Вкл» напряжение u_S опережает ток i_S по фазе. Осуществляемое размыкание при прохождении анодного тока через ноль происходит при напряжении $u_S = u_E$, которое очень быстро прикладывается на зажимы электронного прерывателя. Будучи ограниченной только паразитными емкостями, скорость изменения напряжения u_H на зажимах электронного коммутатора может превзойти значение du/dt тиристора или семистора (коммутационное значение du/dt), что связано с риском повторного открывания. Эта проблема устраняется подключением на зажимы электронного коммутатора RC-цепочки (рис. 35.7).

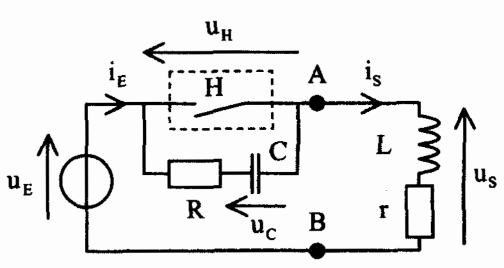


Рис. 35.7. Эквивалентная схема с RC-цепочкой

В установившемся режиме в состоянии «Вкл» (H замкнут) напряжение u_S опережает ток i_S по фазе, конденсатор разряжен. Это записывается с заменой переменной $\omega t' = \omega t - \varphi$:

$$u_S = U_{S\,Max}\sin(\omega t' + \varphi) \quad \text{и} \quad i_S = I_{S\,Max}\sin(\omega t'), \quad \text{где} \quad I_{S\,Max} = \frac{U_{S\,Max}}{Z}.$$

При $t' = 0$ ток становится равным нулю, и прерыватель размыкается. Напряжение на зажимах конденсатора подчинено дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2u_C}{dt'^2} + 2m\omega_0\frac{du_C}{dt'} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 U_{E\,Max}\sin(\omega t' + \varphi),$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (собственная угловая частота), $m = \frac{R+r}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ (затухание).

Рассматривая $\omega \ll \omega_0$, мы получим ниже приводимое дифференциальное уравнение, действительное только для начала временно́го отклика u_C (отклик на скачок напряжения, равный $U_{E\,Max}\sin\varphi$).

$$\frac{d^2u_C}{dt'^2} + 2m\omega_0\frac{du_C}{dt'} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 U_{E\,Max}\sin\varphi.$$

Для затухания, меньшего единицы, с учетом начальных условий $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ (непрерывность напряжения на зажимах конденсатора) и $C du_C(0^+)/dt' = i_S(0^+) = i_S(0^-) = 0$ (размыкание H при нуле тока и непрерывность тока в индуктивности), последнее дифференциальное уравнение будет иметь решение:

$$u_C = U_{E\,Max}\sin\varphi\left(1 - \frac{e^{-m\omega_0 t'}}{\sqrt{1-m^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t' + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right)\right).$$

При стремящемся к нулю затухании это выражение имеет вид:

$$u_C \approx U_{E\,Max}\sin\varphi(1 - \cos\omega t').$$

Отсюда выводим максимальное значение и максимальную скорость изменения u_C:

$$U_{CMax} \approx 2U_{E\,Max}\sin\varphi \qquad \left.\frac{du_C}{dt'}\right|_{Max} \approx \omega_0 U_{E\,Max}\sin\varphi.$$

Максимальная скорость изменения u_C должна быть меньше коммутационного значения $(du/dt)_C$ (H находится в разомкнутом состоянии). Это предопределяют условия на конденсаторе (см. гл. 19):

$$C > \frac{(U_{E\,Max}\sin\varphi)^2}{L(du/dt)_C^2}.$$

• ***Заключение.*** При индуктивной нагрузке возможны как мгновенное замыкание, так и замыкание при нулевом значении напряжения. Ток i_S может достигать значения $\pm I_{S\,Max}$. Необходимо использование RC-цепочки. В случае синхронных реле ток управления подается только во временно́е окно, начиная от нулевого значения напряжения, что делает достаточно деликатным открывание тиристоров или семисторов при малых значениях тока и малым cosφ (менее 0,7). Шунтирующее сопротивление, включаемое параллельно нагрузке, помогла решить эту проблему, позволяя быстрое установление минимального тока.

в) Насыщаемая индуктивность в нагрузке (рис. 35.8)

Ферромагнитные материалы позволяют получать большие значения индуктивности, но приводят к нелинейности. Поток в магнитной цепи не является линейной функцией тока (μ, а следовательно, и L не постоянны), они изменяются в соответствии с циклом гистерезиса так же, как и магнитная индукция B изменяется в функции напряженности магнитного поля H (см. гл. 4).

$$u_S = N\frac{d\varphi}{dt} + ri_S, \quad \text{где} \quad N\varphi = Li_S \quad \text{и} \quad L = \frac{N^2}{\Re}.$$

Здесь φ — поток на виток, N — число витков

• ***Упрощенный анализ.*** Рассматривается, что магнитная цепь обладает кусочно-линейной характеристикой $\varphi = f(i_S)$, фиксирующей два рабочих режима (рис. 35.9).

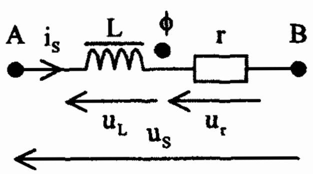


Рис. 35.8. Индуктивная насыщаемая нагрузка

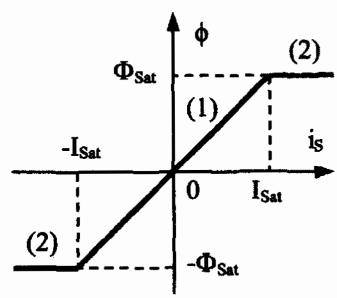


Рис. 35.9. $\varphi = f(i_S)$

1) Режим переменного потока:

$$L = N\Phi_{Sat}/I_{Sat} = \text{const}.$$

Тогда справедлив предыдущий анализ (см. п. б).

2) Режим постоянного потока:

$$\varphi = \Phi_{Sat}.$$

Ток здесь ограничен только сопротивлением r, $u_L = Nd\varphi/dt = 0$. Ток насыщения близок к максимальному $I_{S\,Max}$ установившегося режима, насыщение достигается просто при переходном процессе, когда ток i_S превосходит значение $I_{S\,Max}$ (в абсолютных значениях). Худший случай соответствует замыканию электронного прерывателя при нуле напряжения.

Чтобы при переходном процессе не получилось сверхтока (так как остаточный поток, которым здесь пренебрегли, может также привести к насыщению при подаче напряжения), следовало бы замкнуть электронный прерыватель при $\alpha = \varphi$ (см. мгновенное замыкание в вышеизложенном п. б), что обычно реализовать не так просто.

• ***Использование трансформатора.*** На холостом ходу — это насыщаемая индуктивность. Но при нагрузке вторичный ток, приведенный к первичной обмотке, превосходит ток намагничивания установившегося режима. В случае резистивной или емкостной нагрузки во вторичной обмотке замыкание должно осуществляться при равенстве нулю напряжения.

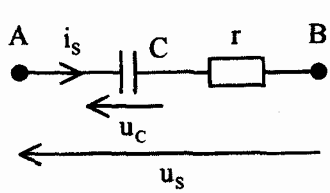
• ***Заключение.*** Сверхток следует ограничить маленьким последовательным сопротивлением, не нарушающим рабочий режим, и выбирать электронный прерыватель с завышенными показателями, который сможет выдерживать вызванный переходным процессом сверхток.

г) Асинхронный двигатель

Это индуктивно-активная нагрузка, подчиняющаяся собственным законам в функции механической нагрузки (см. гл. 41). Пусковой ток трехфазного двигателя может быть в $6 \div 8$ раз больше номинального значения установившегося режима, а однофазного — даже в 10 раз. Это определяет выбор электронного прерывателя.

Коэффициент мощности асинхронного двигателя ($\cos\varphi$) зависит от механической нагрузки. При его значении, меньшем 0,5 на холостом ходу, предпочтительным часто бывает мгновенное замыкание.

д) Емкостная нагрузка (рис. 35.10)



$$\begin{cases} u_S = rC\frac{du_C}{dt} + u_C, \\ i_S = C\frac{du_C}{dt}. \end{cases}$$

Рис. 35.10. Емкостная нагрузка

• ***Установившийся режим в состоянии «Откл».*** Электронный прерыватель (идеальный) разомкнут, ток в нагрузке $i_S = 0$.

• ***Установившийся режим в состоянии «Вкл».*** Электронный прерыватель (идеальный) замкнут, напряжение на зажимах нагрузки $u_S =$

$= U_{S\,Max}\sin(\omega t)$, где $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$. Ток i_S опережает по фазе напряжение u_S ($\varphi < 0$). Имеем:

$$i_S = I_{S\,Max}\sin(\omega t - \varphi), \quad \text{где} \quad I_{S\,Max} = U_{S\,Max}/Z \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{Arg}\underline{Z},$$

$$\underline{Z} = r - j/(C\omega)Z = |\underline{Z}| = \sqrt{r^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}} = r\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$\cos\varphi = \frac{r}{Z}\sin\varphi = \frac{-1}{ZC\omega}\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{rC\omega} = \frac{-1}{\tau\omega}\tau = rC\left(\frac{-\pi}{2} < \varphi < 0\right).$$

• ***Мгновенное замыкание в теоретически предельном случае при*** $r = 0$. Замыкание происходит при $\theta = \omega t = \alpha$. Напряжение на зажимах нагрузки составит:

$$u_S(\theta) = U_{S\,Max}\sin\theta \text{ при замкнутом электронном прерывателе и}$$

$$u_S(\theta) = U_C(\alpha^-) \text{ непосредственно перед замыканием.}$$

Тогда:

$$i_S(\theta) = C\omega\frac{du_C(\theta)}{d\theta}.$$

Отсюда, в виде распределения получим (см. гл. 10):

$$i_S(\theta) = C\omega(U_{S\,Max}\cos\theta u(\theta - \alpha) + \left[U_C(\alpha^+) - U_C(\alpha^-)\right]\delta(\theta - \alpha)),$$

где $u(\theta)$ — единичный скачок, $\delta(\theta)$ — импульс Дирака,

$$U_C(\alpha^+) = u_S(\alpha^+) = U_{S\,Max}\sin\alpha.$$

Примечания.

- При $\theta = \alpha$ ток не ограничен (наличие импульса Дирака) за исключением особого случая, когда $U_C(\alpha^+) = U_C(\alpha^-)$. Такой случай имеет место при $\alpha = 0$, что соответствует замыканию при равном нулю напряжении, если конденсатор изначально разряжен $U_C(\alpha^-) = 0$.
- Даже в особом случае при $U_C(\alpha^+) = U_C(\alpha^-)$ ток подвержен разрыву, наибольшее значение которого будет при замыкании, когда напряжение $U_C(\alpha^-) = 0$:

$$i_S(0^+) - i_S(0^-) = I_{S\,Max} - 0 = C\omega U_{S\,Max}.$$

- Как следствие, замыкание при «чистой» емкости без защиты недопустимо никогда.

• ***Мгновенное замыкание при*** $r \neq 0$. Замыкание осуществляется при $\theta = \omega t = \alpha$. Напряжение на зажимах нагрузки составит:

$$u_S(\theta) = U_{S\,Max}\sin\theta \text{ при замкнутом электронном прерывателе;}$$

$$u_S(\theta) = U_C(\alpha^-) \text{ непосредственно перед замыканием, так как } i_S = 0.$$

Напряжение на зажимах конденсатора определяется решением дифференциального уравнения:

$$\tau\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_{S\,Max}\sin(\omega t) \quad \text{для} \quad \omega t \geqslant \alpha, \quad \text{где} \quad \tau = rC,$$

$$\Rightarrow \tau\omega\frac{du_C(\theta)}{d\theta} + u_C(\theta) = U_{S\,Max}\sin(\theta) \quad \text{для} \quad \theta = \omega t \geqslant \alpha.$$

С учетом начальных условий $U_C(\alpha^+) = U_C(\alpha^-)$, отражающих непрерывность напряжения на зажимах конденсатора, решением этого дифференциального уравнения будет:

$$u_C(\theta) = [U_C(\alpha) - M\sin(\alpha - \psi)]\,e^{\frac{-(\theta-\alpha)}{\omega\tau}} + M\sin(\alpha - \psi) \quad \text{для} \quad \theta \ll \alpha,$$

где

$$M = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}} = U_{S\,Max}\cos\psi\,\mathrm{tg}\,\psi = \omega\tau = rC\omega \quad \left(0 < \psi < \frac{\pi}{2}\right).$$

И:

$$u_C(\theta) = U_C(\alpha^-) \quad \text{для} \quad \theta \leqslant \alpha.$$

Тогда:

$$i_S(\theta) = C\omega\frac{du_C(\theta)}{d\theta},$$

откуда:

$$i_S(\theta) = \left(\frac{-1}{r}[U_C(\alpha) - M\sin(\alpha - \psi)]\,e^{\frac{-(\theta-\alpha)}{\omega t}} + \omega CM\cos(\theta - \psi)\right)u(\theta - \alpha).$$

Поскольку $-\varphi = \pi/2 - \psi$, ток i_S опережает напряжение u_C на $\pi/2$, окончательно получим:

$$i_S(\theta) =$$
$$= \left(\frac{U_{S\,Max}\sin\varphi\cos(\alpha - \varphi) - U_C(\alpha)}{r}\,e^{\frac{\theta-\alpha}{(\mathrm{tg}\,\varphi)^{-1}}} + I_{S\,Max}\sin(\theta - \varphi)\right)u(\theta - \alpha).$$

Примечания.

– Если $U_{S\,Max}\sin\varphi\cos(\alpha-\varphi) = U_C(\alpha)$, то свободная составляющая равна нулю, и установившийся режим получается мгновенно.

– Для рассматриваемой схемы напряжение на зажимах конденсатора находится между $-U_{S\,Max}$ и $+U_{S\,Max}$ (см. ниже размыкание при токе, равном нулю), откуда:

$$-U_{S\,Max} < U_C(\alpha) < U_{S\,Max}.$$

– Тотчас после замыкания электронного прерывателя ($\theta = \alpha^+$) имеем:

$$u_S(\alpha^+) = \frac{U_{S\,Max}\sin\varphi - U_C(\alpha)}{r}, \text{ откуда: } u_S(\alpha^+) = \frac{\pm 2U_{S\,Max}}{r}.$$

– На практике изменение di_S/dt ограничено индуктивностью питающей линии, часто достаточной для предотвращения повреждений электронного прерывателя. Но значительное изменение тока вызывает заметные паразитные явления. Добавление последовательной индуктивности L позволяет ограничить di_S/dt:

$$\left.\frac{di_S}{dt}\right|_{\text{худший случай}} = \frac{\pm U_{S\,Max}}{L} \quad (\text{для } -U_{S\,Max} < U_C(\alpha) < U_{S\,Max}).$$

• ***Размыкание при токе, равном нулю*** (см. рис. 35.2 и 35.10). Предполагаем установившийся синусоидальный режим. Ток i_S опережает напряжение u_C на $\pi/2$. Это значит, что размыкание при токе, равном нулю, соответствует максимуму напряжения на зажимах конденсатора: $|u_C|_{Max} \leqslant U_{S\,Max}$. Поэтому разомкнутый электронный прерыватель должен периодически испытывать напряжение $|u_C|_{Max} + U_{S\,Max} \leqslant 2U_{S\,Max}$ до возможного разряда конденсатора (через сопротивление утечки).

е) Трехфазная сеть

Трехфазная нагрузка с нейтралью требует электронный прерыватель в каждой фазе. Для каждой из фаз правила эксплуатации идентичны выше рассмотренным.

В симметричной трехфазной системе без нейтрали (при соединении нагрузки в звезду или треугольник) может быть достаточным использование двух электронных прерывателей. В этом случае следует иметь в виду напряжения, которые могут возникнуть на зажимах электронных прерывателей из-за короткого замыкания или выхода сети из симметричного режима.

35.2. Плавные регуляторы

Плавный регулятор позволяет регулировать напряжение на зажимах нагрузки. Такой регулятор состоит из электронного прерывателя (рис. 35.2) и из его управления. Существует две принципиальных стратегии управления.

– Управление углом проводимости. Напряжение на зажимах нагрузки состоит из долей питающих полуволн. Угол проводимости регулируется как для положительных, так и для отрицательных полуволн.

– Управление изменением количества полных периодов. Напряжение на зажимах нагрузки состоит из последовательностей полных периодов, которые периодически повторяются. В этом случае регулируется число периодов волн для одного периода повторяющихся последовательностей заданных периодов.

35.2.1. Управление углом проводимости

а) Резистивная нагрузка (см. рис. 35.3 и 35.11)

Если предполагаемый идеальным электронный прерыватель замкнут, на зажимы нагрузки приложено напряжение $u_S = U_{S\,Max}\sin(\omega t)$, где $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$ и $u_S = ri_S$. Когда он размыкается, ток в нагрузке $i_S = 0 \Rightarrow u_S = ri_S = 0$. В каждой полуволне электронный прерыватель замкнут заданное углом проводимости α время и разомкнут при спадании тока i_S до нуля.

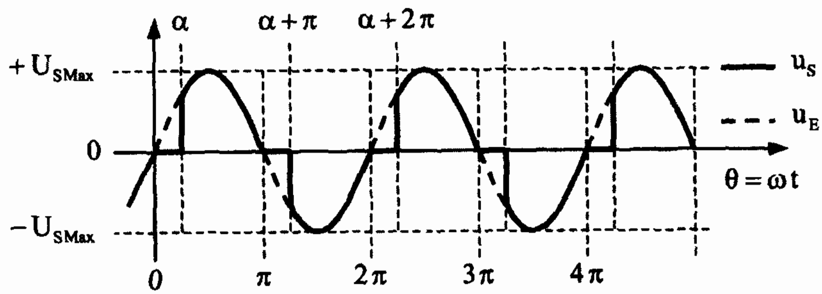


Рис. 35.11. Управление углом проводимости при резистивной нагрузке

Вопрос. Привести выражение действующего значения напряжения u_S.
Ответ.

$$U_S^2 = \pi\int_{\alpha}^{\pi} U_{S\,Max}^2 \sin^2\theta d\theta,\ \text{откуда}\ U_S = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}.$$

б) Индуктивная нагрузка (см. рис. 35.5)

Электронный прерыватель замкнут при $\theta = \omega t = \alpha$, что соответствует дифференциальному уравнению:

$$\frac{L\omega}{r}\frac{di_S(\theta)}{d\theta} + i_S(\theta) = \frac{U_{SMax}}{r}\sin\theta \qquad (\theta = \omega t \geqslant \alpha).$$

С учетом начальных условий $i_S(\alpha^+) = 0$, так как ток в индуктивности непрерывен, это уравнение имеет решение:

$$i_S(\theta) = I_{S\,Max}\sin(\varphi-\alpha)e^{\frac{-(\theta-\alpha)}{\operatorname{tg}\varphi}} + I_{S\,Max}\sin(\theta-\varphi) \quad (\theta \geqslant \alpha).$$

Здесь первое слагаемое является свободной составляющей, второе — принужденной:

$$I_{S\,Max} = U_{S\,Max}/Z \quad \underline{Z} = r + jL\omega Z = |\underline{Z}| = r\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$\varphi = \operatorname{Arg}\underline{Z}\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{r} = \tau\omega \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Ток $i_S(\theta)$ снова спадает до нуля при $\theta = \beta$, для которого:

$$\sin(\beta - \varphi) = \sin(\alpha - \varphi)e^{\frac{-(\beta-\alpha)}{\operatorname{tg}\varphi}}.$$

• ***Режим плавного регулятора*** (рис. 35.12): $0 < \varphi < \alpha < \pi \Rightarrow \varphi < \beta < \pi + \varphi < \pi + \alpha$.

Вопрос. Привести выражение действующего значения напряжения u_S.

Ответ.

$$U_S^2 = \pi \int_\alpha^\beta U_{S\,Max}^2 \sin^2\theta d\theta, \text{ откуда } U_S = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\pi} - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2\pi}}.$$

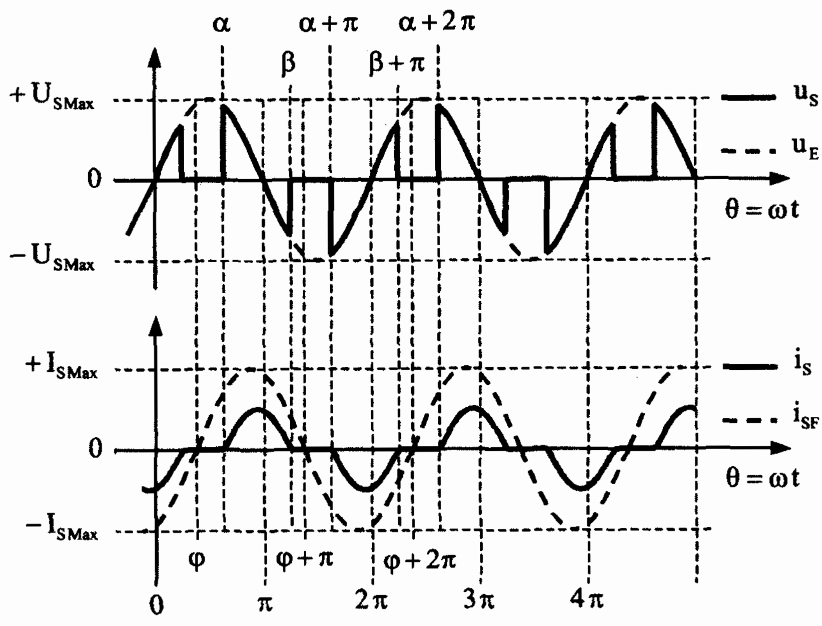


Рис. 35.12. Диаграмма напряжения и тока плавного регулятора ($0 < \varphi < \alpha < \pi$) с управлением углом проводимости с индуктивной нагрузкой

Примечание. При изменении α от φ до π будем иметь изменение β от $\varphi + \pi$ до π и U_S от $U_{S\,Max}/\sqrt{2}$ до 0. Схема работает как плавный регулятор. Кроме того, среднее напряжение $U_{S\,ср} = 0$.

• ***Предел режима плавного регулятора:*** $0 < \varphi = \alpha < \pi \Rightarrow \beta = \pi + \varphi$. Синусоидальный установившийся режим получен непосредственно без переходного процесса. Прерыватель постоянно замкнут.

$$i_S(\theta) = i_{SF}(\theta) + I_{S\,Max}\sin(\theta - \varphi).$$

• ***Режим замкнутого прерывателя или аварийный переход в режим выпрямления:*** $0 < \alpha < \varphi < \pi/2 \Rightarrow \pi + \alpha < \pi + \varphi < \beta < 2\pi + \varphi$.

Ток спадает до нуля (при β), что вызывает размыкание электронного прерывателя при положительной полуволне, после начала управления замыканием при отрицательной полуволне (при $\alpha + \pi$). Тогда имеем две возможности:

– Команда на управляющий электрод недостаточно четкая, чтобы вызвать замыкание электронного прерывателя при отрицательной полуволне. Тогда ток i_S состоит из одних положительных полуволн (если первая команда на замыкание началась при $\alpha + \pi$, то ток i_S состоит из одних отрицательных полуволн). Схема работает в режиме однополупериодного выпрямления тока. Такое функциональное отклонение может быть опасным.

– Команда на управляющий электрод достаточно четкая, чтобы вызвать замыкание электронного прерывателя при отрицательной полуволне. Тогда ток i_S непрерывен, прерыватель постоянно замкнут. После затухания переходного процесса получим ток i_S, соответствующий пределу режима плавного регулятора:

$$i_S(\theta) = i_{SF}(\theta) + I_{S\,Max}\sin(\theta - \varphi).$$

При корректном управлении с положительными и отрицательными полуволнами обеспечена непрерывность управления углом проводимости даже при изменении во время работы угла сдвига фаз φ.

в) Регулятор скорости универсального двигателя

Универсальным двигателем является двигатель постоянного тока последовательного возбуждения (см. гл. 43), но предусмотренный для работы на переменном токе. Его скорость зависит от среднего значения абсолютной величины полуволн питающего переменного напряжения на зажимах двигателя, полагая механическую нагрузку постоянной.

Вопрос. Привести выражение среднего значения напряжения $|u_S|$.

Ответ.

$$|u_S|_{ср} = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi} U_{S\,Max}\sin\theta d\theta, \text{ откуда : } |u_S|_{ср} = \frac{U_{S\,Max}}{\pi}(1 + \cos\alpha).$$

35.2.2. Управление изменением количества полных периодов

Это выполняет статическое реле переменного тока с синхронной коммутацией, управляемое периодически следующим образом: электронный прерыватель замкнут в течение времени nT, где n — целое число полных последовательных периодов, T — период синусоиды. Затем прерыватель размыкается на длительность $T_0 - nT$, где T_0 — период повторения последовательности полных периодов. Когда предполагаемый идеальным электронный прерыватель замкнут, напряжение на зажимах нагрузки составляет $u_S = U_{S\,Max}\sin(\omega t)$, где $U_{S\,Max} = U_{E\,Max}$. Когда он разомкнут, ток в нагрузке равен нулю: $i_S = 0$. При синхронной коммутации электронный прерыватель замыкается при нуле напряжения u_S и размыкается при спадании тока до нуля. Это предотвращает значительное изменение di_S/dt, в частности, при резистивной нагрузке (см. § 35.1.2).

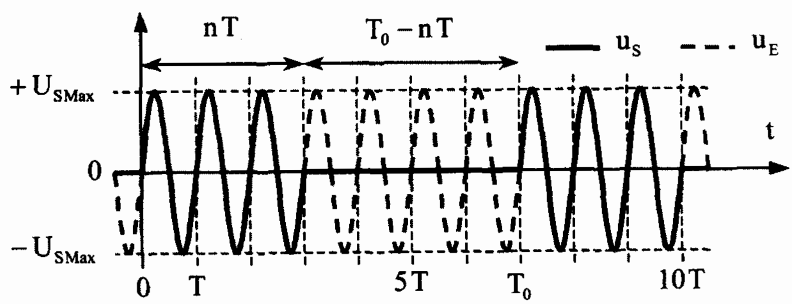


Рис. 35.13. Управление последовательностью волн

Вопрос. Привести выражение действующего значения напряжения u_S.
Ответ.

$$U_S^2 = \frac{U_{S\,Max}^2}{T_0}\int_0^{nT}\sin^2(\omega t)dt,$$

откуда:

$$U_S = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{nT}{T_0}} = \frac{U_{S\,Max}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{N}},$$

полагая $T_0 = NT$.

Пример на рис. 35.13: $n = 3$, $T = 7 \Rightarrow U_S \approx 0{,}65U_{S\,Max}/\sqrt{2}$.

Примечание. При изменении n от 0 до N значение U_S изменяется от 0 до $U_{S\,Max}/\sqrt{2}$. Схема работает в режиме плавного регулятора. Кроме того, среднее напряжение $U_{S\,ср} = 0$.

35.2.3. Трехфазные плавные регуляторы

Они составляются из трех однофазных регуляторов — один на фазу. Управления тремя такими регуляторами сдвинуты одни относительно других на треть периода, что соответствует фазовому сдвигу $2\pi/3$.

ГЛАВА 36

НЕЗАВИСИМЫЕ ИНВЕРТОРЫ

Независимый инвертор является статическим преобразователем постоянного тока в переменный. Он позволяет питать нагрузку переменного тока от источника постоянного тока. При определенных условиях управляемый выпрямитель может передавать энергию источника постоянного тока источнику переменного тока. Это режим зависимого инвертора (гл. 32).

36.1. Основной принцип построения

Основной принцип построения однофазного преобразователя состоит в чередующемся изменении направления подключения источника постоянного напряжения или тока на нагрузку таким образом, чтобы обеспечить ее питание на переменном напряжении или токе. Возможны следующие структуры: мост электронных прерывателей (рис. 36.1 и табл. 36.1), полумост электронных прерывателей (рис. 36.2), требующий наличия двух источников питания. Это структура, использующая трансформатор со средней точкой (рис. 36.3), эквивалентный двум нагрузкам.

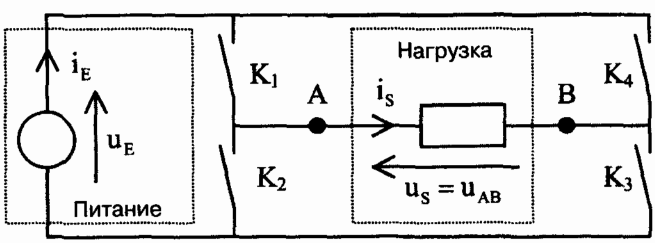


Рис. 36.1. Принцип действия независимого мостового инвертора

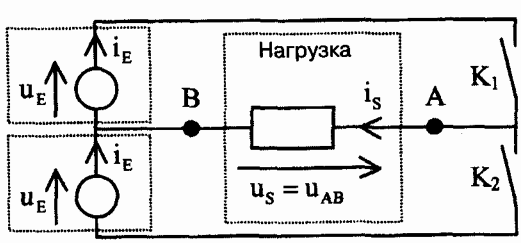


Рис. 36.2. Принцип действия полумостового независимого инвертора

Таблица 36.1. Инверторы напряжения и тока

Инвертор	Электронный прерыватель	Источник постоянного питания	Нагрузка на стороне переменного тока
напряжения	двунаправленный	Источник напряжения или с параллельной емкостью	Задается напряжение, ток зависит от нагрузки
тока	однонаправленный	Источник тока или с последовательной индуктивностью	Задается ток, напряжение зависит от нагрузки

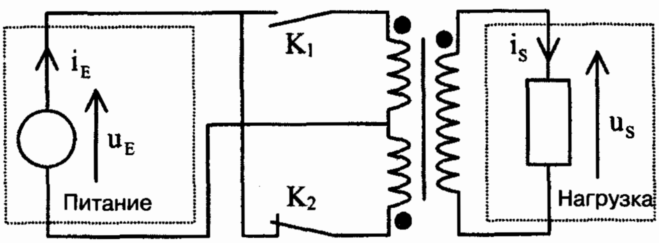


Рис. 36.3. Принцип действия независимого инвертора с трансформатором со средней точкой

36.2. Мостовой инвертор напряжения

Однофазный мостовой инвертор напряжения (рис. 36.4) требует двунаправленного электронного прерывателя (встречно-параллельного соединения диодов в однонаправленном прерывателе), так как ток i_S смещен относительно напряжения u_S. Мы используем обозначение однонаправленного прерывателя, управляемого по току как на размыкание, так и на замыкание (см. гл. 33).

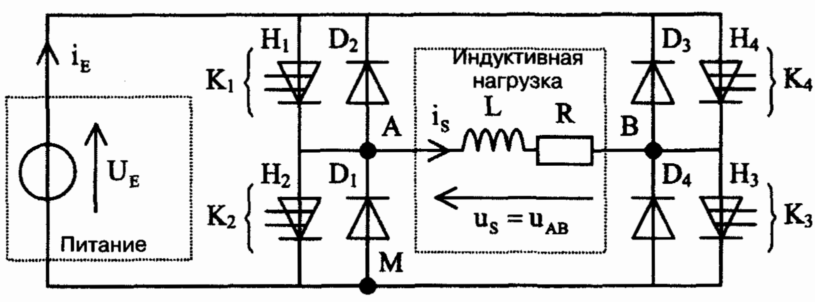


Рис. 36.4. Принцип действия независимого мостового инвертора напряжения

Рассматривая разложение в ряд Фурье напряжения u_S и тока i_S, мы замечаем, что основная гармоника способствует передаче активной мощности, тогда как гармоники второго порядка и выше способствуют передаче реактивной мощности. Для улучшения КПД ищутся способы уменьшения влияния гармоник второго порядка и выше. Это уменьшение достигается улучшением управления инвертором, что позволяет контролировать форму напряжения u_S и сглаживать индуктивностью ток i_S.

36.2.1. Симметричное управление. Индуктивная нагрузка

• ***Режимы работы*** (рис. 36.4 и 36.5).

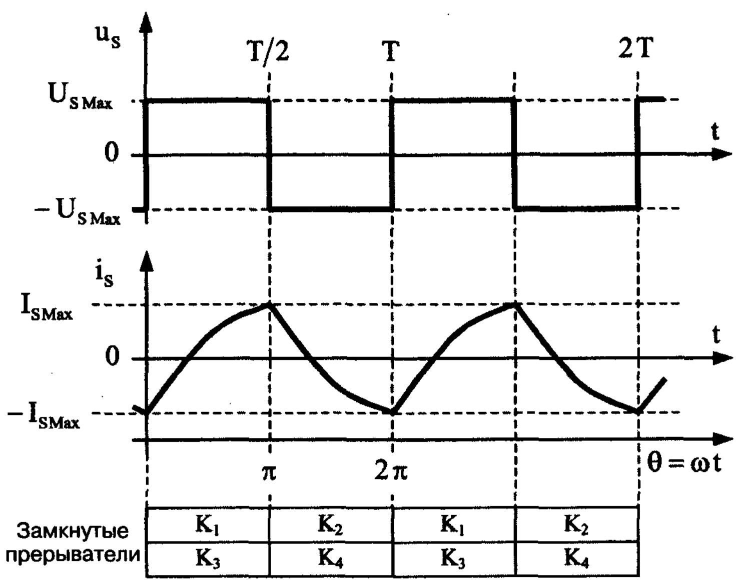


Рис. 36.5. Симметричное управление. Индуктивная нагрузка

От $t = 0$ до $t = T/2$ замкнуты K_1 и K_3, разомкнуты K_2 и K_4. Имеем:

$$i_S = -I_{S Max} e^{-t/\tau} + \frac{U_{S Max}}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = L/R.$$

От $t = T/2$ до $t = T$ замкнуты K_2 и K_4, разомкнуты K_1 и K_3. Имеем:

$$i_S = -I_{S Max} e^{-(t-T/2)/\tau} + \frac{U_{S Max}}{R}(1 - e^{-(t-T/2)/\tau}), \quad \text{где} \quad \tau = L/R.$$

Зная, что $i_S(T/2) = I_{SMax}$ или что $i_S(T) = -I_{SMax}$, получим:

$$i_S = I_{S Max} = \frac{U_{S Max}}{R} \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + e^{-t/\tau}} = \frac{U_{S Max}}{R} \mathrm{th}\left(\frac{T}{4\tau}\right).$$

Вопрос. Привести выражение действующего значения напряжения u_S и активной (или средней) мощности P, передаваемой нагрузке.
Ответ.

$$u_S = \pm U_{S\,Max}, \text{ откуда } U_S = U_{S\,Max}.$$

$$P = \frac{2}{T\int\limits_0^{T/2} U_{S\,Max} i_S dt}, \text{ откуда } P = \frac{U^2_{S\,Max}}{R}\left(1 - \frac{4\tau}{T}\operatorname{th}\frac{T}{4\tau}\right).$$

• ***Спектр.*** Напряжение u_S представляет собой нечетные гармоники. Оно разлагается в ряд Фурье по синусу:

$$u_S = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\sin\left[(2p+1)\omega t\right].$$

Пусть $U_{S1\,Max} = 4U_{S\,Max}/\pi$ — основная гармоника, а $U_{Sn\,Max}$ — амплитуда n-й гармоники ($n = 2p + 1$, где $p \in \mathbf{N}$). При равных нулю четных гармониках получим:

$n =$	3	5	7	9	11	13	15
$\frac{U_{Sn\,Max}}{U_{S1\,Max}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{15}$

Примечание. Действующее значение основной гармоники регулируется значением U_{SMax}. Разумеется $U_{S1} < U_{S\,Max}$, так как:

$$U_S^2 = U_{S1}^2 + U_{S3}^2 + \cdots + U^2_{S(2p+1)} + \cdots = U^2_{S\,Max},$$

$$U_{S1} = \frac{U_{S1\,Max}}{\sqrt{2}} = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi\sqrt{2}} \approx 0{,}9U_{S\,Max}.$$

Вопрос. Определить ряд Фурье для тока i_S (нагрузка индуктивная). Отсюда вывести действующее значение основной гармоники тока.
Ответ. В синусоидальном режиме ток i_S и напряжение u_S связаны соотношением:

$$\frac{\underline{I_S}}{\underline{U_S}} = \frac{1}{R + jL\omega'} = \frac{1}{R}\frac{e^{-j\varphi}}{\sqrt{1+(\tau\omega')^2}}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg}(\tau\omega'),$$

откуда, используя принцип линейности, получим:

$$u_S = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi R}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)\sqrt{1+\left[(2p+1)\tau\omega\right]^2}}\sin\left[(2p+1)\omega t - \varphi_{2p+1}\right],$$

где

$$\varphi_{2p+1} = \operatorname{arctg}\left[(2p+1)\tau\omega\right].$$

Окончательно:

$$I_{S1} = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi R\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} = \frac{U_{S1}}{R\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}.$$

Примечание. Активную мощность можно рассчитать, исходя из соотношения (см. гл. 8):

$$P = U_{S0}I_{S0} + \sum_{n=1}^{+\infty} U_{Sn}I_{Sn}\cos\varphi_n,$$

откуда:

$$P = \frac{U_{S1}^2}{R}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\varphi_{2p+1}}{(2p+1)^2\sqrt{1+[(2p+1)\tau\omega]^2}}, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg}\varphi_{2p+1} = (2p+1)\tau\omega.$$

Или еще:

$$P = \frac{U_{S1}^2}{R}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2\left(1+[(2p+1)\tau\omega]^2\right)}.$$

Вторая и бóльшие гармоники мало участвуют в передаче активной мощности, так как фазы φ_{2p+1} быстро стремятся к $\pi/2$. Напротив, они способствуют передаче реактивной мощности.

36.2.2. Управление со сдвигом. Индуктивная нагрузка

• ***Режим работы*** (рис. 36.4 и 36.6). Управление прерывателями K_3 и K_4 сдвинуто на $2\alpha(0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi)$ по отношению к управлению прерывателями K_1 и K_2.

Вопрос. Привести выражение действующего значения напряжения u_S.

Ответ.

$$U_S^2 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} U_{S\,Max}^2 d\theta,$$

откуда:

$$U_S = U_{S\,Max}\sqrt{1-\frac{2\alpha}{\pi}}.$$

Сдвиг 2α позволяет регулировать действующее значение напряжения.

• ***Спектр.*** В состав напряжения u_S входят нечетные гармоники. Разложение его в ряд синусов дает:

$$u_S = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\cos[(2p+1)\alpha]\sin[(2p+1)\omega t].$$

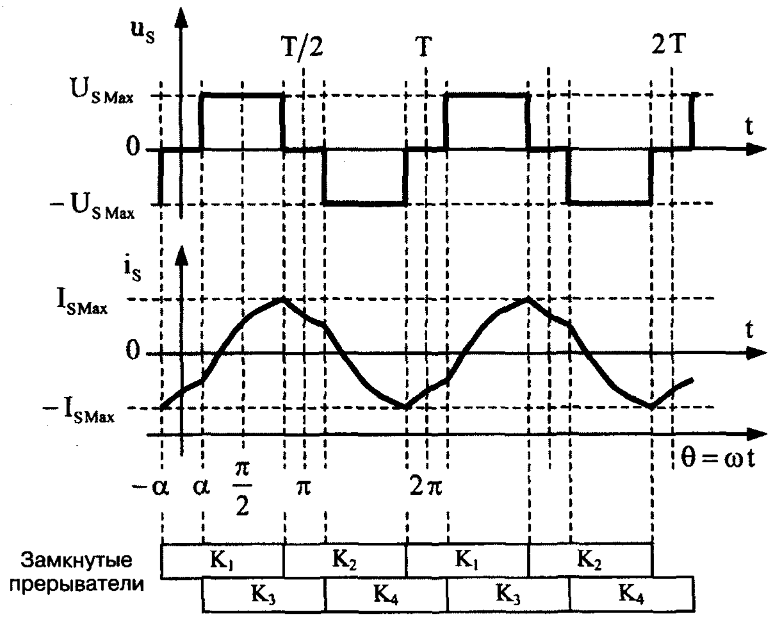


Рис. 36.6. Управление со сдвигом. Индуктивная нагрузка

Пусть $U_{S1\,Max}$ — амплитуда основной гармоники, а $U_{Sn\,Max}$ — амплитуда n-й гармоники ($n = 2p+1$, где $p \in \mathbf{N}$). Можно исключить гармоники, кратные трем ($p = 1$), выбрав $\alpha = \pi/6$. При равных нулю четных гармониках получим:

n =	3	5	7	9	11	13	15
$\frac{U_{Sn\,Max}}{U_{S1\,Max}}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$	0

Примечание. Действующее значение основной гармоники регулируется значением U_{SMax} или углом α.

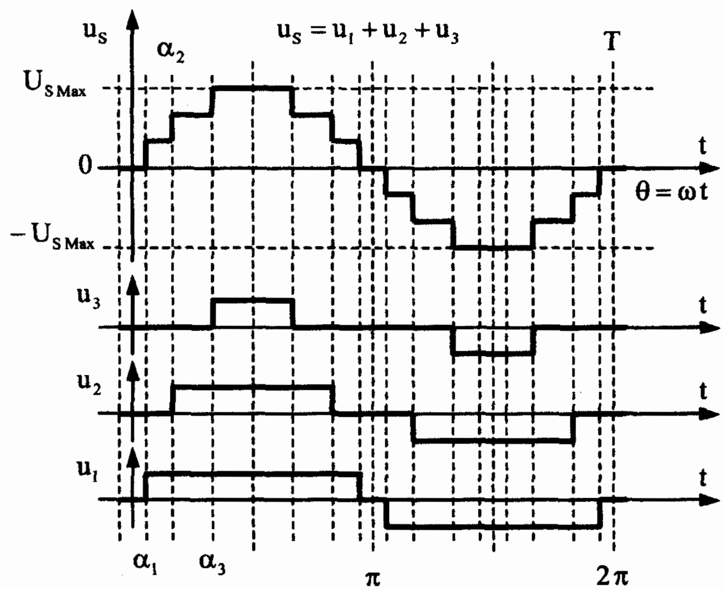
$$U_{S1} = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi\sqrt{2}} \cos\alpha \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2),$$

$$\alpha = \pi/6 \quad \Rightarrow \quad U_{S1} = \frac{\sqrt{6}U_{S\,Max}}{\pi}.$$

36.2.3. Ступенчатое напряжение

• ***Режим работы.*** (рис. 36.7). Ступенчатое напряжение с m ступеней получается при суммировании (обычно при наличии трансформаторов) m напряжений при управлении со сдвигом высотой $U_{S\,Max}/m$ (см. § 36.2.2). Сдвиги $2\alpha_i$ находятся между 0 и π.

Рис. 36.7. Ступенчатое напряжение на 3 ступени



• ***Спектр.*** Напряжение u_S представляет собой сумму m напряжений u_i.

$$u_S = \sum_{i=1}^{m} u_i, \quad \text{где} \quad u_i = \frac{4U_{S\,Max}}{m\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \cos\left[(2p+1)\alpha_i\right] \sin\left[(2p+1)\omega t\right].$$

Пусть $U_{S1\,Max}$ — амплитуда основной гармоники, а $U_{Sn\,Max}$ — амплитуда n-й гармоники ($n = 2p+1$, где $p \in \mathbf{N}$). Чтобы исключить гармоники, кратные трем до $2k+1$, ($p = 1$ до $p = k$) при равных нулю четных гармониках, следует численно решить следующую систему уравнений, что даст m значений углов α_i.

$$\begin{cases} U_{S3\,Max} = 0, \\ \ldots \\ U_{S(2k+1)Max} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \cos(3\alpha_i) = 0, \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \cos\left[(2k+1)\alpha_i\right] = 0. \end{cases}$$

Находим:

m=	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$	$\alpha_3 =$	$\alpha_4 =$
4	0,9°	24,9°	35,1°	60,9°
3	11, 7°	27°	56, 1°	
2	12°	48°		
1	30°			

Тогда

n=	3	5	7	9	11	13	15	
$\frac{U_{Sn\,Max}}{U_{S1\,Max}}$	0	0	0	0	7%	5%	0	**m=4**
	0	0	0	7%	2%	3%	2%	**m=3**
	0	0	9%	0	9%	5%	0	**m=2**
	0	20%	14%	0	9%	8%	0	**m=1**

Примечание. Действующее значение основной гармоники регулируется напряжением $U_{S\,Max}$:

$$U_{S1} = \frac{U_{S1\,Max}}{\sqrt{2}} = \frac{4U_{S\,Max}}{m\pi\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{m} \cos\alpha_i \qquad (0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi/2).$$

36.2.4. Широтно-импульсная модуляция (ШИМ)

а) Предварительно рассчитанная ШИМ или ШИМ с исключением гармоник

ШИМ позволяет исключать гармонику коммутацией электронных прерывателей в предварительно рассчитанные моменты времени. Она особенно адаптирована для получения синусоиду при малом числе коммутаций за период.

ШИМ с двухуровневой коммутацией

• ***Режим работы*** (рис. 36.4 и 36.8). Электронные прерыватели управляются одновременно. Имеем: либо K_1–K_3 замкнуты, а K_2–K_4 разомкнуты, либо K_1–K_3 разомкнуты, а K_2–K_4 замкнуты. Гармоники напряжения u_S нечетные и симметричны относительно вертикали, проходящей через $\pi/2$. Обычно имеется m значений угла α_i $(0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi/2)$.

Пример с двумя значениями α_1 и α_2.

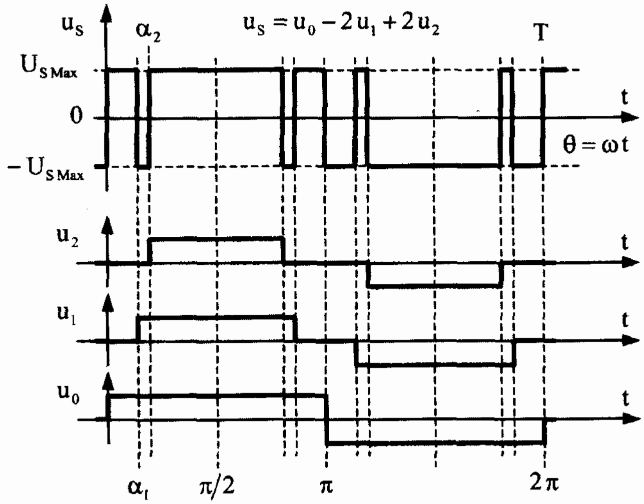
• ***Спектр.*** Гармоники напряжения u_S нечетные и обладают «скользящей» симметрией. Напряжение u_S может рассматриваться также как уравновешенная сумма (m + 1)-го напряжений u_i:

$$u_S = u_0 + 2\sum_{i=1}^{m} (-1)^i u_i$$

(см. пример — рис. 36.8, где $u_S = u_0 - 2u_1 + 2u_2$). Отсюда выводится разложение в синусный ряд Фурье напряжения u_S:

$$u_S = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(1 + 2\sum_{i=1}^{m} (-1)^i \cos\left[(2p+1)\alpha_i\right]\right) \frac{\sin\left[(2p+1)\omega t\right]}{2p+1}.$$

Рис. 36.8. Предварительно рассчитанная ШИМ с двухуровневой коммутацией



Пусть $U_{S1\,Max}$ — амплитуда основной гармоники, а $U_{Sn\,Max}$ — амплитуда n-й гармоники ($n = 2p+1$, где $p \in N$). Чтобы исключить гармоники, кратные трем до $2k+1$, ($p = 1$ до $p = k$) при равных нулю четных гармониках, следует численно решить следующую систему уравнений, что даст m значений углов α_i.

$$\begin{cases} U_{S3\,Max} = 0, \\ \ldots \\ U_{S(2k+1)Max} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\sum\limits_{i=1}^{m} (-1)^i \cos(3\alpha_i) = 0, \\ \ldots \\ 1 + 2\sum\limits_{i=1}^{m} (-1)^i \cos\left[(2k+1)\alpha_i\right] = 0. \end{cases}$$

Находим:

m=	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$	$\alpha_3 =$	$\alpha_4 =$	$\alpha_5 =$
5	$10,7°$	$26,3°$	$32,3°$	$52,4°$	$54,5°$
4	$15,5°$	$24,3°$	$46,1°$	$49,4°$	
3	$14°$	$37,2°$	$42,6°$		
2	$26,3°$	$33,3°$			

Тогда

n=	3	5	7	9	11	13	15	
$\frac{U_{Sn\,Max}}{U_{S1\,Max}}$	0	0	0	0	0	29%	56%	**m=5**
	0	0	0	0	29%	55%	36%	**m=4**
	0	0	0	29%	52%	36%	4%	**m=3**
	0	0	30%	49%	36%	3%	2%	**m=2**

Примечание. Действующее значение основной гармоники регулируется значением $U_{S\,Max}$:

$$U_{S1} = \frac{U_{S1\,Max}}{\sqrt{2}} = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi\sqrt{2}}\left|1 + 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^i \cos\alpha_i\right| \qquad (0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi/2).$$

ШИМ с трехуровневой коммутацией

- ***Режим работы*** (рис. 36.4 и 36.9). В течение первого полупериода K_3 замкнут, а K_4 разомкнут, в то время как либо K_1 замкнут, а K_2 разомкнут, либо K_1 разомкнут, а K_2 замкнут. В течение второго полупериода K_2 замкнут, а K_1 разомкнут, в то время как либо K_4 замкнут, а K_3 разомкнут, либо K_4 разомкнут, а K_3 замкнут. Напряжение u_S содержит нечетные гармоники и симметрично относительно вертикали, проходящей через $\pi/2$. Обычно имеется нечетное число m значений угла α_i $(0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi/2)$.

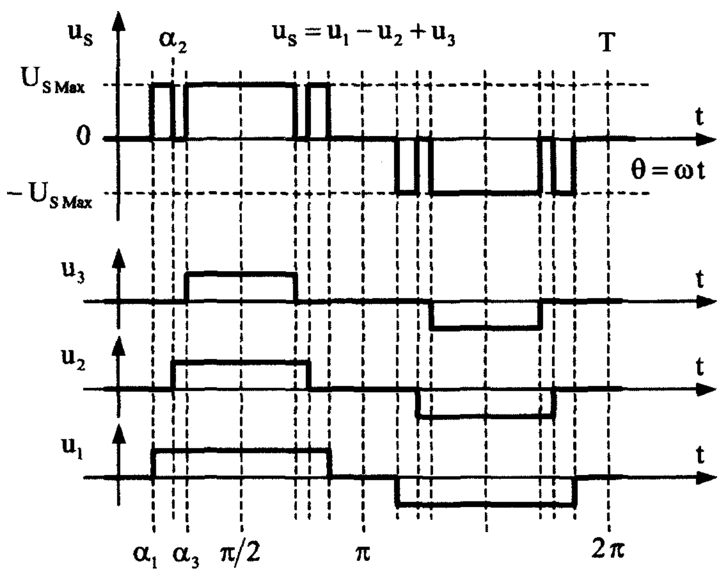


Рис. 36.9. Двухуровневая коммутация. Пример с тремя значениями α_1, α_2 и α_3

- ***Спектр.*** Гармоники напряжения u_S нечетные и обладают «скользящей» симметрией. Напряжения u_S может рассматриваться также как уравновешенная сумма m напряжений u_i (m — нечетное):

$$u_S = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}u_i$$

(см. пример — рис. 36.9, где $u_S = u_1 - u_2 + u_3$). Отсюда выводится разложение в синусный ряд Фурье напряжения u_S:

$$u_S = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\cos\left[(2p+1)\alpha_i\right]\right)\frac{\sin\left[(2p+1)\omega t\right]}{2p+1}.$$

Пусть $U_{S1\,Max}$ — амплитуда основной гармоники, а $U_{Sn\,Max}$ — амплитуда n-й гармоники ($n = 2p+1$, где $p \in \mathbf{N}$). Чтобы исключить гармоники, кратные трем до $2k+1$, ($p = 1$ до $p = k$) при равных нулю четных гармониках, следует численно решить следующую систему уравнений, что даст m значений углов α_i.

$$\begin{cases} U_{S3\,Max} = 0, \\ \dots \\ U_{S(2k+1)Max} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\cos(3\alpha_i) = 0, \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\cos\left[(2k+1)\alpha_i\right] = 0. \end{cases}$$

Находим:

m=	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$	$\alpha_3 =$	$\alpha_4 =$	$\alpha_5 =$
5	18,2°	26,6°	36,9°	52,9°	56,7°
3	22,7°	37,8°	46,8°		

Тогда

n=	3	5	7	9	11	13	15	
$\frac{U_{Sn\,Max}}{U_{S1\,Max}}$	0	0	0	0	0	18%	22%	m=5
	0	0	0	19%	20%	7%	23%	m=3

Примечание. Действующее значение основной гармоники регулируется значением $U_{S\,Max}$:

$$U_{S1} = \frac{U_{S1\,Max}}{\sqrt{2}} = \frac{4U_{S\,Max}}{\pi\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\cos\alpha_i \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi/2).$$

б) ШИМ высокочастотным вырезом или синус-треугольный ШИМ

ШИМ с двухуровневой коммутацией

Принцип (рис. 36.10) состоит в сравнении модулирующего входного напряжения u_{Mod} (представляется в форме желаемых колебаний) с треугольным напряжением u_{Tri} несущей частоты f_0, по сравнению с частотой f напряжения u_{Mod}. Выходное напряжение u_{Cde}, модулированное по ширине импульсов, обеспечивает управление мостовым инвертором. Этот принцип используется также и в усилителях. Тогда говорят об усилителях «класса D».

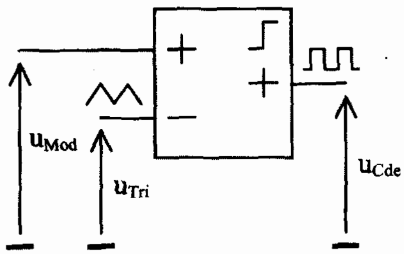


Рис. 36.10. Принцип выреза на высокой частоте

• ***Рабочий режим*** (рис. 36.4 и 36.11). Электронные прерыватели управляются одновременно. Имеем: K_1–K_3 замкнуты, а K_2–K_4 разомкнуты в течение времени αT_0, затем K_1–K_3 разомкнуты, а K_2–K_4 замкнуты в течение времени $(1-\alpha)T_0$, где $T_0 = 1/f_0$, $T = 1/f$ и $\omega = 2\pi f$.

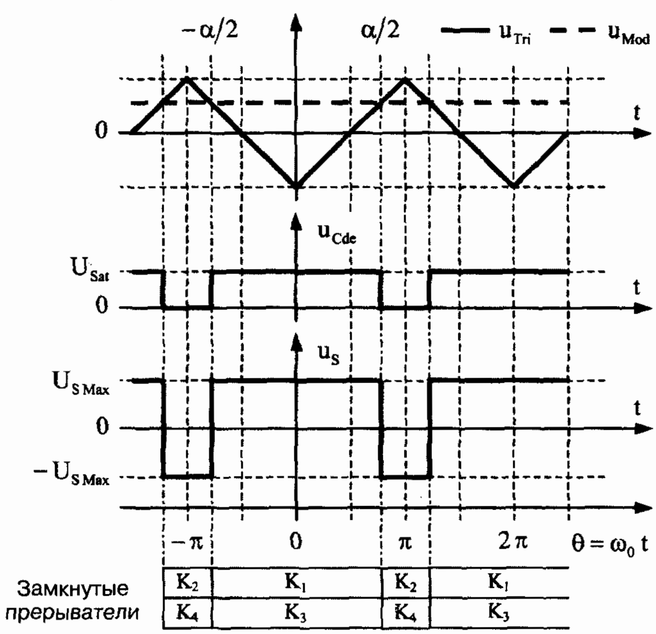


Рис. 36.11. ШИМ с вырезом. Двухуровневое управление

«Среднее мгновенное значение» u_S за период T_0 запишется в виде:

$$u_{S\,cp} = (2\alpha - 1)U_{S\,Max}, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Выбираем следующее изменение коэффициента заполнения:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[1 + k\sin(\omega t)\right], \quad \text{где} \quad 0 \leqslant k \leqslant 1.$$

Тогда «среднее мгновенное значение» u_S за период будет синусоидальным:

$$u_{S\,cp} = kU_{S\,Max}\sin(\omega t).$$

Если $\omega \ll \omega_0$, то основная гармоника u_{S1} напряжения u_S идентична $u_{S\,cp}$.

• ***Спектр.*** Напряжение u_S содержит четные гармоники. Оно разлагается в косинусный ряд Фурье:

$$u_S = U_{S\,Max}\left(k\sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n\pi}\sin\left[\frac{n\pi}{2}(1 + k\sin(\omega t))\right]\cos(n\omega_0 t)\right).$$

Амплитудный спектр является спектральной линией основной частоты ω и линиями с частотами $\omega_0, \omega_0 \pm 2\omega, \ldots, 2\omega_0 \pm 3\omega, \ldots, 3\omega_0 \pm 2\omega, \ldots$, и т. д. Амплитуды различных спектральных линий зависят от k.

Примечания.

– Высокочастотная ШИМ позволяет получить любую форму волны (здесь — это синусоида) и избавиться от гармоник в окрестности несущей частоты и кратных ей частот, что упрощает фильтрование.
– Действующее значение основной гармоники регулируется значениями $U_{S\,Max}$ или k $U_{S1} = kU_{S\,Max}/\sqrt{2}$.

ШИМ с трехуровневой коммутацией

• ***Режим работы*** (рис. 36.4 и 36.12). С помощью двух команд мы формируем трехуровневую волну. Напряжения управления u_{Cde1} и u_{Cde2} получены путем сравнения модулирующего напряжения u_{Mod} и его противоположности — u_{Mod} (фазовый сдвиг π для синусоиды) с треугольным напряжением u_{Tri}.

Как и для двухуровневой ШИМ, имеем:

$$u_{S\,cp} = (2\alpha - 1)U_{S\,Max},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[1 + k\sin(\omega t)\right] \quad \Rightarrow \quad u_{S\,cp} = kU_{S\,Max}\sin(\omega t).$$

• ***Спектр.*** Напряжение u_S содержит четные гармоники. Оно разлагается в косинусный ряд Фурье:

$$u_S = U_{S\,Max}\left(k\sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{p\pi}\sin\left[p\pi(1 + k\sin(\omega t))\right]\cos(p\omega_0 t)\right).$$

Амплитудный спектр является спектральной линией основной частоты ω и линиями с частотами $2\omega_0 \pm \omega, \ldots, 2\omega_0 \pm 3\omega, \ldots, 4\omega_0 \pm \omega, 4\omega_0 \pm 3\omega \ldots$, и т. д.; но никакой спектральной линии с частотами $(2p + 1)\omega_0 \pm \ldots$, что упрощает фильтрование. Амплитуды различных спектральных линий зависят от k.

Примечание. Действующее значение основной гармоники регулируется значениями $U_{S\,Max}$ или k $U_{S1} = kU_{S\,Max}/\sqrt{2}$.

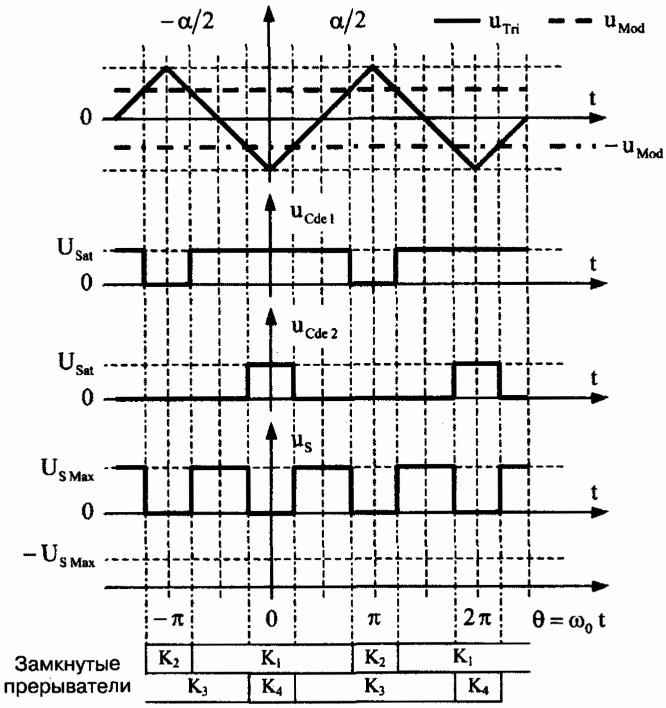


Рис. 36.12. ШИМ с вырезом. Трехуровневое управление

36.3. Принцип построения трехфазных инверторов

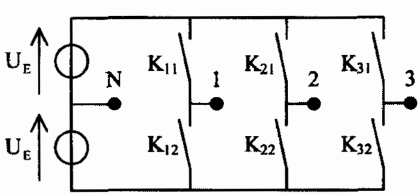


Рис. 36.13. Принцип построения трехфазного инвертора

Объединив три полумоста, получим простейшее построение трехфазного инвертора (рис. 36.13). Каждый электронный прерыватель замкнут в течение полупериода, команды полумостов смещены на 120°. Фазные напряжения v_{1N}, v_{2N}, v_{3N} имеют форму выходного напряжения u_S, полученного при симметричном управлении (см. § 36.2.1). Аналогично: линейные напряжения u_{12}, u_{23}, u_{31} имеют ту же форму, что и напряжение u_S при управлении со смещением $2\alpha = \pi/3$ (см. § 36.2.2). Это смещение соответствует избавлению от гармоник, кратных трем. Очевидно, что такое управление может быть улучшено применением ШИМ таким же образом, как и в однофазных инверторах. Действующее значение напряжения u_{12} составит: $U_{12} = 2U_E\sqrt{2/3}$.

Примечание. Действующее значение основной гармоники регулируется значением напряжения U_E. $U_{12(1)} = \sqrt{6}U_E/\pi$.

ЧАСТЬ V

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

ГЛАВА 37

ЭНЕРГЕТИКА (Нагрузки. Сравнительная оценка двигателей)

Принцип консервативности. Энергия может преобразовываться, но никогда она не возникает и не исчезает. Полная энергия всегда консервативна.

37.1. Энергетический баланс

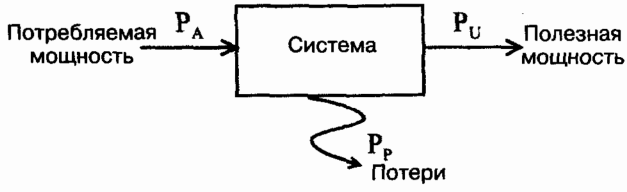


Рис. 37.1. Баланс мощностей системы

Энергия:	$W_A = W_U + W_P$	измеряется в джоулях (Дж).
Мощность:	$P_A = P_U + P_P$	измеряется в ваттах (Вт).
КПД:	$\eta = \frac{P_U}{P_A} < 1$	величина безразмерная.

Примечание. W_A, W_U, W_P — энергии потребляемая, полезная и потерь соответственно за время Δt. Средние значения мощностей потребляемой, полезной и потерь определяются как:

$$P_A = W_A/\Delta t, \quad P_U = W_U/\Delta t, \quad P_U = W_U/\Delta t.$$

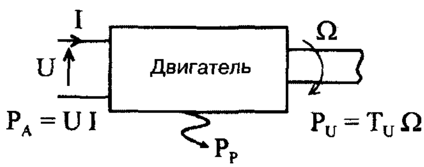


Рис. 37.2. Электродвигатель постоянного тока

Пример 37.1.1. Электродвигатель постоянного тока (рис. 37.2) потребляет электрическую мощность P_A, часть которой преобразуется в полезную механическую мощность P_U на валу, другая часть P_P представляет собой потери, рассеиваемые в форме тепла (потери в железе, тепловые (джоулевы) потери в обмотках и механические).

Вопрос. Определить баланс мощностей двигателя постоянного тока.
Ответ.

$$UI = T_U\Omega + P_P \quad \text{и} \quad \eta = \frac{T_U\Omega}{UI}.$$

Здесь: T_U, Ω — момент на валу и его угловая скорость соответственно.

- ***Кинетическая энергия системы.***

Система линейного перемещения:	**Система вращательного движения:**
$E_C = \frac{1}{2}mv^2$	$E_C = \frac{1}{2}J\Omega^2$
измеряется в Дж = кг(м/с)^2	измеряется в Дж = (кг м^2)(рад/с)^2.

Здесь: m — масса системы; J — момент инерции системы относительно оси вращения; v —скорость линейного перемещения; Ω — угловая скорость вращательного движения.

- ***Мгновенная мощность.***

$$p = \frac{dW}{dt}, \text{ измеряется в ваттах Вт = Дж/с.}$$

37.2. Работа силы. Работа момента

37.2.1. Работа силы

а) Постоянство силы

Сила постоянна, если она имеет одни и те же направление и абсолютное значение на всей траектории действия (рис. 37.3).

Для перемещения системы из точки A в точку B (рис. 37.3) сила выполняет работу W_{AB} (или расходует энергию), значение которой:

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cos\alpha,$$

где $\alpha = (\vec{F}, \overrightarrow{AB})$. Работа движущая, если $W_{AB} > 0$, и сопротивления, если $W_{AB} < 0$.

Примечание. Работа силы зависит от расстояния между точками A и B, но не зависит от формы траектории перемещения. В таком случае говорят, что сила *консервативна.* Тогда мгновенная мощность определяется как $p = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\alpha$, где v — скорость перемещения.

б) Непостоянство силы (рис. 37.4)

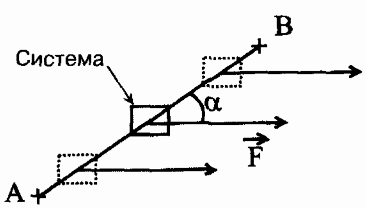


Рис. 37.3. Линейное движение

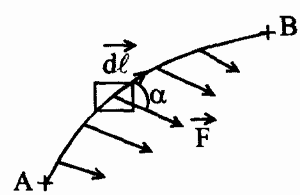


Рис. 37.4. Сила не постоянна

Рассматривается бесконечно малое расстояние $\vec{d\ell}$, на котором сила постоянна. Элементарная работа силы составит $dW = \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = Fd\ell\cos\alpha$, а работа силы определится как:

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{d\ell}.$$

37.2.2. Работа момента сил

Гипотезы: силы и скорость вращения постоянны.

• ***Момент силы относительно постоянно ориентированной оси*** Δ (рис. 37.5). Это векторное произведение вектора радиуса $\vec{r}$ и вектора силы $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{T_{\vec{F}/\Delta}} = \vec{r} \wedge \vec{F}.$$

Здесь: $\overrightarrow{T_{\vec{F}/\Delta}}$ — вектор, ортогональный плоскости рисунка (того же направления, что и ось).

$$T_{\vec{F}/\Delta} = rF\cos\alpha = rF_{\perp}, \text{ измеряется в (Нм).}$$

Здесь: r — плечо рычага; $F_{\perp}$ — полезная составляющая силы. $T_{\vec{F}/\Delta} > 0$, если тенденция вращения соответствует произвольно выбранному положительному направлению, которое предопределяло ориентацию оси.

Примечание. Момент силы, направление действия которой совпадает с осью, равен нулю.

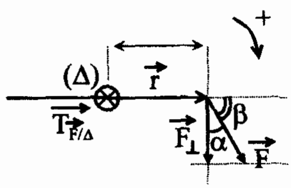


Рис. 37.5. Момент силы

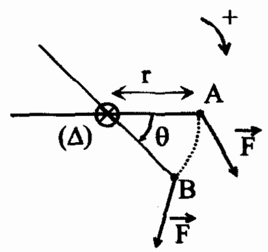


Рис. 37.6. Работа силы при постоянном моменте вращения от A к B

• ***Работа силы при постоянном моменте*** (рис. 37.6).

$$W_{AB} = T_{\vec{F}/\Delta}\theta \text{ измеряется в Дж} = \text{Нм}\cdot\text{рад.}$$

• ***Пара сил с постоянным моментом.*** Две силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ создают момент, если $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$, а прямые их действия не совпадают (рис. 37.7).

• ***Момент пары сил*** (рис. 37.7). Моменты двух сил складываются:

$$T_{\Delta} = F_{\perp}d \text{ измеряется в Нм.}$$

$$F_{\perp} = F_{1\perp} = F_{2\perp} \text{ (полезная составляющая).}$$

• ***Работа пары сил с постоянным моментом*** (рис. 37.8). Работа является движущей, если $W_{AB} > 0$, и сопротивления, если $W_{AB} < 0$.

$$W_{AB} = T_{\Delta}\theta \text{ измеряется в Дж} = \text{Нм}\cdot\text{рад.}$$

• ***Мощность пары сил с постоянным моментом.***

$$p = \frac{dW_{AB}}{dt} = T_{\Delta}\frac{d\theta}{dt} = T_{\Delta}\Omega, \text{ измеряется в Вт} = \text{Нм}\cdot\text{рад/с.}$$

Здесь: Ω — угловая скорость в рад/с.

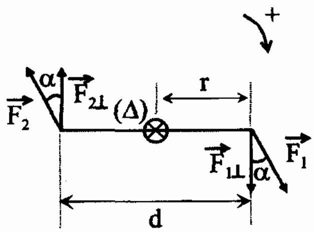


Рис. 37.7. Момент пары сил

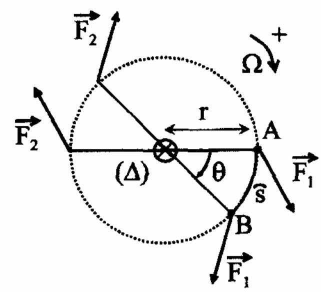


Рис. 37.8. Работа пары сил

Примечания.

- Длина дуги определяется как $\widehat{s} = r\theta$.
- Соотношение между линейной v и угловой Ω скоростями:

$$\frac{d\widehat{s}}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow \quad v = r\Omega \text{ с единицами измерения м/с} = \text{м} \cdot \text{рад/с}.$$

- Переход от рад/с к об/мин: $\Omega = \frac{\pi n}{30}$, где Ω — в рад/с, а n — в об/мин.

37.3. Уравнение движения

Внешние силы или моменты, воздействуя на систему, изменяют ее скорость. Этот процесс происходит в соответствии с уравнением движения.

Система линейного перемещения: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{\text{внешн}}}$, измеряется в Н = кг(м/с)/с.

Система вращательного движения: $J\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \sum \overrightarrow{T_{\text{внешн}}}$, измеряется в Нм = (кгм^2)(рад/с)/с.

Здесь: $d\vec{v}/dt = \vec{a}$ — вектор ускорения; $\overrightarrow{F_{\text{внешн}}}$ — сумма внешних сил воздействия на систему; $d\vec{\Omega}/dt = \vec{\gamma}$ — вектор углового ускорения; $\sum \overrightarrow{T_{\text{внешн}}}$ — сумма внешних моментов воздействия на систему.

Вопрос. Двигатель приводит во вращение со скоростью Ω нагрузку с моментом сопротивления T_R. Записать уравнение движения, пренебрегая моментом трения.

Ответ. $J\frac{d\Omega}{dt} = T_M - T_R$, где T_M — движущий момент двигателя, T_R — момент сопротивления на валу двигателя, J — полный момент инерции, приведенный к валу двигателя.

37.4. Момент инерции твердого тела относительно оси вращения

• ***Момент инерции материальной точки*** массой m по отношению к оси при расстоянии ее до оси r:

$$J = mr^2,\ \text{измеряется в кг}\cdot\text{м}^2.$$

Обобщение на n точек:

$$J = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2.$$

• ***Момент инерции твердого тела*** (S) элементарной массой dm по отношению к оси при расстоянии r элементарной массы до этой оси:

$$J = \int_{(S)} r^2 dm,\ \text{измеряется в кг}\cdot\text{м}^2.$$

(Масса твердого тела: $m = \int_{(S)} dm$, измеряется в кг).

Вопрос. Дать выражение момента инерции однородного цилиндра массой m и радиусом r_0 относительно его оси (см. табл. 37.1).

Ответ. Элементарный момент составит $dv = 2\pi rhdr$ (h — высота цилиндра); элементарная масса составит $dm = 2\pi\rho rhdr$ (ρ — плотность); момент инерции элементарной массы составит $r^2dm = 2\pi\rho r^3hdr$, откуда:

$$m = \int_0^{r_0} 2\pi\rho hrdr = \pi\rho hr_0^2 \quad \text{и} \quad J = \int_0^{r_0} 2\pi\rho hr^3dr = \frac{1}{2}\pi\rho hr_0^4 \Rightarrow J = \frac{mr_0^2}{2}.$$

• ***Теорема Хюйгенса.*** Имеем материальную систему массой m, с моментом инерции J_Δ относительно оси Δ, с моментом инерции $J_{\Delta G}$ относительно оси, проходящей через центр инерции (центр масс) и параллельной Δ, при расстоянии между осями d. Для такой системы имеем:

$$J_\Delta = J_{\Delta G} + md^2.$$

Вопрос. Привести выражение момента инерции однородного цилиндра массой m и радиусом r_0 по отношению.

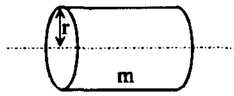
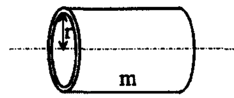
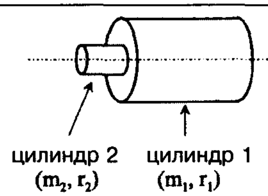
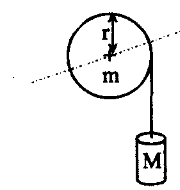
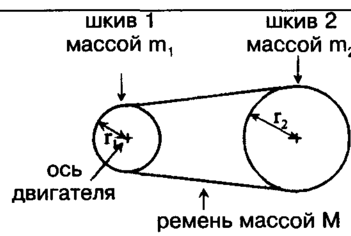
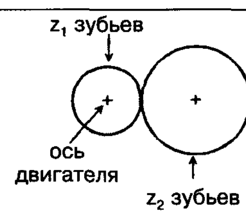
Ответ.

$$J_\Delta = J_{\Delta G} + md^2 = \frac{mr_0^2}{2} + mr_0^2 = \frac{3mr_0^2}{2}.$$

• ***Моменты инерции распространенных конфигураций тел.*** Моменты инерции твердых тел относительно показанной в табл. 37.1 осей или оси двигателя. Здесь: J — момент инерции, приведенный к валу двигателя; $k = \Omega_1/\Omega_2$ — передаточное отношение; Ω — угловая скорость;

J_C/k^2 — момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя; J_1 — момент инерции двигателя.

Таблица 37.1. Некоторые значения моментов инерции

Диск или сплошной цилиндр $J = mr^2/2$	
Полые диск или цилиндр (толщина стенки мала по сравнению с радиусом) $J = mr^2$	
Сплошные коаксиальные цилиндры $J = \frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2}$	
Система масса-блок $J = \frac{mr^2}{2} + Mr^2$	
Ременная передача $J = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} + M\right) r_1^2 + \frac{J_C}{k^2}$, где $k = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$	
Зубчатая передача $J = J_1 + \frac{J_C}{k^2}$, где $k = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$	

37.5. Идеальные характеристики нагрузок

Идеальные характеристики нагрузок представлены на рис. 37.9.

– Характеристика подъемного механизма (краны, конвейеры и т. д.). Момент сопротивления на валу приводного двигателя $T_R = \text{const}$.

- Вентиляторная характеристика (вентиляторы, лопастные насосы и т. п.). $T_R = K\Omega^2$, где Ω — скорость вращения и K — постоянный коэффициент.
- Характеристика обработки материалов (сверление, фрезерование и т. д.). $T_R = K/\Omega$.
- Характеристика насосов (миксеры, поршневые насосы и т. д.). $T_R = K\Omega + b$.

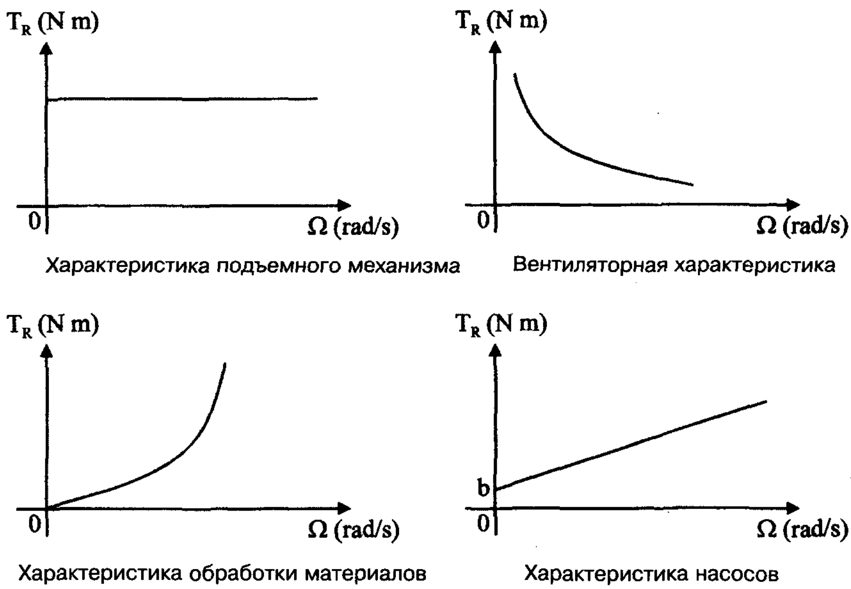


Рис. 37.9. Идеальные характеристики нагрузок

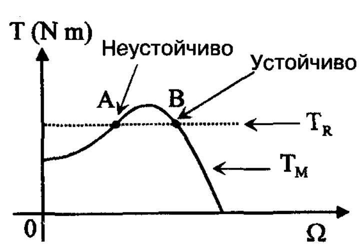


Рис. 37.10. К вопросу устойчивости

Примечание. В установившемся режиме $d\Omega/dt = 0$, откуда $T_M = T_R$. Рабочая точка располагается на пересечении характеристик двигателя и нагрузки. При этом возможно наличие двух точек пересечения, но только одна соответствует устойчивому состоянию. Рабочая точка устойчива (рис. 37.10), если:

$$\frac{dT_M}{d\Omega} < \frac{dT_R}{d\Omega} \text{ (условие устойчивости).}$$

37.6. Сравнительная оценка двигателей

Сравнительная оценка двигателей наглядно представлена в табл. 37.2.

Таблица 37.2. Сравнительная оценка двигателей

	Достоинства	Недостатки	Применение
Двигатели постоянного тока	– Высокий пусковой момент – Независимый контроль момента и скорости – Точное и устойчивое поддержание момента и скорости.	– Затрудненный отвод тепла от якоря – Наличие коллектора – Высокая стоимость – Сложны в изготовлении – Необходимо обслуживание – Ограниченный срок службы	– Большая точность (робототехника и т. п.) – Где нужен большой тормозной момент (подъемные машины) – Автомобили, тяговые машины
Синхронные двигатели, управляемые частотой	– Нет коллектора – Хороший отвод тепла – Высокий КПД – Малая инерция – Высокий срок службы – Высокая скорость при частотном управлении	– Работа в замкнутой системе – Дорогое и сложное электронное управление – Высокая стоимость	– Большие мощности на электротяге – Приводы морских судовых механизмов – В точных устройствах при возбуждении от постоянных магнитов (приводы роботов, станков, медицинских приборов и т. д.)
Асинхронные двигатели	– Прочность, надежность – Нет коллектора – Не важен уход – Высокий срок службы – Дешевы – Наличие пускового момента – Устойчивое регулирование скорости разомкнутой системы	– Большая инерция – Сложное электронное управление скоростью – КПД меньше, чем в синхронном двигателе – Сложности при работе на низких скоростях	– Электрическая тяга – Практически везде при постоянстве скорости – При невысоких требованиях к динамике (насосы, вентиляторы, конвейеры и т. д.)

ГЛАВА 38

ТРАНСФОРМАТОРЫ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ ПИТАНИИ И ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТЕ

См. также гл. 15.

38.1. Использование. Принципиальная схема. Режимы

• ***Главное назначение.*** Повышение напряжения для уменьшения тока и снижения, таким образом, потерь при передаче электрической энергии, затем снижение его для распределения.

• ***Принципиальная схема*** (рис. 38.1). *Трансформатор* состоит из двух катушек, индуктивно связанных по проводящей магнитный поток магнитной цепи из шихтованной мягкой листовой стали.

• ***Соглашение и условные обозначения*** (рис. 38.2). Первичная обмотка — *приемник*, вторичная — *генератор.*

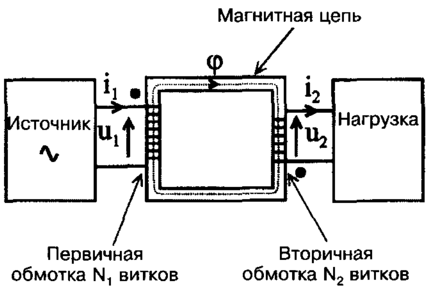


Рис. 38.1. Принципиальная схема

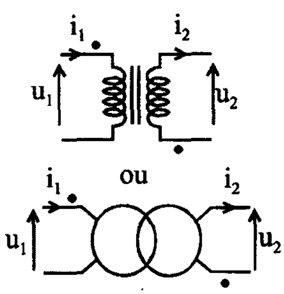


Рис. 38.2. Условные обозначения

• ***Принцип действия.*** Когда запитывается одна обмотка, она создает переменный поток, часть которого пронизывает вторую обмотку. На ее зажимах появляется наведенное в ней напряжение.

Примечание. Трансформатор обратим и может использоваться как повышающим, так и понижающим.

• ***Однополярные зажимы.*** Если токи входят в однополярные зажимы, создаваемые ими потоки складываются. Такие зажимы на схемах обозначаются точками (рис. 38.1 и 38.2). Они указывают полярность.

38.2. Идеальный трансформатор

Идеальным считается такой трансформатор, в котором нет ни потерь в меди, ни потерь в стали, ни рассеяния магнитного потока, и в котором проницаемость магнитной цепи бесконечна.

38.2.1. Режим трансформации

В соответствии с принятыми соглашениями (см. рис. 38.1) *закон Ленца – Фарадея* позволяет записать (см. гл. 4):

$$\begin{cases} u_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt}, \\ u_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{-u_2}{u_1}.$$

Здесь: m — соотношение чисел витков, называемое коэффициентом трансформации, φ — поток на виток.

Закон Гопкинсона (см. гл. 4) позволяет записать:

$$\Re\varphi = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{-i_1}{i_2}.$$

Примечание. Магнитное сопротивление $\Re = 0$, так как магнитная проницаемость магнитной цепи предположительно принята равной бесконечности.

38.2.2. Синусоидальный режим

• ***Формула Бушеро или основное уравнение.***

$$U_1 = 4{,}44 N_1 f S B_{Max}.$$

Здесь S — сечение магнитной цепи (м^2); B_{Max} — максимальное значение магнитной индукции (Тл); f — частота (Гц).

Примечание. Поток создается напряжением питания, так как $\Phi_{Max} = B_{Max}S$.

• ***Модель и диаграмма Френеля идеального трансформатора*** (рис. 38.3 и 38.4).

$$m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}.$$

Примечание. В соответствии с принятыми соглашениями (см. рис. 38.1) значения (напряжений и токов) первичной и вторичной обмоток находятся в противофазе (рис. 38.4).

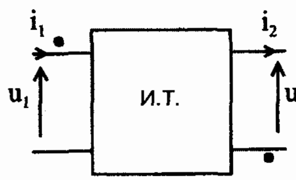


Рис. 38.3. Идеальный трансформатор

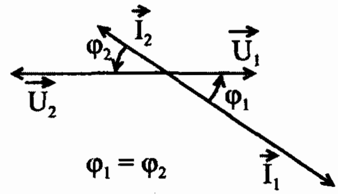


Рис. 38.4. Диаграмма Френеля

• ***Мощности.*** Мощности (активные, реактивные, полные) в идеальном трансформаторе в первичной и вторичной обмотках равны, и КПД $\eta = 1$.

• ***Приведенное полное сопротивление*** (рис. 38.5).

$$\underline{Z}_P = \frac{\underline{Z}_2}{m^2} \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}_P| = \frac{|\underline{Z}_2|}{m^2}.$$

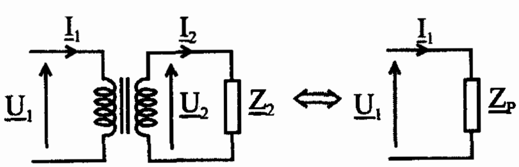


Рис. 38.5. Приведенное к первичной обмотке полное сопротивление

38.3. Реальный трансформатор

Реальный трансформатор имеет и потери и рассеяние магнитного потока.

- Потери в меди: $p_J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$ (измеряются в Вт $=$ Ом $\cdot$ A^2). Это потери в первичной и во вторичной обмотках.
- Потери в железе: p_F (на гистерезис и от токов Фуко). Они зависят от частоты и от Φ_{Max}, следовательно, от питающего напряжения.
- Потери потока в магнитной цепи. Они не линейны из-за явления насыщения.

Как следствие, вторичное напряжение U_2 при нагрузке меньше, чем на холостом ходу. Поэтому коэффициент трансформации определяется как:

$$m = \frac{U_{20}}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

- ***Коэффициент полезного действия.***

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + p_J + p_F}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1, \\ P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2. \end{cases}$$

Здесь: P_1 — потребляемая первичной обмоткой мощность; P_2 — полезная мощность вторичной обмотки, передаваемая нагрузке.

- ***Определение потерь.*** Для этого проводят два эксперимента:
  - Опыт холостого хода ($I_2 = 0$) при номинальном первичном напряжении $U_{1\text{ном}}$, измеряется $P_{10} \approx p_F$.
  - Опыт короткого замыкания при пониженном первичном напряжении $U_{1\text{кз}}$ таком, при котором $I_{1\text{кз}} = I_{1\text{ном}}$ (номинальный ток), измеряется $P_{1\text{кз}} \approx p_J$. Обычно $U_{1\text{кз}} \approx 5\% U_{1\text{ном}}$.

- ***Линеаризованная модель*** (рис. 38.6). Здесь: R_1 и R_2 — сопротивления обмоток; ℓ_1 и ℓ_2 — индуктивности рассеяния; R_F и L — катушка на железном сердечнике, моделирующая состояние первичной обмотки на холостом ходу (так называемый ток намагничивания).

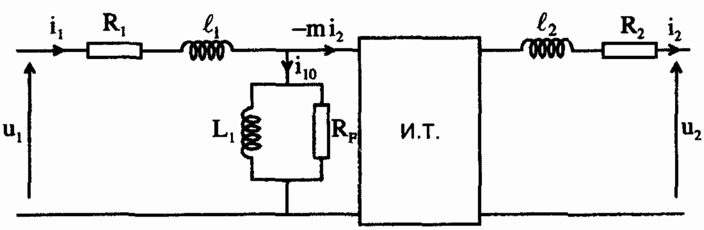


Рис. 38.6. Линеаризованная модель

- ***Гипотеза Каппа.*** При номинальном режиме мы пренебрегаем током i_{10}, что приводит к возможности исключить катушку на железном сердечнике (рис. 38.7).

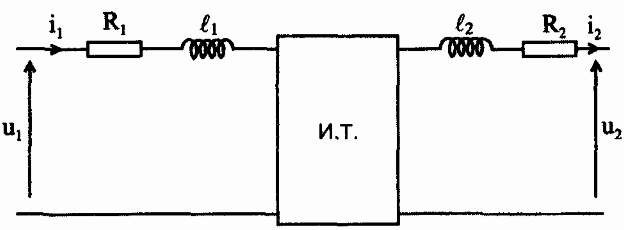


Рис. 38.7. Модель согласно гипотезе Каппа

• ***Эквивалентная модель Тевенена, приведенная ко вторичной обмотке в гипотезе Каппа*** (рис. 38.8). Здесь R_S и X_S — соответственно активное и реактивное сопротивления вторичной обмотки, $\underline{E_S}$ — вторичное напряжение холостого хода.

$$\begin{cases} R_S = R_2 + m^2 R_1, \\ X_S = (\ell_2 + m^2 \ell_1)\omega \end{cases} \quad \text{и} \quad Z_S = \sqrt{R_S^2 + X_S^2}$$

$$\underline{E_S} = \underline{U_{20}} = -m\underline{U_1} \quad \Rightarrow \quad E_S = U_{20} = mU_1.$$

• ***Определение составляющих модели Тевенена по вторичной обмотке.***

– Опыт холостого хода позволяет измерить $E_S = U_{20}$.

– Опыт короткого замыкания позволяет определить:

$$R_S = \frac{P_{1кз}}{I_{2кз}^2} \quad \text{и} \quad Z_S = m\frac{U_{1кз}}{I_{2кз}}$$

и, следовательно, $X_S = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$.

– Опыт на постоянном токе определяет R_1 и R_2 согласно закону Ома.

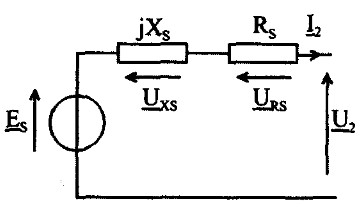


Рис. 38.8. Модель Тевенена, приведенная ко вторичной обмотке

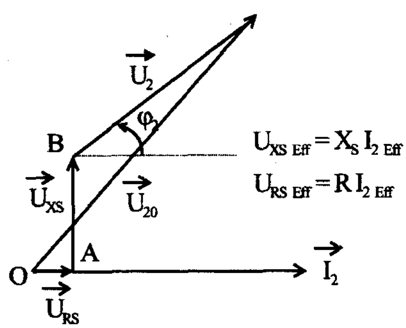


Рис. 38.9. Диаграмма Каппа

• ***Определение падения напряжения на нагрузке, диаграмма Каппа.*** Зная элементы модели и питаемой нагрузки (I_2 и φ_2), можно определить U_2 и рассчитать падение напряжения на нагрузке $\Delta U_2 = U_{20} - U_2$. Исходя из эквивалентной схемы, получим $\overrightarrow{U_{20}} = \overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_{RS}} + \overrightarrow{U_{XS}}$. Затем строится диаграмма Френеля (рис. 38.9), после этого достаточно измерить графически U_2.

Примечание. Треугольник OAB (треугольник Каппа) маленький, можно использовать приближенную формулу: $\Delta U_2 \approx R_S I_2 \cos\varphi_2 + X_S I_2 \sin\varphi_2$.

• ***Заводская табличка.*** Она указывает полную номинальную мощность, рабочую частоту, напряжения обмоток. Знание полной мощности позволяет рассчитать номинальные токи.

$$S_N = U_1 I_1 = U_{20} I_2 \text{ с единицами измерения ВА.}$$

38.4. Трехфазный трансформатор

Из экономических и технических соображений передача энергии происходит трехфазными системами, благодаря наличию трехфазных трансформаторов, которые могут рассматриваться как объединение трех однофазных трансформаторов.

38.4.1. Устройство

Такой трехстержневой трансформатор имеет принужденный поток. Если он содержит один или два стержня дополнительно, он имеет свободный поток.

38.4.2. Группы соединений обмоток

• ***Соединение обмоток.*** При соединении первичных и вторичных обмоток учитывается напряжение источника питания и желаемое для нагрузки напряжение. Первичные обмотки могут соединяться в звезду или треугольник, вторичные обмотки — в звезду, треугольник или зигзаг.

При соединении в зигзаг каждая вторичная обмотка располагается на двух различных стержнях. Это используется в случаях сильной несимметрии фазных нагрузок (например, различных однофазных приемников). Для возможности выбора соединения в зигзаг каждая вторичная обмотка выполняется из двух одинаковых полуобмоток. Тогда на каждый стержень приходится три обмотки: одна с числом витков N_1, а две других с числом витков $N_2/2$ каждая.

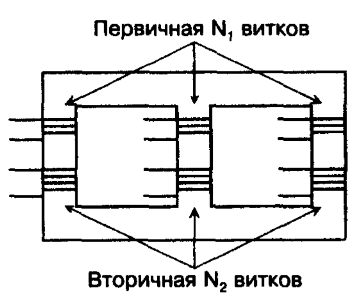


Рис. 38.10. Трехстержневой трансформатор

Примечания.

– Для обозначения соединений обмоток используются буквы: Y — звезда, D — треугольник, Z — зигзаг.

– Заглавными буквами обозначаются обмотки высшего напряжения.

– Первичная обмотка никогда не соединяется в зигзаг.

– Коэффициент трансформации $m = U_{20}/U_1$ (отношение линейных вторичных напряжений на холостом ходу и первичных) зависит от числа витков и типа соединений обмоток (табл. 38.1).

Таблица 38.1. Коэффициент трансформации

Основные соединения	**Коэффициент трансформации**
Yy	$m = \dfrac{N_2}{N_1}$
Yd	$m = \dfrac{N_2}{N_1\sqrt{3}}$
Dy	$m = \dfrac{N_2\sqrt{3}}{N_1}$
Yz	$m = \dfrac{N_2\sqrt{3}}{2N_1}$

• ***Группы соединений обмоток.*** При соединении нескольких трансформаторов по вторичным обмоткам между собой они не должны иметь сдвига фаз между ними. Поэтому важно знать для каждого из них фазовые сдвиги между первичными и вторичными напряжениями. Эти фазовые сдвиги указываются условно как группы соединений обмоток, выраженные в положении стрелок на часовом циферблате (табл. 38.2 и рис. 38.11)

Таблица 38.2.

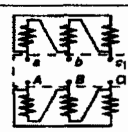
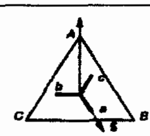
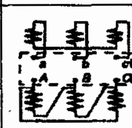
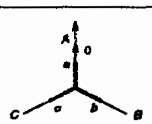
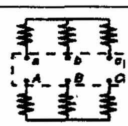
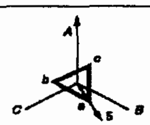
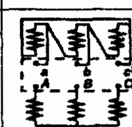
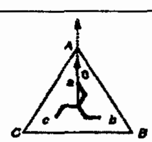
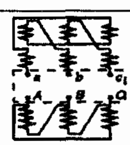
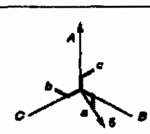
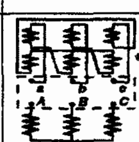
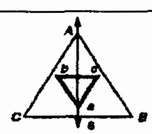
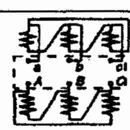
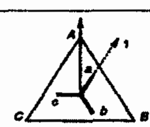
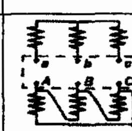
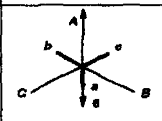
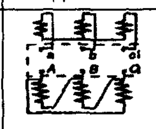
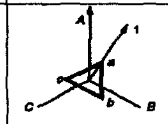
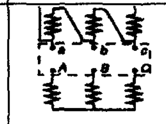
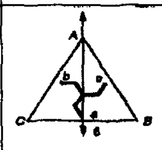
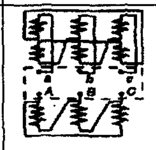
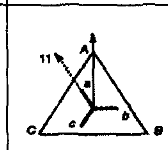
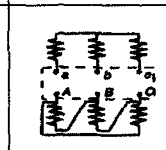
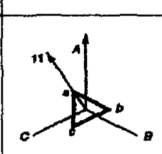
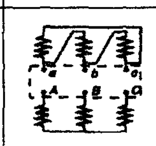
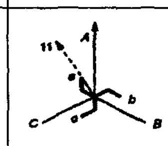
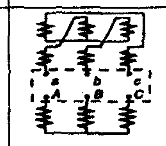
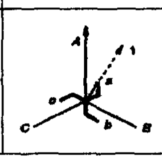
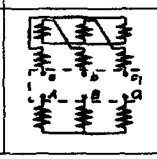
Обозначение	Векторная диаграмма	Схема соединений	Обозначение	Векторная диаграмма	Схема соединений
Dd 0			Dy 5		
Yy 0			Yd 5		
Dz 0			Yz 5		
Dd 6			Dy 1		

Таблица 38.2 (окончание)

Обозначение	Векторная диаграмма	Схема соединений	Обозначение	Векторная диаграмма	Схема соединений
Yy 6			Yd 1		
Dz 6			Dy 11		
Yd 11			Yz 11		
Yz 1					

Пример:
– Первичное напряжение U_1: 0 или 12 (большая стрелка)
– Вторичное напряжение (или ЭДС) E_2: 5 (маленькая стрелка)
Угол сдвига фаз между первичным и вторичным напряжениями составляет 30°×5 =150°.

Рис. 38.11. Определение группы соединений

38.4.3. КПД и модель

• ***КПД.***

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + p_J + p_F}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} P_1 = \sqrt{3}U_1 I_1 \cos\varphi_1, \\ P_2 = \sqrt{3}U_2 I_2 \cos\varphi_2. \end{cases}$$

Здесь: P_1 — мощность, потребляемая первичной обмоткой; P_2 — полезная мощность, передаваемая вторичной обмоткой в нагрузку.

• ***Потери.*** Они определяются так же, как и в однофазном трансформаторе.

• ***Модели.*** Модели однофазного трансформатора (см. рис. 38.6–38.8) можно сохранить, считая, что они представляют только одну фазу, а трехфазный трансформатор имеет их три. Эквивалентная модель строится для случая соединения первичных и вторичных обмоток в звезду, даже если их реальные соединения отличаются (рис. 38.12).

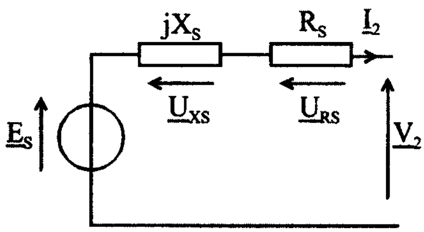


Рис. 38.12. Эквивалентная модель для одной фазы по гипотезе Каппа, приведенная ко вторичной обмотке

• ***Определение составляющих модели.***

– Опыт холостого хода позволяет измерить $E_S = V_{20} = \frac{U_{20}}{\sqrt{3}}$.

– Опыт короткого замыкания позволяет определить:

$$R_S = \frac{P_{1кз}}{3I^2_{2кз}} \quad \text{и} \quad Z_S = m\frac{U_{1кз}}{\sqrt{3}I_{2кз}},$$

и, следовательно, $X_S = \sqrt{Z^2_S - R^2_S}$.

Примечания.

– Действующее значение напряжения между фазой и нейтралью (фазное напряжение) и действующее значение напряжения между фазами (линейное напряжение) соотносятся как $U = \sqrt{3}V$.

– Действующее значение тока в линии есть I.

• ***Заводская табличка.*** На ней указывается полная номинальная мощность, рабочая частота и линейное напряжение. Знание номинального значения полной мощности позволяет рассчитать номинальные токи.

$$S_N = \sqrt{3}U_1I_1 = \sqrt{3}U_{20}I_2 \text{ с единицами измерения ВА.}$$

ГЛАВА 39

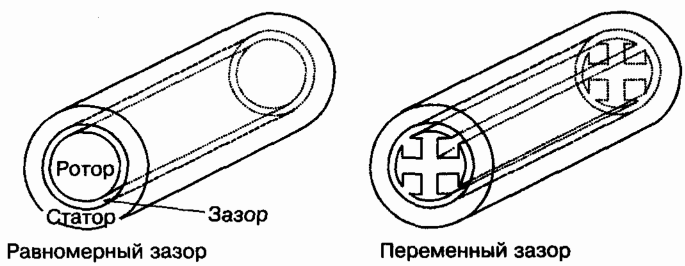
ВРАЩАЮЩИЕСЯ ПОЛЯ

39.1. Вращающиеся машины переменного тока

39.1.1. Устройство

Вращающаяся машина переменного тока состоит из двух концентрических магнитных систем с пазами, разделенных равномерным или переменным зазором (рис. 39.1). Статор и ротор содержат обмотки с постоянными или переменными токами соответственно типу машины.

Рис. 39.1. Типы зазоров



Пример 39.1.1.

	Асинхронная трехфазная машина	Синхронная трехфазная машина
Ротор	Переменный ток	Постоянный ток (или магнит)
Статор	Переменный ток	Переменный ток

39.1.2. Определения

Обозначим N — число проводников или активных ветвей, распределенных в пазах (рис. 39.2). Две активных ветви формируют виток, а состав витков формирует катушку. Находящиеся вне пазов связи, вне действия магнитного поля называются лобовыми частями катушки.

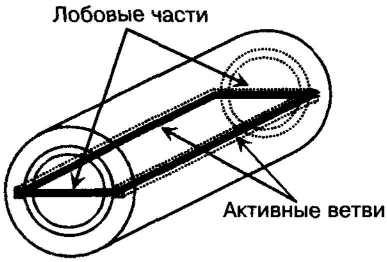


Рис. 39.2. Положение катушки в пазах

39.2. Распределение магнитного поля в зазоре

39.2.1. Двухполюсная машина

а) Сосредоточенная обмотка

Имеем N активных ветвей, помещенных на статоре в двух диаметрально противоположных пазах, обтекаемых постоянным током I (рис. 39.3). Пусть M — точка в зазоре, зафиксированная углом α, а (Γ) — силовая линия поля, проходящая через точку M и ориентированная в соответствии с правилом правой руки, например. Всегда существует точка M′, симметричная M по отношению к линии xx', при которой $\left|\vec{\mathrm{H}}(\mathrm{M})\right| = \left|\vec{\mathrm{H}}(\mathrm{M}')\right|$. Направление $\left|\vec{\mathrm{H}}(\mathrm{M})\right|$ — от ротора к статору, а $\left|\vec{\mathrm{H}}(\mathrm{M}')\right|$ — от статора к ротору, каким бы ни было положение точки M в зазоре. Это поясняет рис. 39.4, который иллюстрирует распределение магнитного поля (или поля возбуждения) в зазоре.

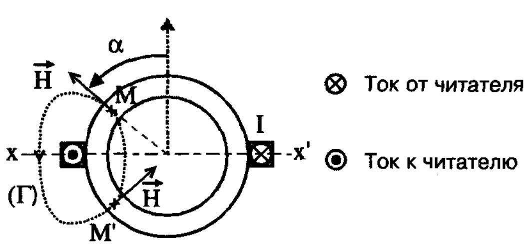


Рис. 39.3. Поле сосредоточенной обмотки

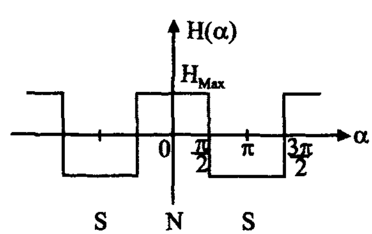


Рис. 39.4. Распределение магнитного поля

Вопрос. Используя теорему Ампера (см. гл. 4), получить выражение для H_{Max}.

Ответ. Если ℓ — средняя длина линии поля, имеем: $\oint\limits_{\Gamma} \vec{\mathrm{H}} \cdot \vec{d\ell} = \mathrm{NI}/2$.

С другой стороны, при слабом насыщении $\mathrm{H}_{\text{в железе}} \ll \mathrm{H}_{\text{в воздухе}}$ (так как

$\mu_{\text{железа}} \ll \mu_{\text{воздуха}}$). Если е — ширина зазора, получим:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{d\ell} \approx \int_{\text{зазор}} H_{Max} d\ell = 2eH_{Max}, \text{ откуда } H_{Max} = \frac{NI}{4e}.$$

б) Распределенная обмотка

На рис. 39.5 показана та же катушка, распределенная на 6 различных пазов, а на рис. 39.6 — распределение магнитного поля, которое приближается к необходимой синусоидальной форме. На практике удается получать почти синусоидальное распределение поля.

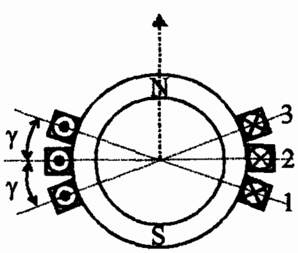


Рис. 39.5. Распределенная обмотка

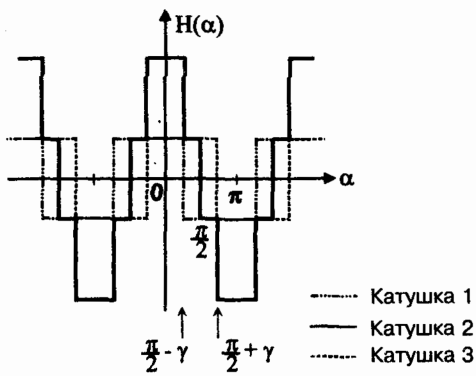


Рис. 39.6. Распределение магнитного поля

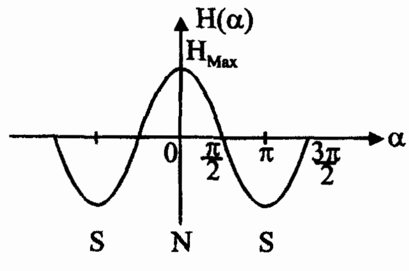
Примечания.

– Мы получим такой же результат с магнитом или катушкой, помещенными на роторе.

– Далее всегда будем полагать возбуждение синусоидальным (рис. 39.7):

$$H(\alpha) = H_{Max} \cos \alpha.$$

Рис. 39.7. Синусоидальное распределение



39.2.2. Многополюсная машина

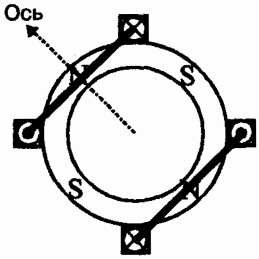


Рис. 39.8. Четырехполюсная машина

На рис. 39.8 показана машина, в четырех пазах которой размещены две соединенных последовательно катушки с током I. Таким образом, мы имеем четыре полюса (четырехполюсная машина), т. е. $p = 2$, где p — число пар полюсов.

Обобщение. Многополюсная машина с числом пар полюсов p (2p-полюсная машина) создает 2p-полюсное возбуждение (рис. 39.9 и 39.10): угловой период равен $\frac{2\pi}{p}$ при синусоидальном распределении $H(\alpha) = H_{Max} \cos(p\alpha)$. Всегда в зазоре находятся четыре северных и четыре южных полюса.

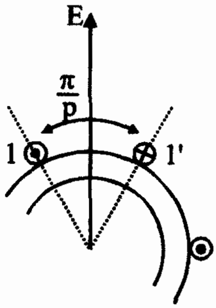


Рис. 39.9. Многополюсная машина

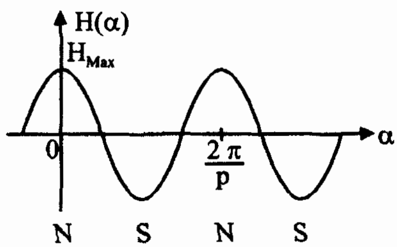


Рис. 39.10. Многополюсное синусоидальное распределение

39.3. Создание вращающегося поля

39.3.1. Эффект вращающихся полей

При вращении магнита создаваемое им магнитное поле также вращается. Если обмотка подвержена воздействию изменяющегося потока вращающегося поля, в ней возникает наведенная переменная ЭДС. Это принцип действия генератора, преобразующего механическую энергию в электрическую.

При создании вращающегося поля без участия вращающейся механической части (случай статоров двигателей переменного тока) находящаяся в нем намагниченная деталь (принцип действия синхронного двигателя) или немагнитный металлический проводник (принцип действия асинхронного двигателя) будет принуждаться следовать за вращающимся полем.

39.3.2. Вращение многополюсного ротора

При вращении многополюсного ротора его поле вращается вместе с ним.

• ***Уравнение вращающего поля с 2р полюсами.*** Рассмотрим многополюсный ротор (рис. 39.11). Пусть O_S — фиксирующая положение статора ось, O_R — ось северного полюса вращающегося с постоянной скоростью Ω ротора. Для точки M зазора имеем: $H(\beta) = H_{Max}\cos(p\beta - p\Omega t)$ и $\alpha = \beta + \theta$, где $\theta = \Omega t$, откуда:

$$H(M, t) = H_{Max}\cos(p\alpha - p\Omega t),$$

где H в А/м и Ω в рад/с.

Если рассмотреть возбуждение в точке M в различные мгновения t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$), заметим, что поле «перемещается» вдоль зазора (рис. 39.12), сохраняя постоянство амплитуды. Поле вращается относительно оси со *скоростью синхронизма* Ω.

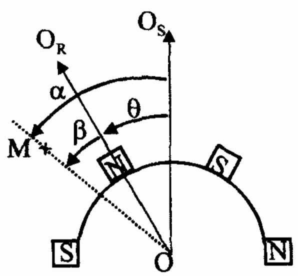


Рис. 39.11. Многополюсный ротор

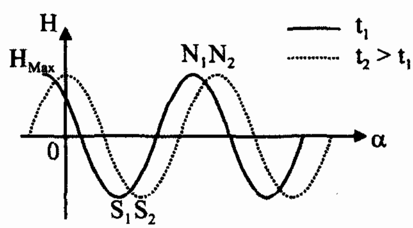


Рис. 39.12. Перемещающееся поле

• ***Основное соотношение.*** Имеем: ω — угловая частота пульсаций (рад/с); f — частота (Гц), наблюдаемая в точке M зазора; Ω (рад/с) или n (об/с) — синхронная скорость вращающегося поля; p — число пар полюсов вращающегося поля.

$$\omega = p\Omega \quad \text{и} \quad f = pn.$$

Пример 39.3.2. Несколько значений синхронных скоростей в зависимости от числа пар полюсов p при частоте f = 50 Гц.

p	1	2	3	4	5
n (об/с)	50	25	16,7	12,5	10
n (об/мин)	3000	1500	1000	750	600

Примечания.

– Машина, ротор которой вращается с синхронной скоростью, называется *синхронной машиной*.

– Вращающееся поле иногда называется *фиктивной полюсной короной* или *фиктивным ротором.*

– Понятие электрического угла. Можно заметить, что в уравнениях реальные углы α, β, θ умножаются на число пар полюсов p. Эти углы, будучи умноженными на p, называются *электрическими углами.* Таким образом, многополюсная машина может быть представлена двухполюсной машиной при условии замены механических углов α, β, θ на углы электрические.

39.3.3. Трехфазные многополюсные обмотки

Трехфазная обмотка состоит из трех идентичных однофазных обмоток на статоре, оси которых E_1, E_2, E_3 сдвинуты на угол $2\pi/3p$ (рис. 39.13). Она питается трехфазной системой токов:

$$\begin{cases} i_1(t) = I_{Max}\cos(\omega t), \\ i_2(t) = I_{Max}\cos(\omega t - 2\pi/3), \\ i_1(t) = I_{Max}\cos(\omega t - 4\pi/3). \end{cases}$$

На рис. 39.14 приведена трехфазная четырехполюсная $(p = 2)$ обмотка.

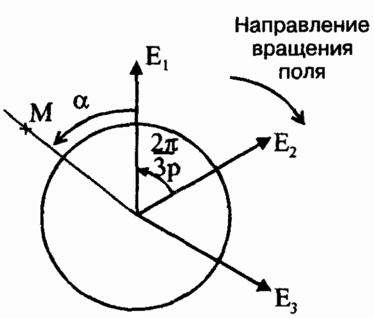


Рис. 39.13. Трехфазная многополюсная обмотка

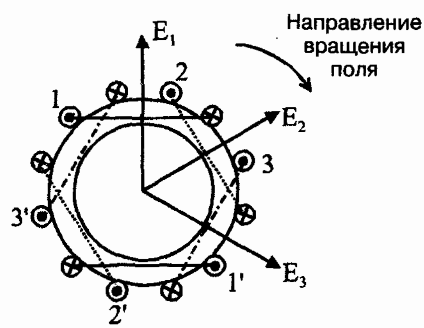


Рис. 39.14. Трехфазная четырехполюсная обмотка

Каждая многофазная обмотка создает распределенное синусоидальное поле, пропорциональное току, если железо не насыщено ($\mu_{воздуха} \ll \ll \mu_{железа}$): $H(\alpha) = k\cos(p\alpha)i(t)$. В точке M зазора (см. рис. 39.13) результирующее поле является суммой полей, созданной каждой обмоткой. Из расчетов следует:

$$H(M, t) = \frac{3}{2}H_{Max}\cos(p\alpha + \omega t).$$

Это выражение результирующего поля 2p-полюсной машины, вращающегося с синхронной скоростью $\Omega = \omega/p$.

Примечания.

– Переключив два питающих провода (например, E_1 и E_2), получим выражение $H(M,t) = \frac{3}{2}H_{Max}\cos(p\alpha - \omega t)$, т. е. поле вращается в обратном направлении.

– Северные полюса вращающего поля находятся по оси обмотки, когда ток в ней максимален.

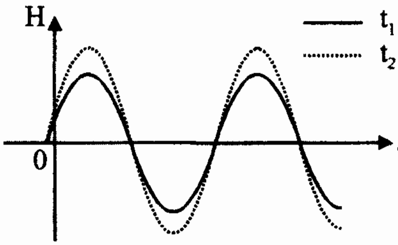
• ***Обобщение на многофазные обмотки: теорема Феррари.*** Многофазная (q фаз) симметричная и многополюсная (p пар полюсов) обмотка, питаемая симметричной многофазной системой токов, создает в зазоре многополюсное синусоидально распределенное поле, вращающееся с синхронной скоростью $\Omega = \omega/p$.

39.4. Однофазная обмотка

Рассмотрим многополярную машину, состоящую из обмотки, питаемой током $i(t) = I_{Max}\cos(\omega t)$. В точке M зазора напряженность поля составит $H(M,t) = H_{Max}\cos(p\alpha)\cos(\omega t)$. Это не вращающееся, а неподвижное поле с изменяющейся амплитудой (рис. 39.15), т. е. пульсирующее поле. Оно эквивалентно двум вращающимся во встречных направлениях полям. Очевидно, что:

$$H(M,t) = \frac{1}{2}H_{Max}\cos(p\alpha - \omega t) + \frac{1}{2}H_{Max}\cos(p\alpha + \omega t).$$

Рис. 39.15. Пульсирующее поле



• ***Теорема Лебланка.*** Однофазная многополюсная обмотка (p пар полюсов), питаемая синусоидальным током и создающая в зазоре многополюсное синусоидально распределенное поле, создает пульсирующее поле, эквивалентное двум встречно направленным многополюсным полям, вращающимся с синхронной скоростью $\Omega = \omega/p$.

39.5. Двухфазная обмотка

Вращающееся поле можно создать также с помощью двух идентичных однофазных обмоток, смещенных на $\pi/2$ и питаемых токами, также смещенными между собой на $\pi/2$. Тогда имеем: $H(M, t) = H_{Max} \cos(p\alpha + \omega t)$. Фазовое смещение можно создать, помещая в цепь одной обмотки реактивный элемент, обычно — конденсатор. Этот способ используется для пуска, например, однофазных асинхронных двигателей.

ГЛАВА 40

ТРЕХФАЗНЫЕ СИНХРОННЫЕ МАШИНЫ

40.1. Устройство. Принцип действия. Возбуждение

- ***Устройство*** — две разделенные зазором части:

Ротор с полюсами — это вращающаяся часть. В небольших машинах иногда это постоянный магнит, но обычно это электромагнит в форме массивного ферромагнитного цилиндра с обмоткой, питаемой постоянным током (возбуждение), создающим р пар (северный и южный) чередующихся полюсов.

Существуют роторы с явно выраженными полюсами с большим числом пар полюсов р и с неявно выраженными полюсами (рис. 40.1 и 40.2).

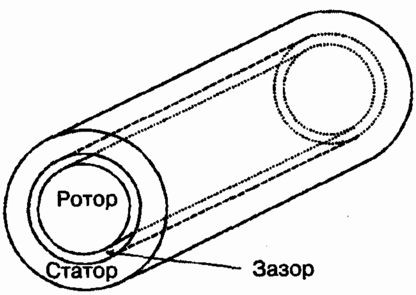


Рис. 40.1. Неявно выраженные полюса

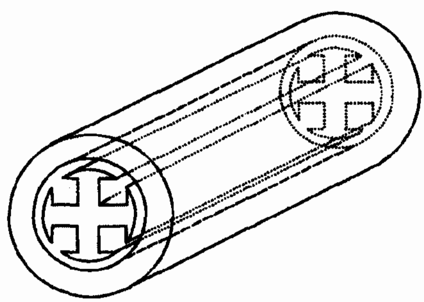


Рис. 40.2. Явно выраженные полюса

Статор — это неподвижная часть в форме ферромагнитной шихтованной станины, содержащая трехфазную обмотку, питаемую симметричным трехфазным током. Это создает почти синусоидально распределенное вращающее поле с числом полюсов ротора. Обмотки могут соединяться как в звезду (более распространено), так и в треугольник.

Примечание. Обычно индуктором является ротор, а якорем — статор.

- ***Принцип действия.*** Если вращать ротор с постоянной скоростью Ω, в статорных обмотках под воздействием вращающегося поля ротора будет наведена трехфазная система ЭДС с угловой электрической частотой $\omega = p\Omega$ или электрической частотой $f = pn$. Здесь ω и Ω в рад/с, f —

частота в Гц, n — частота вращения в об/с, p — число пар полюсов. Это режим генератора, используемый в производстве электрической энергии.

- ***Обратимость.*** Режим двигателя будем иметь, если питать статор от трехфазного источника, ротор синхронно следует за вращающимся полем со скоростью $\Omega = \omega/p$. В зазоре действует результирующее вращающееся поле статора и ротора.

- ***Возбуждение машины.***
  - Это может быть внешний источник питания ротора постоянным током через систему колец и щеток.
  - Это может быть самовозбуждение от внутреннего источника возбуждения или от дополнительного генератора, располагаемого на одном валу с машиной.

- ***Условные обозначения и соглашения*** (рис. 40.3).

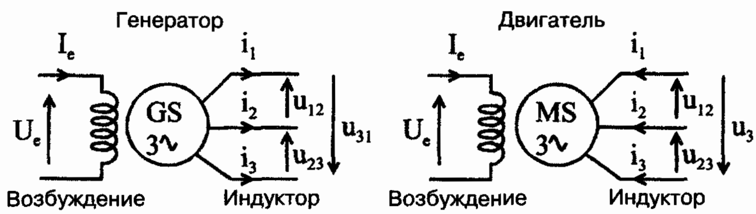


Рис. 40.3. Условные обозначения и соглашения

- ***Заводская табличка*** (рис. 40.4).

Δ/Y 230/400 V 5,25/3 A

2kVA cosφ 0,8 20 Hz

Ex: 50 V 2,4 A

Рис. 40.4. Заводская табличка

  - Наименьшее и номинальное напряжение статорной обмотки.
  - Наименьший и номинальный линейный ток при соединении обмотки звездой. Пластина с клеммными выводами позволяет выполнить соединение обмоток.
  - Для номинального режима указывается также полная мощность, рабочая частота, номинальные значения (напряжение и ток) возбуждения и иногда коэффициент мощности.

Примечание. Генератор, как трансформатор, не имеет фиксированного коэффициента мощности. Идеально он должен быть равным единице.

На практике допускается работа с коэффициентом мощности, указанным на заводской табличке.

40.2. Трехфазный генератор

40.2.1. Холостой ход

• ***Напряжения на зажимах обмоток.*** На зажимы каждой обмотки генератор выдает трехфазное симметричное напряжение:

$$\begin{cases} e_{1(t)} = E\sqrt{2}\sin(\omega t), \\ e_{1(t)} = E\sqrt{2}\sin(\omega t - 2\pi/3), \\ e_{1(t)} = E\sqrt{2}\sin(\omega t + 2\pi/3). \end{cases}$$

• ***Действующая ЭДС на зажимах обмоток.***

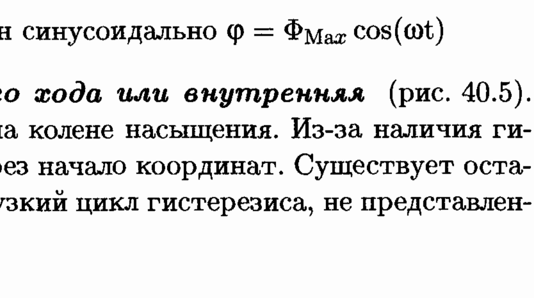
$$E_{\mathrm{Eff}} = KNf\Phi_{Max}.$$

Здесь: E_{Eff} — действующее значение ЭДС холостого хода на зажимах обмотки (В); K — коэффициент Каппа, зависящий от особенностей машины; N — число активных проводников обмотки; f — частота наведенного напряжения (Гц) (f = pn, где n — частота вращения ротора в об/с); Φ_{Max} — максимальное значение потока, охватываемого одним витком (или двумя активными проводниками) (Вб).

Примечание. Поток распределен синусоидально $\varphi = \Phi_{Max}\cos(\omega t)$

• ***Характеристика холостого хода или внутренняя*** (рис. 40.5). Рабочая точка P располагается на колене насыщения. Из-за наличия гистерезиса кривая не проходит через начало координат. Существует остаточная ЭДС E_{REff} (так же, как и узкий цикл гистерезиса, не представленный на рисунке)

Рис. 40.5. Характеристика холостого хода



40.2.2. Автономный генератор под нагрузкой

• ***Автономность.*** Генератор является автономным, если он один питает нагрузку. Это, например, дизель-генераторные установки. И напротив, он не является автономным, если работает на электрическую сеть.

• ***Магнитная реакция якоря.*** Когда генератор нагружен, якорь создает вращающееся поле, изменяющее полезный поток, а следовательно, и ЭДС. Это магнитная реакция якоря. Таким образом, под нагрузкой ЭДС отличается от ЭДС холостого хода, создаваемой только полюсами ротора.

• ***Нагрузочная или внешняя характеристика*** (рис. 40.6).

40.2.3. Эквивалентная модель приведенной к статору машины

• ***Модель Бен-Эшенбурга или синхронной реактивности*** (рис. 40.7).

$$\underline{E} = \underline{V} + \underline{U}_X + \underline{U}_R.$$

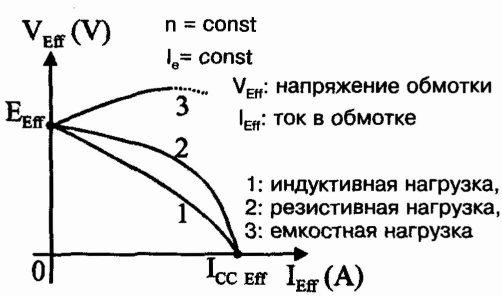


Рис. 40.6. Нагрузочная характеристика

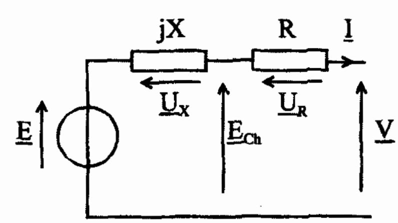


Рис. 40.7. Модель одной фазы

• ***Диаграмма Френеля*** (рис. 40.8). Для модели (рис. 40.7) имеем:

$$\vec{E} = \vec{V} + \vec{U_X} + \vec{U_R}.$$

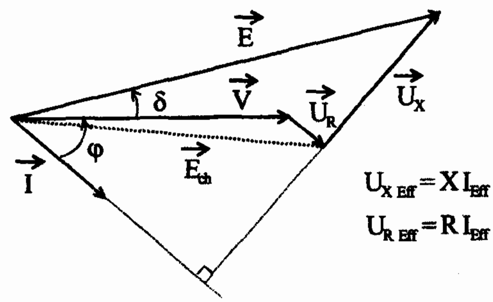
Здесь: V_{Eff} — напряжение обмотки (В); I_{Eff} — ток в обмотке (А); E_{Eff} — ЭДС холостого хода (В); E_{ChEff} — ЭДС под нагрузкой (В); X — реактивное синхронное сопротивление (Ом); R — активное сопротивление обмотки (Ом); $X = L\omega$, где L — индуктивность, учитывающая состав обмоток и рассеяния.

Примечания.

– Очень часто R может быть исключено из схемы, так как $R \ll X$. Тогда ЭДС под нагрузкой равна напряжению обмотки.

– Угол δ — это электрический угол, называемый *внутренним углом смещения*. Он соответствует смещению ротора между режимом холостого хода и под нагрузкой машины. В генераторе ротор упреждает поле на угол $\delta = p\theta$ (θ — угол механический), в двигателе ротор отстает от поля на угол δ.

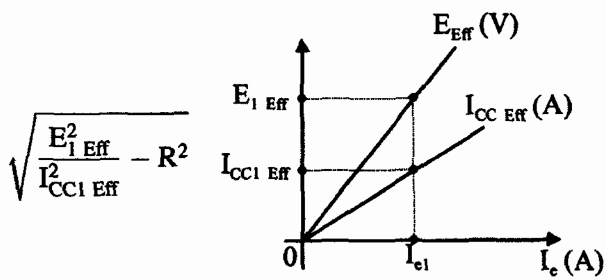
Рис. 40.8. Диаграмма Френеля



• ***Определение элементов модели.*** Измерением на постоянном токе в нагретом состоянии определяется сопротивление R. Исходя из характеристик холостого хода и короткого замыкания $I_{кз} = f(I_e)$ (рис. 40.9) для заданного I_{e1} определяем E_{1Eff} и $I_{кз1}$.

$$X = \sqrt{\frac{E_{1Eff}^2}{I_{кз}^2} - R^2}.$$

Рис. 40.9. Характеристики холостого хода и короткого замыкания



Примечание. Если нельзя измерить сопротивление R обмотки, то всегда можно измерить сопротивление R_1 между двумя фазами. Напомним, что при соединении в звезду $R_1 = 2R$, тогда как при соединении в треугольник $R_1 = 2R/3$.

• ***Справедливость модели.*** Модель используется в случае ненасыщенного генератора с неявно выраженными полюсами. В этом случае

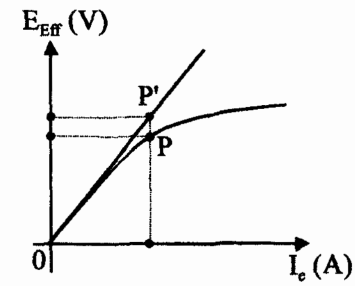


Рис. 40.10. Слабо насыщенный генератор

X = const. Если генератор насыщен слабо, можно линеаризовать характеристику холостого хода и сместить точку P в P′ (рис. 40.10). Если насыщение значительно, модель можно сохранить, но тогда $X \neq$ const и должно быть определено для каждой рабочей точки.

Примечание. Это не единственная модель и не самая точная (модель Потье, которая учитывает насыщение, или модель Блонделя для генераторов с явно выраженными полюсами).

40.2.4. Баланс мощностей. КПД

- ***Поток мощностей*** (рис. 40.11 и табл. 40.1).

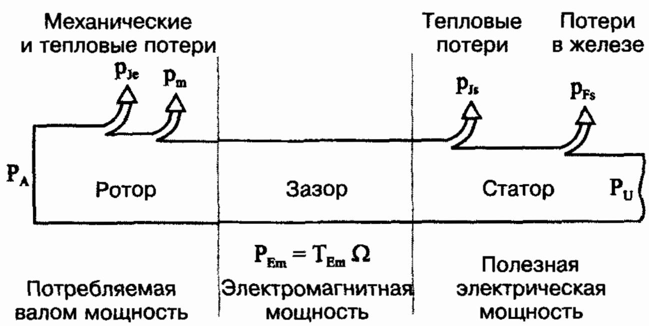


Рис. 40.11. Поток мощностей

Таблица 40.1. Составляющие баланса мощностей

$P_A = T_M\Omega$	Единицы: Вт = Нм·рад/с
$p_{Je} = U_e I_e$	Единицы: Вт = В·А
$p_{Js} = (3/2)R_1 I^2$	Единицы: Вт = Ом·А^2
$P_U = \sqrt{3}UI\cos\varphi$	Единицы: Вт = В·А

В табл. 40.1 U — линейное напряжение; I — линейный ток; R_1 — сопротивление между двух фаз статора; U_e — напряжение возбуждения; I_e — ток возбуждения; T_M — механический момент на валу машины.

Примечания.

– Если r — сопротивление цепи возбуждения, а U_e — напряжение возбуждения, то:

$$p_{Je} = U_e I_e r I_e^2 = U_e^2/r.$$

– При постоянстве напряжения и частоты p_{Fs} = const и p_m = const.

– Формула $p_{Js} = (3/2)R_1I^2$, где R_1 — сопротивление между двух фаз (всегда измеряемо), независимо от способа соединения статорных обмоток.

• ***КПД*** всегда очень хороший.

$$\eta = \frac{P_U}{P_A} = \frac{P_U}{P_U + (p_m + p_{Je} + p_{Fs} + p_{js})}.$$

Примечание. Если генератор без самовозбуждения, то $P_A = T_M\Omega + p_{Je}$.

• ***Определение потерь.***

– На холостом ходу при номинальном токе I_e измеряем $P_{A0} \approx p_m + p_{Fs}$.
– На холостом ходу при $I_e = 0$ измеряем $P'_{A0} \approx p_m$. Отсюда $p_{Fs} = P_{A0} - P'_{A0}$.
– Сопротивления могут быть определены из опыта на постоянном токе.

40.2.5. Подключение к сети

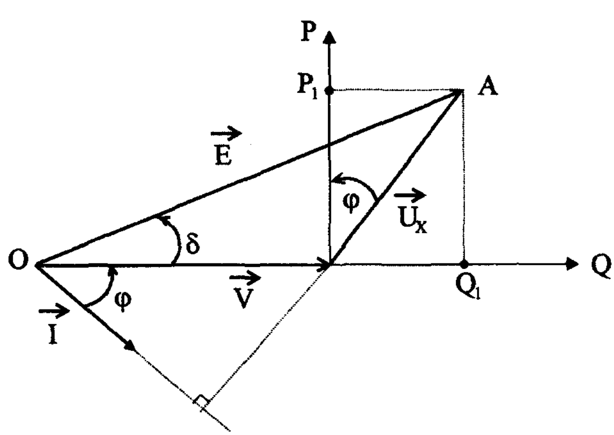
Сеть имеет свои напряжение и частоту.

• ***Условия подключения к сети.*** Между генератором и сетью следует соблюдать: равенство напряжений, частот и одинаковый порядок следования фаз.

• ***Обмен мощностями.*** Для упрощения используем модель Бен-Эшенбурга, пренебрегая сопротивлением якоря. На диаграмме Френеля наносим векторы активной P и реактивной Q мощностей (рис. 40.12). В функции внутреннего угла эти мощности выразятся как:

$$P = \frac{3VE}{X}\sin\delta \quad \text{и} \quad Q = \frac{3V}{X}(E\cos\delta - V) \quad (\text{P — в Вт, Q — в вар}).$$

Рис. 40.12. Диаграмма мощностей



При работе с постоянным возбуждением (рис. 40.13), если воздействовать на P (со стороны приводного двигателя на валу генератора), рабочие точки A_i перемещаются по окружности диаметром E с центром в 0: мы регулируем P и Q. На рис. 40.13 показаны две точки A_1 и A_2, для которых $Q_1 > 0$ и $Q_2 < 0$.

Примечание. Когда $Q < 0$ (потребление реактивной мощности), говорят, что машина недовозбуждена. Она перевозбуждена в противном случае. Тогда она выдает реактивную энергию в сеть. Это обстоятельство широко используется для компенсации дефицита реактивной энергии в сети, т. е. для повышения коэффициента мощности сети.

Работа с постоянным возбуждением (рис. 40.13).

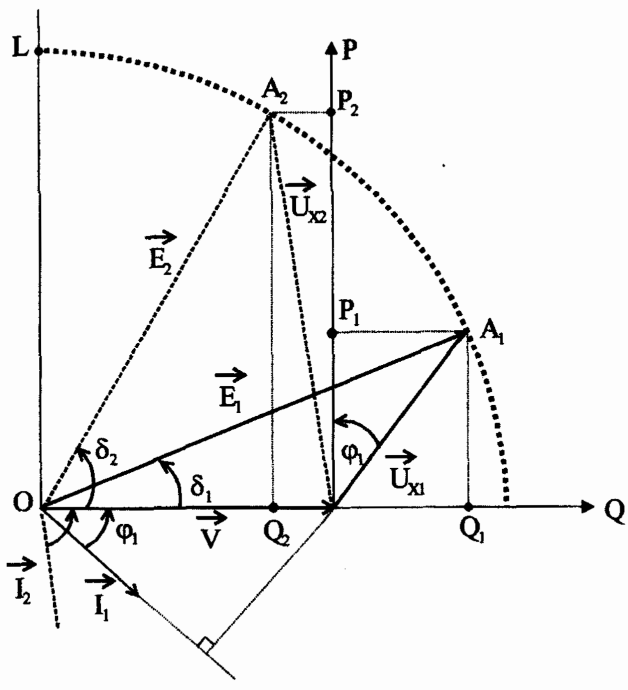
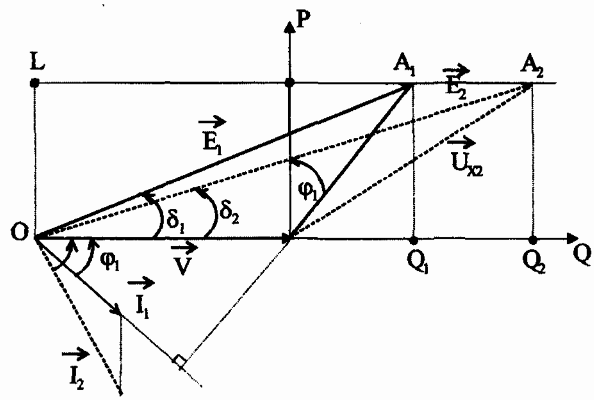


Рис. 40.13. Работа с постоянством возбуждения

Работа с постоянством механической мощности. Изменяя ток возбуждения, устанавливаем значение Q (рис. 40.14). Рабочие точки A_i перемещаются по горизонтальной прямой. Следовательно, активную и реактивную мощности можно регулировать независимо одну от другой.

Примечание. Очевидно, что синхронная машина может работать с равной нулю реактивной мощностью в отличие от асинхронной машины, которая всегда потребляет реактивную мощность.

Рис. 40.14. Работа с постоянством мощности



• ***Момент и устойчивость.*** Если предположить машину без потерь, момент нагрузки, противодействующий со стороны ротора, запишется в виде: $T_R = P/\Omega$ или:

$$T_R = \frac{3VE}{\Omega X}\sin\delta = K\sin\delta.$$

Графическое представление этого уравнения приведено на рис. 40.15.

Только часть OL, где $0 < \delta < \pi/2$, соответствует устойчивой работе машины. Если выйти за предел устойчивости (точка L), машина выпадает из синхронизма.

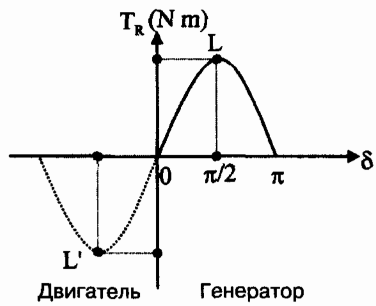


Рис. 40.15. Характеристика $T_R = f(\delta)$

40.3. Синхронный двигатель

Синхронная машина обратима. Полученные для генераторного режима результаты справедливы и для двигательного режима. Для индикации переменных используется концепция потребителя. Направление вращения изменяется переключением двух фаз статора.

40.3.1. Упрощенная модель. Баланс мощностей и момент

• ***Модель Бен-Эшенбурга*** (рис. 40.16). Параметры определяются таким же способом, как и при генераторном режиме.

• ***Диаграмма Френеля*** (рис. 40.17). Согласно модели имеем: $\vec{V} = \vec{E} + \vec{U_X}$.

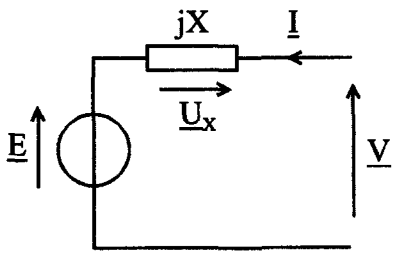


Рис. 40.16. Модель Бен-Эшенбурга

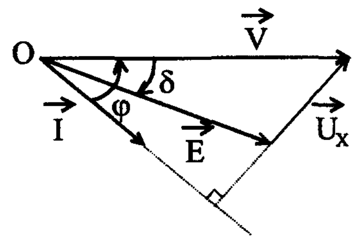


Рис. 40.17. Диаграмма Френеля

• ***Баланс мощностей и момент.*** Он остается таким же с $P_A = \sqrt{3}UI\cos\varphi$ (электрическая мощность) и $P_U = T_U\Omega$ (механическая мощность).

$$T_{Em} = \frac{3VE}{\Omega X}\sin\delta \quad \text{и} \quad T_{Em} = T_U,$$

если пренебречь потерями.

40.3.2. Пуск. Регулирование скорости

Синхронный двигатель не обладает пусковым моментом[1]. Он может быть подключен на сеть только при скорости, близкой к синхронной. Вот несколько возможных способов пуска:

– Машина приводится во вращение дополнительным двигателем, затем она подключается к сети.

– Двигатель питается от источника с переменной частотой, поддерживая соотношение $V/f = \text{const}$.

– Мотор задает собственную частоту, исходя из информации о положении ротора, он работает в режиме двигателя, ведомого полем[2].

40.3.3. Ведомый полем синхронный двигатель

• ***Описание и принцип действия.*** Электромагнитный момент максимален, если статорное и роторное вращающиеся поля образуют между собой угол 90°. Датчик положения позволяет каждое мгновение фиксировать положение ротора, а электронный преобразователь частоты питает статор. Изменения между сдвигами фаз полей отражаются на частоте питания, которая стремится установить равновесие (между скоростью ротора и вращающегося с синхронной скоростью поля, смещенного

[1]Мнение ошибочное. — *Прим. перев.*

[2]Широко распространен асинхронный пуск с последующим вхождением в синхронизм. — *Прим. перев.*

на 90°). Поле ведет двигатель без риска выпадения из синхронизма. Таким образом, регулятор частоты синхронного двигателя выполняет те же функции, что и коллектор двигателя постоянного тока. Ведомый полем синхронный двигатель эквивалентен двигателю постоянного тока, питаемого преобразователем постоянного тока.

Изучение такого двигателя отличается сложностью вопроса. На рисунке 40.18 приведена упрощенная функциональная схема, с учетом того, что существует много типов преобразователей и стратегий управления.

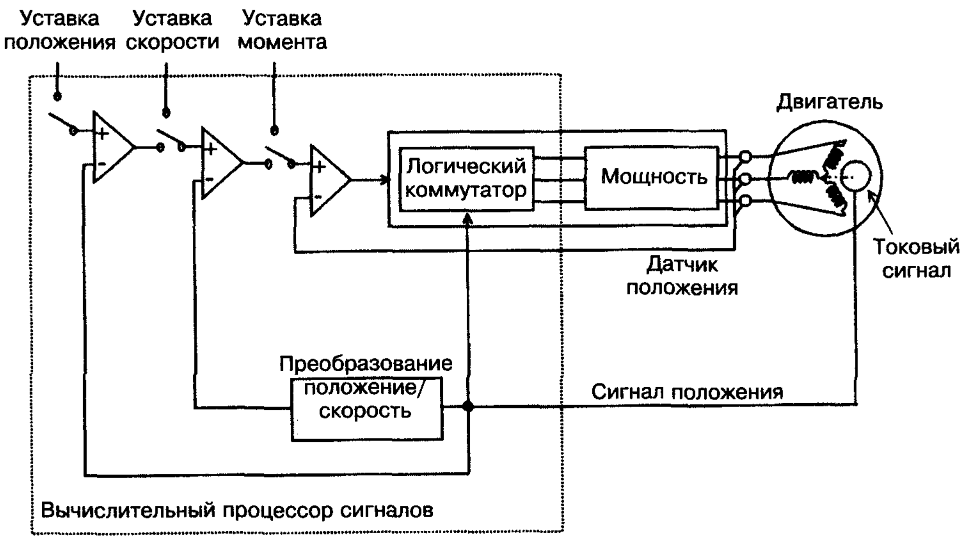


Рис. 40.18. Принцип действия ведомого полем двигателя

40.4. Бесконтактный двигатель

40.4.1. Описание

Как и синхронный двигатель, ведомый полем, бесконтактный двигатель представляет собой такой же двигатель, но его ротор имеет в качестве возбудителя постоянные магниты. Состав датчиков (например, датчиков Холла), помещенный на статоре, определяет положение ротора. Полученная информация проходит электронную обработку и обеспечивает питание статорных обмоток переменным током (рис. 40.19)

40.4.2. Принцип действия двигателя с прямоугольными токами

• ***Идеальный случай.*** На рис. 40.20 приведен пример явнополюсной машины с двухполюсным ротором и с трехфазным статором с обмотками, соединенными в звезду, уложенными в шесть пазов. Идеальная ситуация состоит в том, что имеем идеальный электронный прерыватель, прямоугольную форму ЭДС, 180° полюсной дуги магнита. Три датчика (D_1, D_2, D_3), смещенные на 120°, помещены на статоре соответственно осям (E_1, E_2, E_3) трех фаз. Угол θ фиксирует положение магнитной оси ($\vec{B}$) ротора по отношению к оси обмотки E_1.

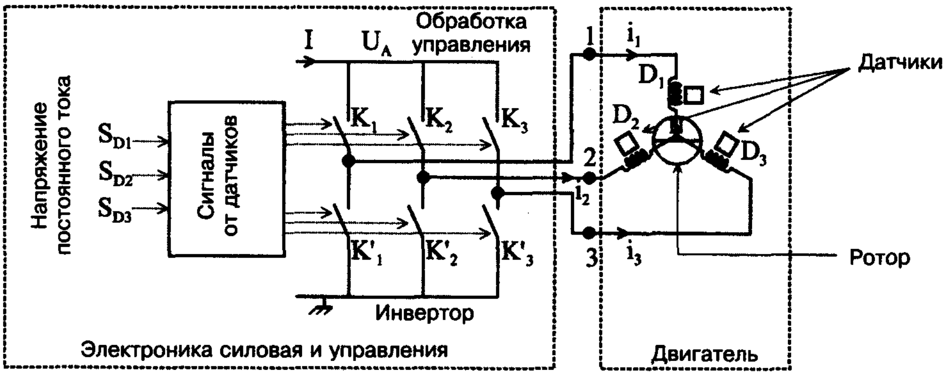


Рис. 40.19. Принципиальная схема бесконтактного двигателя

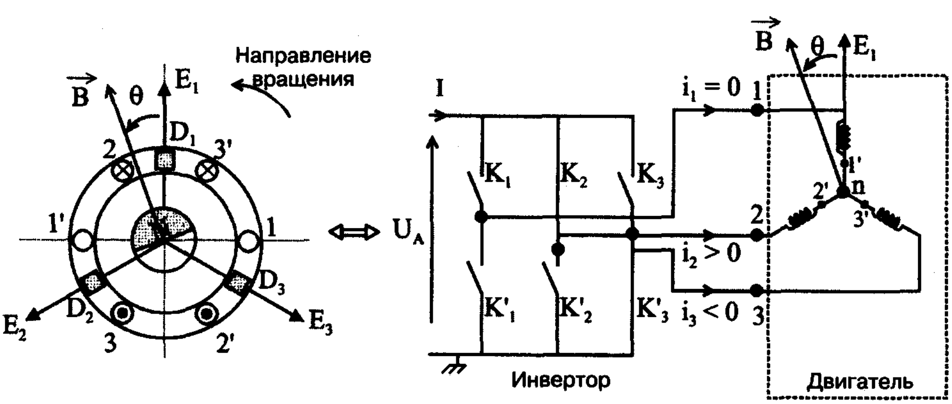


Рис. 40.20. Принцип действия

Примечание. Точка в центре окружности означает направление тока к читателю, а крест — от читателя.

На рис. 40.20 угол $\theta = 20°$. Датчик D_1 определяет северный полюс и посылает положительный сигнал S_{D1}, тогда как датчики определяют южный полюс и посылают отрицательные сигналы S_{D1}, S_{D2} (рис. 40.21). Чтобы двигатель вращался в выбранном направлении, ток должен войти

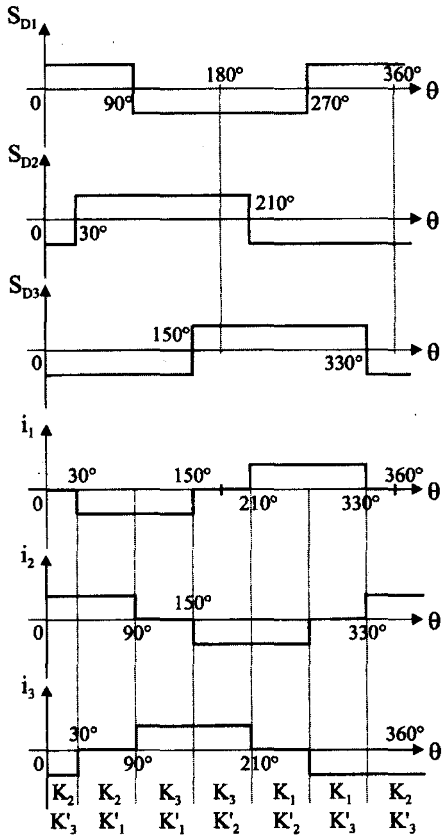


Рис. 40.21. Временна́я диаграмма датчиков, токов и прерывателей

в фазу 2 ($i_2 = I > 0$) и выйти через фазу 3 ($i_3 = -I < 0$). Логика обработки сигналов должна замкнуть прерыватели K_2 и K'_3 и поддерживать остальные открытыми (рис. 40.21). Таким образом, фазы 2 и 3 питаются постоянным током I, а фаза 1 отключена. Это состояние будет сохраняться, пока $\theta < 30°$. Как только это значение достигается, D_2 детектирует северный полюс, и логика действует соответственно, чтобы поддержать направление вращения и момент постоянными.

На рис. 40.21 показана эволюция сигналов, посылаемых датчиками в функции угла θ, статорные токи и проводимости электронных прерывателей. Каждый прерыватель проводит в течение 120°, питая таким образом две фазы одновременно постоянным током, третья фаза при этом отключена.

На рис. 40.22 показана эволюция электромагнитного момента, создаваемого каждой фазой, и полного момента (суммы моментов), который является постоянным.

• ***Наиболее реальный случай.*** Распределение витков каждой фазы по нескольким пазам, смещенным друг относительно друга на несколько градусов (см. гл. 39) приводит к трапецеидальной форме ЭДС. Таким образом, момент двигателя, создаваемый каждой фазой (рис. 40.23) будет также иметь трапецеидальную форму при постоянстве суммарного момента.

Примечания.

– Полюсная дуга магнита обязательно меньше 180°, она вызывает провалы момента (рис. 40.24).

– Можно управлять такими двигателями и синусоидальными токами, но управление при этом более сложное, а датчики должны быть более точными. Ротор должен иметь конструкцию, обеспечивающую синусоидальное распределение поля (полюсная дуга меньше 180° и явновыраженные полюса). Потери здесь меньше. Это управление используется для мощностей больше 500 Вт.

– Управляемые прямоугольными токами двигатели называются иногда бесконтактными двигателями постоянного тока или двигателями с трапецеидальной ЭДС. Другие двигатели называются бесконтактными переменного тока или двигателями с синусоидальной ЭДС. Принцип действия их одинаков.

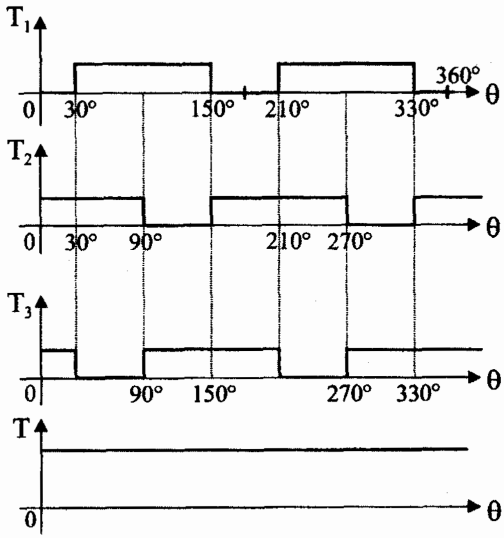


Рис. 40.22. Временна́я диаграмма моментов на фазу и результирующего

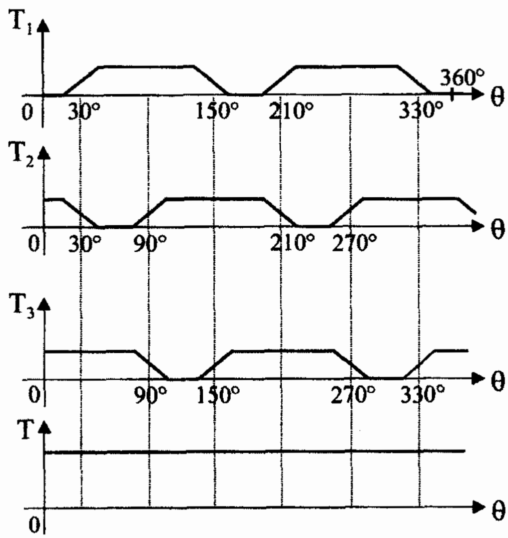


Рис. 40.23. Временна́я диаграмма моментов на фазу и результирующего

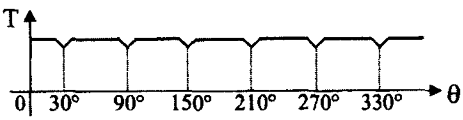


Рис. 40.24. Провалы момента от полюсной дуги

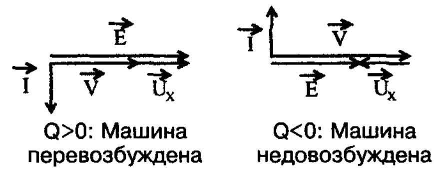


Рис. 40.25. Синхронный компенсатор

40.4.3. Заключение

Таким образом, бесконтактные сочетают достоинства двигателей постоянного и переменного тока: повышенный пусковой момент, прочность, высокая скорость, меньшие потери. Изготовители предлагают такие двигатели с несколькими опциями, например, с интегрированным регулятором скорости, управление скоростью аналоговыми или числовыми регуляторами и т. д.

40.5. Использование синхронных машин

Генераторы. Для выработки электрической энергии.

Двигатели. Самосинхронизирующиеся двигатели с электромагнитным возбуждением используются в установках большой мощности в электрической тяге, в качестве привода морских судов. Двигатели малой мощности используются бесконтактными в робототехнике, моделизме, в приводах компьютерных дисков и т. д.

Синхронные компенсаторы. У них активная мощность равна нулю, и машина используется только для потребления или генерирования реактивной мощности. Тем самым осуществляется управление коэффициентом мощности установки. Это эксплуатируется Электротехническим обществом Франции[3].

[3]и мировой энергетикой. — *Прим. перев.*

ГЛАВА 41

ТРЕХФАЗНЫЕ АСИНХРОННЫЕ ДВИГАТЕЛИ

41.1. Устройство. Принцип действия. Скольжение

41.1.1. Устройство

Двигатель состоит из двух частей, разделенных зазором.

• ***Статор или индуктор.*** Это неподвижная часть в форме корпуса с ферромагнитным шихтованным сердечником. На нем размещена трехфазная обмотка с числом полюсов 2р (р = 1, р = 2, и т. д.), являющаяся аналогом якоря синхронной машины, питаемой трехфазной системой с угловой частотой ω. Распространенное значение р = 2 соответствует рабочей частоте вращения около 1500 об/мин. Обмотки двигателя могут соединяться в звезду или в треугольник.

• ***Ротор или индуктор.*** Это вращающаяся часть. Существуют роторы (называются фазными), содержащие обмотку, подобную статорной, замыкаемую на внешний реостат через контактные кольца и щетки (рис. 41.1). Другая разновидность ротора (коротко замкнутые) содержит клетку, представляющую собой коротко замкнутые с торцов уложенные в пазы стержни. Двигатели с коротко замкнутыми роторами более прочны и более дешевы.

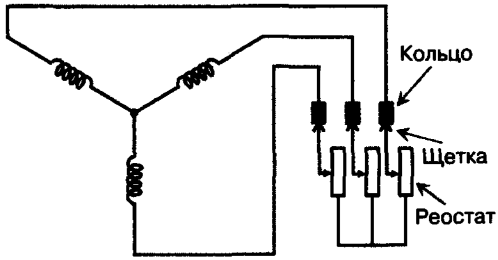


Рис. 41.1. Фазный ротор

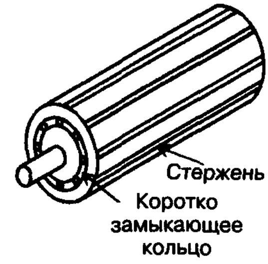


Рис. 41.2. Коротко замкнутый ротор

• ***Условные обозначения и соглашения*** (рис. 41.3).

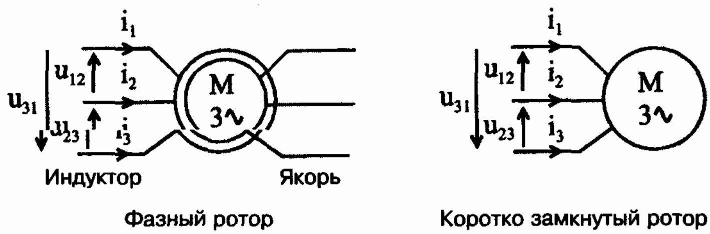


Рис. 41.3. Условные обозначения и соглашения

• ***Заводская табличка*** (рис. 41.4)

– По указанному на заводской табличке значению номинального напряжения, зная напряжение питающей сети, определяют требуемое соединение обмоток.

– При соединении в звезду указанное значение номинального тока соответствует току в линейном проводе.

– На табличке указывается также номинальная полезная мощность, коэффициент мощности, скорость вращения и рабочая частота.

Δ/Y	400/600 V	6,5/3,75 A
3 kW	cosφ 0,81	
1437 tr/min	50 Hz	

Рис. 41.4. Заводская табличка

Пример 41.1.1. При напряжении сети 220/380 В статор соединен в треугольник, тогда как в сети 400/600 В его соединят в звезду.

41.1.2. Принцип действия

Статор создает вращающееся с синхронной скоростью $\Omega_S = \omega/p$ (в рад/с) поле, которое наводит в замкнутых обмотках ротора систему трехфазных токов. В свою очередь роторные токи создают вращающееся со скоростью Ω_S поле (см. гл. 39). Взаимодействие результирующего (статора и ротора) вращающегося поля и трехфазных токов создает электромагнитный момент, который приводит в движение ротор со скоростью $\Omega < \Omega_S$ (закон Ленца). Направление вращения меняют переключением двух фаз.

41.1.3. Скольжение

$$g = \frac{\Omega_S - \Omega}{\Omega_S} = \frac{n_S - n}{n_S}$$

(в номинальном режиме скольжение мало: $g < 5\cdot 10^{-2}$). Здесь: $\Omega_S(n_S)$ — синхронная скорость (частота вращения) в рад/с (об/мин или об/с); $\Omega(n)$ — скорость (частота вращения) ротора; $0 < g \leqslant 1$: при $g = 1$ подключенный к сети двигатель неподвижен, при $g = 0$ подключенный к сети двигатель работает на холостом ходу.

41.2. Баланс мощностей. КПД

• ***Поток мощностей*** (рис. 41.5, табл. 41.1).

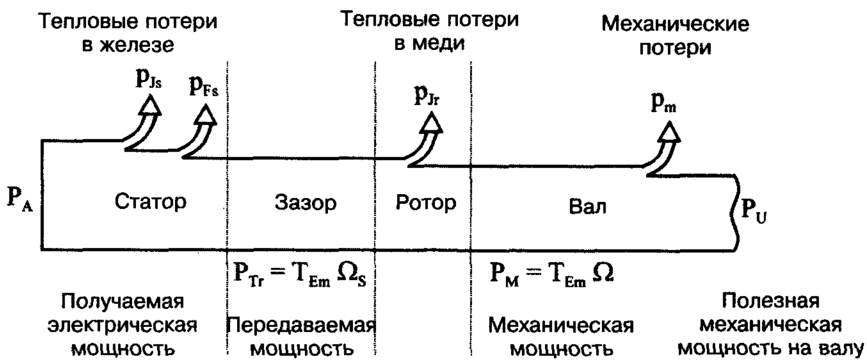


Рис. 41.5. Поток мощностей

Таблица 41.1. Составляющие баланса мощностей

$P_A = \sqrt{3}UI\cos\varphi$	Единицы: Вт = В · А
$p_{Js} = (3/2)RI^2$	Единицы: Вт = Ом · А^2
$p_{Jr} = gP_{Tr}$	Единицы: Вт
$P_M = (1 - g)P_{Tr}$	Единицы: Вт
$P_U = T_U\Omega$	Единицы: Вт = Нм · рад/с

Здесь: U — линейное напряжение; I — линейный ток; R — сопротивление между двумя фазами статора.

Примечания.

– Потерями в железе ротора пренебрегли, так как частота f_R токов ротора обычно мала ($f_R = gf$).

– При постоянных напряжении и частоте потери p_{Fs} и p_m постоянны.

• ***КПД.***

$$\eta = \frac{P_U}{P_A} = \frac{P_A - (p_{Js} + p_{Fs} + p_{Jr} + p_m)}{P_A} = \frac{(P_A - p_{Fs} - p_{Js})(1 - g) - p_m}{P_A}.$$

Примечания.

- Пренебрегая всеми потерями, получим $\eta^* = 1 - g$, значение, являющееся пределом КПД, но меньшим его.
- Работа асинхронного двигателя сравнима с работой коротко замкнутого трехфазного трансформатора с учетом того, что частоты статорных и роторных переменных различны: $f_R = gf$ за исключением неподвижного двигателя, когда $g = 1$ и $f_R = f$.

41.3. Модель и характеристики

• ***Линейная модель, приведенная к статору, для одной фазы*** (рис. 41.6). Здесь: R_1 — сопротивление статора; L_1 и R_F — катушка индуктивности на стальном сердечнике; ℓ_2 — индуктивность рассеяния; R_2/g — фиктивное сопротивление, определяющее передаваемую мощность; R_2 — сопротивление ротора, приведенное к статору.

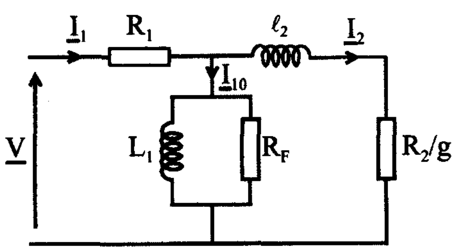


Рис. 41.6. Модель одной фазы, приведенная к статору

Примечания.

- Приведение параметров ротора к статору производится делением на m^2, где m — коэффициент трансформации фазных обмоток при разомкнутом роторе.
- Поскольку $P_{Tr} = P_M + p_{Jr}$, иногда целесообразно сопротивление ротора, приведенное к статору, выделить в явном виде разложением выражения фиктивного сопротивления:

$$\frac{R_2}{g} = R_2 + \frac{(1-g)R_2}{g}.$$

Это позволяет разделить тепловые потери (рассеиваемые в R_2) и механическую мощность (рассеиваемую в $(1-g)R_2/g$).

• ***Определение параметров модели.*** Опыт холостого хода в синхронном режиме позволяет определить R_F и L_1, измеряя:

$$P_0 \approx \frac{3V}{R_F} \text{ с единицами Вт} = \text{В}^2/\text{Ом};$$

$$Q_0 \approx \frac{3V^2}{L_1\omega} \text{ с единицами вар} = \text{В}^2\text{с}/\text{Гн} \cdot \text{рад}.$$

Опыт холостого хода с застопоренным ротором при пониженном напряжении, при котором $I_1 = I_{1N}$ позволяет определить R и l_2, измеряя:

$$P_1 \approx 3R_2I_1^2 \text{ с единицами Вт} = \text{Ом} \cdot \text{А}^2$$

$$\text{и} \quad Q_1 \approx 3l_2\omega I_1^2 \text{ с единицами вар} = \text{В}^2\text{с/Гн} \cdot \text{рад.}$$

R_1 можно измерить в горячем состоянии в опыте на постоянном токе.

Примечание. Если измерить сопротивление R_1 нет возможности, всегда можно измерить сопротивление между двумя фазами. Напомним, что $R = 2R_1$ при соединении обмоток звездой, и $R = 2R_1/3$ при соединении обмоток треугольником.

• ***Электромагнитный момент.*** Из модели на рис. 41.6, пренебрегая падением напряжения на зажимах R_1, получим:

$$T_{Em} = \frac{3pV^2}{\omega}\frac{R_2}{\frac{R_2^2}{g} = g(l_2\omega)^2}.$$

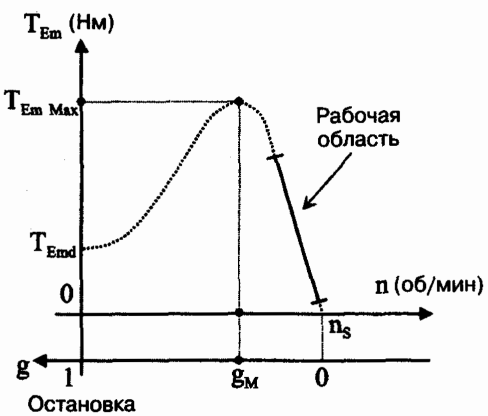


Рис. 41.7. Механическая характеристика асинхронного двигателя

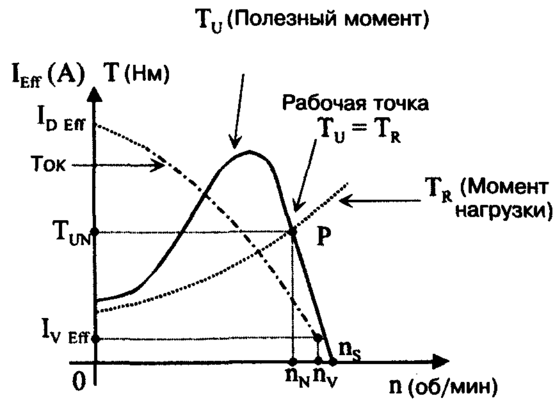
Механическая характеристика, т. е. зависимость T_{Em} от скольжения g или частоты вращения n приведена на рис. 41.7.

– Пусковой электромагнитный момент не равен нулю, двигатель может запускаться без посторонней помощи.
– При заданном скольжении $T_{Em} = RV^2$.
– В рабочей области $T_{Em} \approx kg$ или $T_{Em} \approx -an + b$. Функция почти линейна.
– Максимум не зависит от R_2 и соответствует скольжению $g_M = R_2/(l_2\omega)$.

• ***Характеристики*** $T_U(n)$ ***и*** $I(n)$ (рис. 41.8).

– Большой пусковой ток.
– Током холостого хода пренебрегать не следует.

Рис. 41.8. Зависимости момента и тока от частоты вращения



41.4. Пуск

При пуске ток большой при не очень большом моменте двигателя. Поэтому двигатель при номинальном напряжении пускается с небольшими моментами нагрузки на валу.

- ***Воздействие на статор.*** Ток снижают уменьшением питающего напряжения (переключением со звезды на треугольник при пуске, регулятором, реостатом или пусковой катушкой индуктивности и т. д.). При этом снижается также и пусковой момент, следовательно, данные методы используются в основном для пуска на холостом ходу.

- ***Воздействие на ротор.*** Повышается момент включением реостата в двигателях с фазным ротором, использование двигателей с роторами с двойной клеткой (две концентрические клетки) или с глубокими пазами.

В настоящее время производятся пусковые и регулирующие устройства, непрерывно управляющие частотой и напряжением питания.

41.5. Регулирование скорости

Описанные в § 41.4 методы (изменение напряжения питания, реостат в роторной цепи) остаются применимыми. Очень распространен в наше время метод поддержания $V/f = \text{const}$ при питании двигателя от инвертора. Это позволяет поддерживать значение момента T_U, рабочая часть характеристик перемещается параллельно себе самой, т. е. таким образом регулируется скорость.

41.6. Обратимость. Торможение

Если заставить асинхронную машину вращаться выше синхронной скорости ($g < 0$), она будет работать в режиме генератора, возвращая в сеть активную мощность, но всегда потребляя реактивную.

41.6.1. Торможение

Существует несколько возможностей в зависимости от типа нагрузки на валу. А именно:

- ***Генераторное торможение.*** В соответствии с законом Ленца, если машина вращается со скоростью, большей синхронной, результирующее поле направлено против вращения ротора, и он тормозится. Если частота питания постоянна, то и скорость вращающегося поля постоянна. Поэтому такой тип торможения может замедлить вращение, но не может остановить машину. Питая машину от преобразователя частоты с последовательно снижающейся частотой, получим последовательно замедляющееся поле и, следовательно, замедляющийся ротор.

- ***Торможение противовключением.*** Метод состоит в переключении двух фаз питания. Тогда изменяется направление вращающего поля, и двигатель тормозится.

- ***Динамическое торможение.*** Состоит в подаче в обмотку двигателя постоянного тока, чем создается неподвижное поле в зазоре. Под его воздействием в обмотке ротора наводятся токи, что приводит к торможению двигателя (закон Ленца).

Наложение механического тормоза позволяет полностью затормозить двигатель.

41.7. Асинхронный однофазный двигатель

При пусковом моменте, равном нулю, однофазный асинхронный двигатель не может запуститься самостоятельно. Чтобы преодолеть этот недостаток, используются специальные устройства для создания вращающего поля. К ним относятся конденсатор или дополнительная обмотка, витки Фрагера и т. д. По сравнению с трехфазными двигателями однофазные обладают меньшим КПД и сравнительно меньшим моментом. Они используются в основном там, где нет источника трехфазного питания (бытовые приборы, например), и для привода маломощных машин.

ГЛАВА 42

ШАГОВЫЕ ДВИГАТЕЛИ

42.1. Принцип действия и определения

42.1.1. Принцип действия

В шаговом двигателе вращение ротора происходит последовательными угловыми перемещениями под действием электрических импульсов, подаваемых на статорную обмотку.

42.1.2. Определения

– *Удерживающий момент.* Это момент, способный сместить ротор из положения равновесия в покое при наличии питания.
– *Момент покоя.* Его нужно приложить для смещения ротора из положения равновесия в покое при отсутствии питания.
– *Полезный момент.* Это момент максимальной нагрузки при заданной частоте вращения.
– *Последовательность команд.* Это состав электрических команд управления скоростью и направлением вращения двигателя.
– *Частота вращения.* Она зависит от периода сигналов управления. Шаговый двигатель — это двигатель синхронного типа.
– *Шаг или угловой шаг.* Это угловое перемещение между двумя устойчивыми положениями ротора при одном электрическом импульсе.
– *Разрешение.* Это число шагов на один оборот ротора.

Вопрос. Разрешением двигателя является N = 12. Чему равен его угловой шаг? Каким будет шаг при разрешении N = 400.
Ответ. $\alpha = 360/N$. Если N = 12, то $\alpha = 30°$. Если N = 400, то $\alpha = 0,9°$, т. е. позиционирование ротора много точнее.

• ***Три категории шаговых двигателей:***

– Двигатели с постоянными полюсными магнитами ротора.
– Двигатели с переменной магнитной проницаемостью, в которых ротор изготовлен из ферромагнитного материала.

– Гибридные двигатели, представляющие собой сочетание двух предыдущих.

42.1.3. Двигатели с постоянными магнитами

а) Устройство и принцип действия (рис. 42.1)

Постоянный магнит (ротор) помещен в центр зубчатой системы из двух катушек (статор). Если запитать одну катушку (или фазу) током $i_1 = I$, ротор расположится по оси этой катушки (рис. 42.1, *а*). Если теперь запитать только катушку 2 током $i_2 = I$, ротор повернется и расположится по оси катушки 2 (рис. 42.1, *б*). Это так называемое «монофазное» управление. В этом случае угловой шаг составит $\alpha = 90°$ с разрешением четыре шага на оборот.

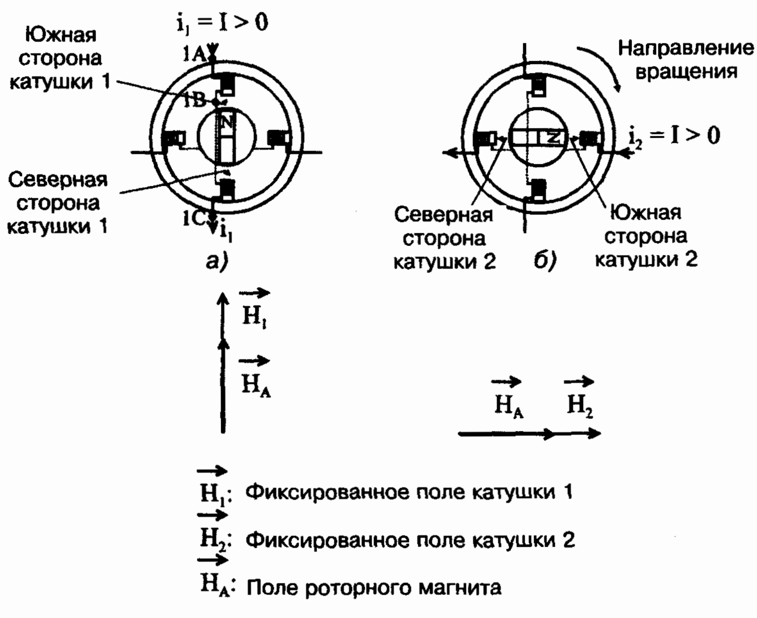


Рис. 42.1. Принцип действия шагового двигателя с монофазным управлением

Примечания.

– Питая одновременно катушки (рис. 42.2), шаг всегда составит $\alpha = 90°$, но возможны промежуточные позиции. Это «бифазное» управление. Получаемый момент будет увеличен (умножен на $\sqrt{2}$).

– Число шагов может быть увеличено, располагая большим числом полюсов.

Вопрос. Рассчитать разрешение и угловой шаг, если ротор имеет 24 полюса.

Ответ. Разрешение составит N = 24 × 2 = 24 × 2 = 48 (здесь 2 — число фаз). Угловой шаг составит $\alpha = 360/48 = 7{,}5°$.

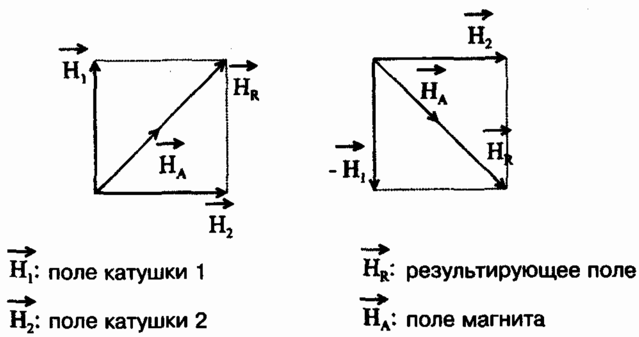


Рис. 42.2. Бифазное управление

б) Режим полу- и микрошага

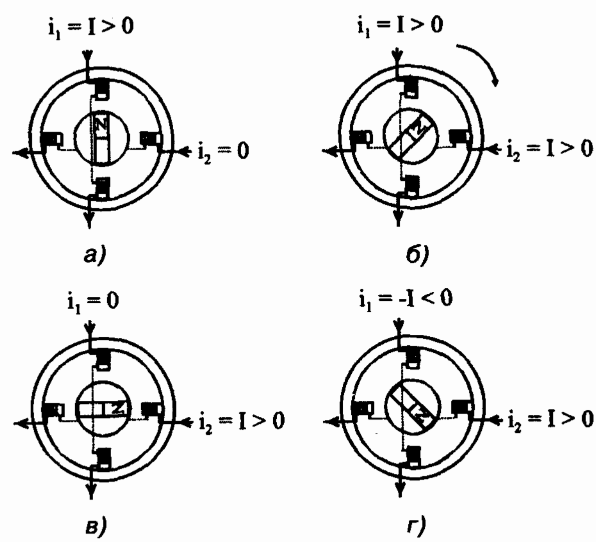


Рис. 42.3. Режим полушага

- При питании катушек одновременно попарно (рис. 42.3), ротор занимает промежуточное положение. Число шагов удваивается ($\alpha = 45°$ и 8 шагов/оборот). Это режим полушага, позволяющий повысить точность позиционирования.
- При питании катушек одновременно соответствующими токами ротор может перемещаться с минимально возможными угловыми шагами. Таким образом можно получить режим микрошага. Разрешение и точность значительно увеличиваются.

42.1.4. Двигатели с переменной магнитной проницаемостью или реактивные (рис. 42.4)

Зубчатый ротор из ферромагнитного материала помещен в центр системы обмоток (статор), различное число зубьев которого позволяет создавать разбаланс. Принцип работы основан на законе наибольшего потока: при питании катушки ротор занимает положение, уменьшающее зазор. Проницаемость воздуха становится тогда минимальной (рис. 42.4, *а*) и соответствующий поток становится максимальным (см. гл. 4).

Пример 42.1.1. На рис. 42.4 имеем шаг $\alpha = 30°$ и разрешение 12 шагов/оборот. Как и при двигателе с постоянным магнитом, можно работать как в режиме полушага, так и в режиме микрошага.

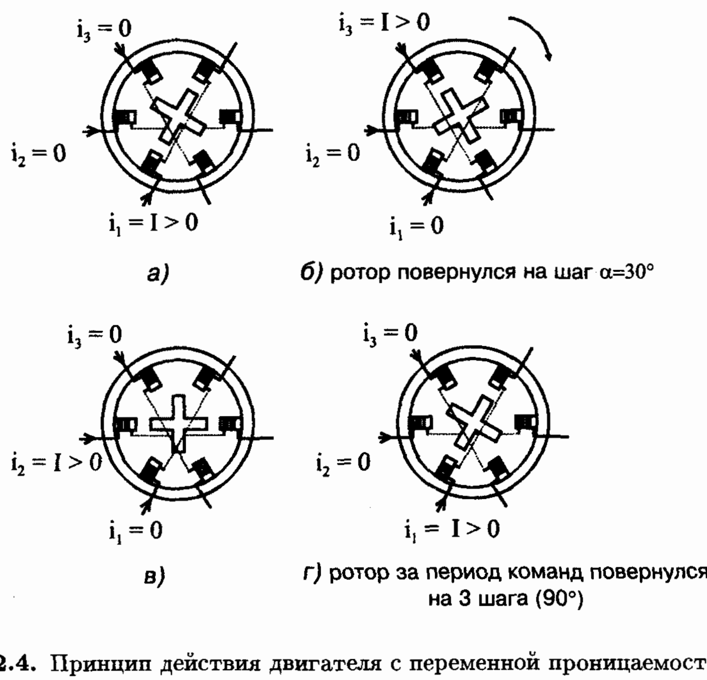


Рис. 42.4. Принцип действия двигателя с переменной проницаемостью

42.1.5. Гибридные двигатели

Это двигатель с переменной проницаемостью, ротор которого является постоянным магнитом. Он работает как реактивный двигатель.

42.2. Свойства

Таблица 42.1. Свойства

	Постоянные магниты	**Переменная проницаемость**	**Гибрид**
Момент покоя	Да	Нет	Да
Удерживающий момент	Большой kI	Средний kI^2	Очень большой kI
Разрешение	Среднее	Большое	Очень большое
Направление вращения	Направление тока и порядка фаз	Порядок фаз	Направление тока и порядка фаз

Примечания.

- Реактивный двигатель не обладает моментом покоя.
- Гибридный двигатель сочетает достоинства двух других.
- У двигателей с магнитом в настоящее время существуют роторы в форме диска, позволяющие получить очень большое разрешение.

42.3. Каскад мощности

Каскад мощности обеспечивает приемлемое питание катушек. В зависимости от способа реализации катушек двигатели получаются двухполюсными (рис. 42.2– 42.4) или однополюсными. В последних каждая катушка делится средней точкой и составляет две фазы (одна фаза на половину обмотки).

- В униполярном двигателе ток каждой фазы всегда имеет одно и то же направление. Достаточен только один транзистор на фазу, и питание называется униполярным (рис. 42.5, *а*). Изменение направления вращения двигателя переключением порядка питания фаз.
- В биполярном двигателе ток в каждой фазе имеет два направления. Инверсия осуществляется структурой из четырех транзисторов на каждую фазу, называемой H-мостом, и питание называется биполярным (рис. 42.5, *б*). Направление вращения изменяется переключением порядка питания фаз или изменением направления тока.

Примечания.

- Развиваемый униполярным двигателем момент слабее, чем в биполярном двигателе, так как одновременно можно питать только половину фаз.

– Момент реактивного двигателя пропорционален квадрату тока, он безразличен к направлению тока, и ему достаточно униполярного управления.
– На рис. 42.5, *б* показано питание одной фазы. Для другой фазы нужен такой же транзисторный мост.

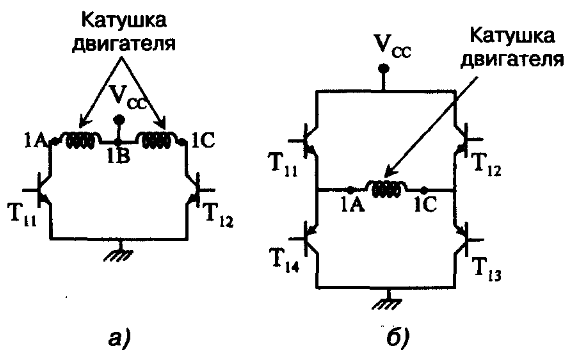


Рис. 42.5. Униполярное (для 2-х фаз) и биполярное (для 1-й фазы) питание

42.4. Статический и динамический режимы

42.4.1. Статический режим

Изменение момента двухфазного двигателя, ротор которого является постоянным магнитом, приведено на рис. 42.6. Положение ротора зафиксировано значением угла θ при питании только фазы 1. Выражением момента, развиваемого ротором, будет $\vec{T}_M = \vec{M} \wedge \vec{B}$, где $\vec{M}$ — магнитный момент магнита, а $\vec{B}$ — магнитное поле, создаваемое фазой 1, пропорциональное току $i = I$ ($B = kI$). Имеем:

$$T_M = MkI \sin(\pi/2 - \theta) = T_{Max} \sin(\pi/2 - \theta) \text{ с измерением в Нм.}$$

Если питать фазу 1 при $T_R = 0$, ротор находится в положении $\theta = \pi/2$ и $T_M = T_R = 0$. Если приложить постоянное значение момента статического сопротивления T_R, ротор займет устойчивое положение равновесия

$$\theta_1 < \pi/2, \quad \text{где} \quad T_M = T_{M1} = |T_R|.$$

Примечания.

– Максимальное значение момента T_{Max} соответствует удерживающему моменту.
– Только выделенная сплошной линией часть характеристики соответствует устойчивому режиму.

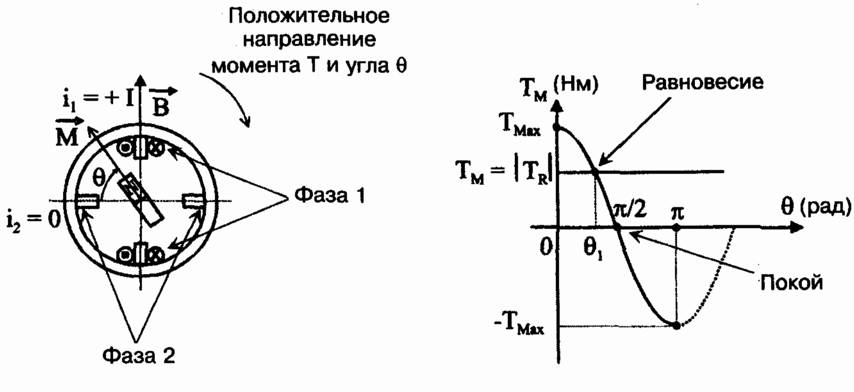
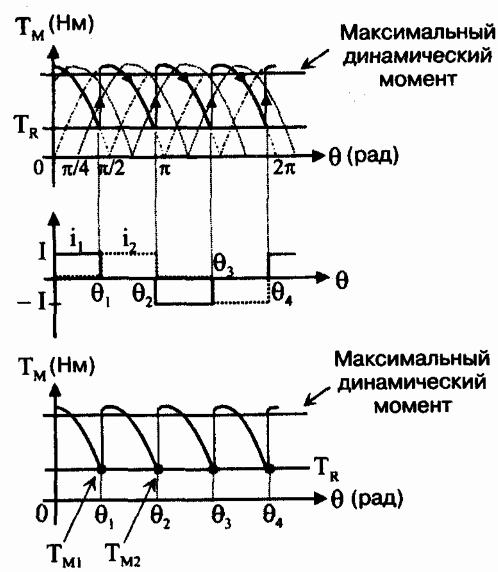


Рис. 42.6. Распределение момента (питается только фаза 1)

42.4.2. Динамический режим

При питании следующей фазы (фазы 2) момент двигателя становится больше T_R, ротор смещается до θ_2, где $T_{M2} = T_R$. Запитав фазу 1 отрицательным током, сместимся в точку $\theta = \theta_3$ и т. д. Двигатель перемещается последовательными ступенями с разрешением 4 (рис. 42.7).

Рис. 42.7. Последовательность команд и колебание момента



• ***Максимальный динамический момент.*** Он соответствует пересечению фазных моментно-угловых характеристик. Момент статического сопротивления T_R должен быть меньше этого момента, иначе двигатель не сможет работать.

Примечания.

- Ротор достигает своего устойчивого положения при колебательном затухающем движении. Это может оказаться нежелательным из-за возможного резонанса, поэтому иногда следует предусматривать демпфирующие устройства
- С увеличением частоты коммутации можно достичь такого сопряжения шагов, что получится почти непрерывная скорость.

• ***Механическая характеристика момент-скорость*** (рис. 42.8). Она дается конструктором для одного типа команд и приводимой в движение нагрузке.

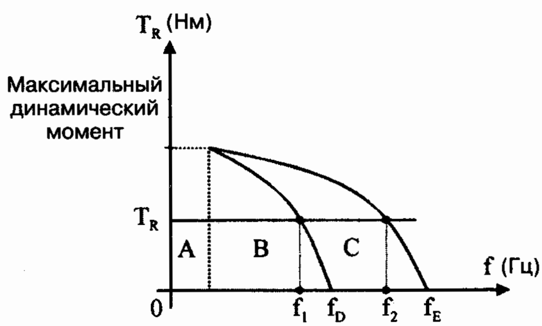


Рис. 42.8. Механическая характеристика

Она содержит три области:

- А — работа мало рекомендуема. На очень низкой частоте наблюдаются вращения рывками.
- В — область старт-стопного режима.
- С — область высоких скоростей.

Частота f_D — наибольшая частота на холостом ходу в старт-стопном режиме, а f_E — наибольшая частота задания движения (частота приемистости). Чтобы осуществить пуск или останов двигателя без потери синхронизма, следует плавно изменить частоту для перехода из области В в область С и наоборот.

42.5. Использование

Это двигатели небольшой мощности, используемые в принтерах, считывающих устройствах дисков, дозаторах и т. п.

ГЛАВА 43

МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

43.1. Основы

43.1.1. Принцип действия. Обратимость. Устройство

• ***Принцип действия и обратимость.*** Поместив замкнутый проводник в магнитное поле, в нем при его перемещении в поле возникнет электрический ток (эффект генератора). И наоборот, тот же проводник с током, помещенный в магнитное поле, будет испытывать действие электромагнитной силы (эффект двигателя). Эти два явления имеют место в машине постоянного тока, являющейся обратимой. Она состоит из двух основных частей, разделенных зазором:

- создающий магнитное поле индуктор (возбуждение);
- якорь, назначением которого является получение электрического тока (генератор) или питание своих проводников электрическим током с целью получения электромагнитных сил (двигатель).

• ***Устройство.*** Рассмотрим простой вариант двухполюсной машины (рис. 43.1).

- Индуктор (на *статоре*) является неподвижной частью. Иногда — это постоянные магниты в машинах малой мощности. Но обычно — это электромагнит из двух последовательно соединенных катушек, питаемых постоянным током и создающих два полюса: северный и южный (рис. 43.2). Магнитное поле в зазоре максимально по оси полюсов. Оно равно нулю в направлении, перпендикулярном этой оси, называемой *нейтралью.*
- Якорь (*ротор*) является вращающейся частью. Это ферромагнитный шихтованный цилиндр с пазами, в которые уложена обмотка, замкнутая на саму себя. На вал посажен *коллектор* из токопроводящих ламелей, изолированных между собой. Ток передается в проводники якоря в двигателе или во внешние цепи в генераторе благодаря двум угольным щеткам, скользящим по коллектору.

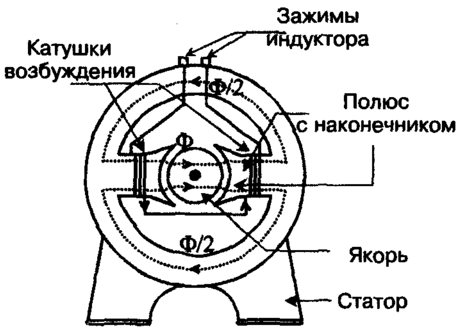


Рис. 43.1. Двухполюсная машина

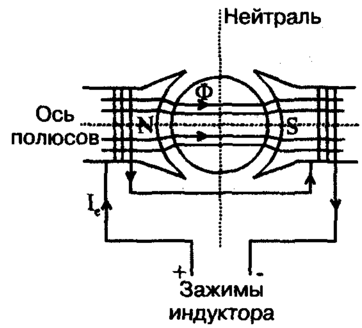


Рис. 43.2. Индуктор

• ***Роль коллектора.*** Он изменяет направление тока (коммутация) в проводниках при пересечении нейтрали, обеспечивая, таким образом, действие сил в одном направлении (рис. 43.3). Коллектор является вращающимся инвертором тока (в случае двигателя).

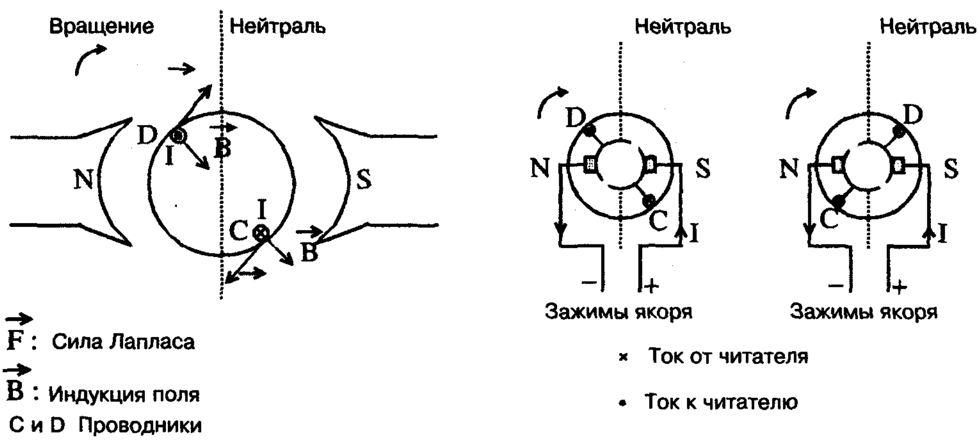


Рис. 43.3. Роль коллектора

Примечания.

– Коллектор и щетки являются уязвимым узлом машины постоянного тока.

– Двухполюсная машина содержит две параллельные ветви обмотки, одна из которых представляет собой состав проводников между щетками. Через каждую ветвь проходит половина якорного тока.

• ***Условное обозначение и принятые соглашения*** (рис. 43.4). Заводская табличка содержит номинальные значения якорных и индукторных величин, способ возбуждения, номинальную скорость и полезную механическую мощность на валу.

43.1.2. ЭДС. Модель. Момент. Скорость

а) Установившийся режим

• ***Выражение ЭДС.*** При вращении якоря проводники его обмотки пересекают магнитный поток индуктора, в них наводится переменная ЭДС. Коллектор выпрямляет эту ЭДС. При этом важным является число пазов, ЭДС E между щетками почти постоянна.

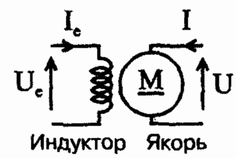


Рис. 43.4. Условное обозначение

$$E = Nn\Phi \quad \text{или} \quad E = K\Phi\Omega, \quad \text{где} \quad K = N/2\pi.$$

Здесь E — ЭДС (В); N — число активных проводников якоря; Φ — поток под полюсом индуктора (Вб); n — частота вращения (об/с); Ω — угловая скорость (рад/с).

Примечания.

- Коллектор является вращающимся выпрямителем напряжения.
- Если поток постоянен (распространенный случай), $E = k\Omega$, т. е. прямо пропорциональна скорости.
- Якорный ток создает магнитное поле, которое искажает ЭДС. Это *магнитная реакция якоря*, которая преодолевается расположением на роторе дополнительных обмоток. В последующем этим явлением будем пренебрегать.

• ***Модель якоря*** (рис. 43.5). $U = E + RI$. E — ЭДС (В); U — напряжение якоря (В); I — ток якоря (А); R — сопротивление якоря (Ом), учитывающее сопротивление перехода коллектор/щетки.

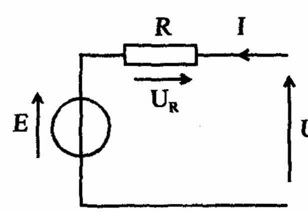


Рис. 43.5. Модель якоря

• ***Электромагнитный момент.*** Электромагнитная мощность преобразуется в механическую. $P_{Em} = EI = T_{Em}\Omega$, где $E = K\Phi\Omega$, откуда

$$T_{Em} = K\Phi I.$$

Здесь T_{Em} — электромагнитный момент (Нм); Φ — поток под полюсом индуктора (Вб); I — ток якоря (А).

• ***Многополюсная машина.*** Машина с p парами полюсов имеет p пар щеток. В зависимости от выполнения *обмотки якоря* машина может иметь более двух ветвей обмотки. Тогда выражениями ЭДС и момента становятся:

$$E = \frac{p}{a}K\Phi\Omega \quad \text{и} \quad T_{Em} = \frac{p}{a}K\Phi I, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant 2a \leqslant 2p.$$

Здесь 2a — число пар параллельных ветвей обмотки (a — целое положительное число).

• ***Выражение скорости.*** Из закона Ома и выражения ЭДС получим:

$$\Omega = \frac{U - RI}{K\Phi},$$

где Ω — скорость вращения якоря (рад/с); U — напряжение якоря (В); I — ток якоря (А); R — сопротивление якоря (Ом); Φ — Поток под полюсом индуктора (Вб).

• ***Характеристика холостого хода*** (рис. 43.6). Она приводится для генератора при независимом возбуждении, каким бы ни был последующий способ возбуждения машины. Это кривая намагничивания магнитной цепи. Рабочая точка P располагается на колене кривой намагничивания.

Примечание. Из-за гистерезиса кривая не проходит через начало координат. Существует остаточная ЭДС E_R (как и узкий цикл не представленного здесь гистерезиса).

б) Переходный режим

• ***Электрическое и механическое уравнения динамической модели*** (рис. 43.7).

$$\begin{cases} u(t) = e(t) + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}, \\ e(t) = k\Omega(t), \\ T_{Em}(t) = ki(t), \\ J\frac{d\Omega(t)}{dt} = f\Omega(t) = T_{Em}(t) - T_R(t). \end{cases}$$

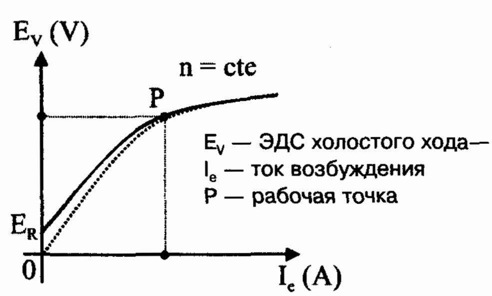


Рис. 43.6. Характеристика холостого хода

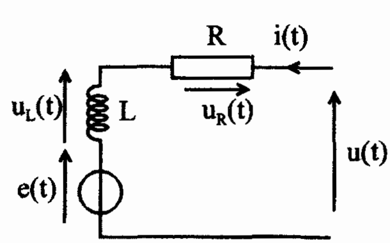


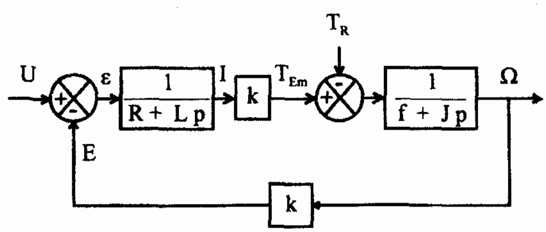
Рис. 43.7. Эквивалентная схема якоря

• ***Блок-схема динамической модели якоря.*** Нагрузка и напряжение питания влияют на скорость, двигатель является системой автоматического регулирования (рис. 43.8). Используя преобразование Лапласа, получим:

$$\begin{cases} \mathrm{U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)}, \\ \mathrm{pJ\Omega(p) + f\Omega(p) = T_{Em}(p) - T_R(p)}. \end{cases}$$

Здесь: J — момент инерции; f — жидкостное трение; f(Ω) — момент трения.

Рис. 43.8. Блок-схема двигателя



43.2. Двигатель независимого возбуждения

43.2.1. Схема. Пуск. Регулирование скорости

• ***Схема.*** Этот способ возбуждения требует наличия двух независимых источников питания (рис. 43.4). Изменение направления вращения осуществляется переключением зажимов либо якоря, либо индуктора.

• ***Условия пуска.***

– Индуктор запитывается прежде якоря. Ток возбуждения I_e регулируется до номинального.
– Пусковой ток якоря I_D следует ограничить (обычно $I_D < 2I_N$), осуществляя пуск при пониженном напряжении, используя регулятор или управляемый выпрямитель.
– Можно пускать двигатель под нагрузкой, если $I_D > T_{RD}/(K\Phi)$, где T_{RD} — момент сопротивления, противодействующий пуску. Следовательно, при пуске двигатель обладает значительным пусковым моментом.

• ***Регулирование скорости.*** Регулировать скорость можно, воздействуя либо на поток Φ (т. е. возбуждением), либо на напряжение питания якоря U:

– Воздействие на возбуждение осуществляется реостатом в цепи обмотки возбуждения или регулируемым напряжением U_e питания обмотки возбуждения. Это невозможно при создании поля возбуждения постоянными магнитами.
– Воздействие на напряжение питания якоря решает проблему пуска двигателя.

Гибкость этих двух способов регулирования обеспечивает двигателю высокую точность.

• ***Риск разноса двигателя.*** Если исчезает поток возбуждения при наличии питания якоря, двигатель развивает чрезвычайно высокую скорость (идет в разнос). Следовательно:

– Никогда нельзя прерывать питание обмотки возбуждения.
– При остановке двигателя нужно отключать якорь прежде возбуждения.

43.2.2. Баланс мощностей. КПД

• ***Поток мощностей*** (рис. 43.9, табл. 43.1). Здесь: U — напряжение якоря (В); U_e — напряжение возбуждения (В); I — ток якоря (А); I_e — ток возбуждения (А); R — сопротивление якоря и r — сопротивление индуктора (Ом); T_U — полезный момент на валу (Нм); Ω — скорость вращения (рад/с).

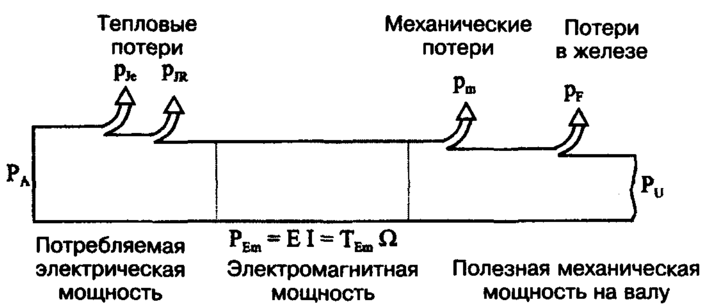


Рис. 43.9. Поток мощностей

Таблица 43.1.

$P_A = UI + U_eI_e$	$p_{Je} = rI_e^2 = \frac{U_e^2}{r} = U_eI_e$	$p_{JR} = RI^2$	$P_U = T_U\Omega$
Вт = В · А	Вт = Ом · А^2	Вт = Ом · А^2	Вт = Нм · рад/с

Примечания.

– При постоянной скорости механические потери и потери в железе постоянны.

– Потери, сгруппированные под названием «коллективных»

$$p_C = p_F + p_m,$$

в первом приближении пропорциональны скорости.

- ***КПД.***

$$\eta = \frac{P_U}{P_A} = \frac{P_A - (p_{Je} + p_{JR} + p_C)}{P_A}.$$

- ***Определение потерь и КПД:*** метод раздельных потерь.

– Сопротивления статора и индуктора могут измеряться в горячем состоянии методом амперметра и вольтметра.
– Под нагрузкой измеряются P_A, p_{JR}, p_{Je}.
– На холостом ходу при одинаковых условиях возбуждения и скорости измеряется $P_{A0} = RI_0^2 + p_C \approx p_C$.

43.2.3. Характеристики (табл. 43.2)

43.2.4. Торможение

Торможение двигателя использует принцип обратимости (рис 43.10). Якорь замыкается на реостат. Вращаясь по инерции, машина работает генератором и рассеивает энергию в реостате. Эту энергию можно также рекуперировать в сеть с помощью электронных устройств (см. гл. 32). Это рекуперативное торможение.

43.3. Двигатель последовательного возбуждения

43.3.1. Схема. Пуск. Регулирование скорости

- ***Схема*** (рис. 43.11). Индуктор соединяется последовательно с якорем. Достаточно иметь единственный источник питания. Изменение направления вращения осуществляется переключением либо зажимов якоря, либо зажимов индуктора.

- ***Закон Ома:*** $U = E + R_T I$, где $R_T = R + r$ (r — сопротивление индуктора).

- ***ЭДС и момент.*** Возможны два случая (рис. 43.12):

– Машина насыщена (область b), поток почти постоянный, что соответствует случаю машины с постоянным возбуждением.

– Машина не насыщена (область a), поток пропорционален току. ЭДС и момент определяются как:

$$E = kI\Omega; \qquad T_{Em} = kI^2.$$

Здесь: E — ЭДС (В); Ω — скорость вращения якоря (рад/с); I — ток якоря (А); T_{Em} — электромагнитный момент (Нм); k — постоянная двигателя.

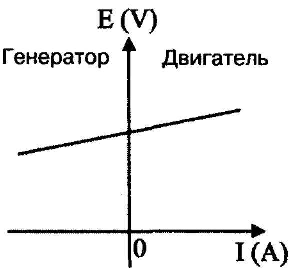


Рис. 43.10. Обратимость

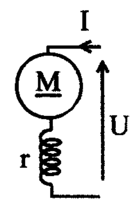


Рис. 43.11. Двигатель последовательного возбуждения

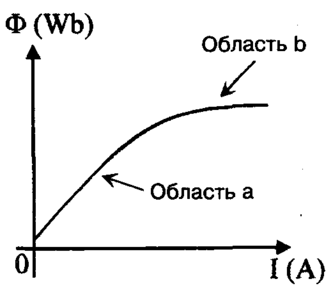


Рис. 43.12. Характеристика холостого хода

- ***Условия пуска.***
  – Пусковой ток должен быть ограничен, как и в двигателе независимого возбуждения.
  – Пуск на холостом ходу при номинальном напряжении питания недопустим, двигатель может пойти в разнос, разрушив якорь.

- ***Регулирование скорости.*** Осуществляется изменением напряжения питания, как и в двигателе независимого возбуждения.

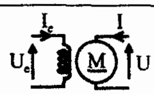
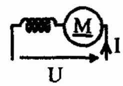
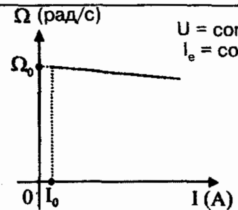
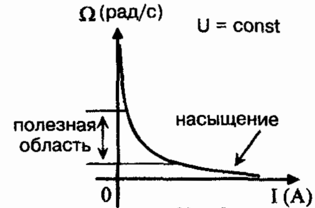
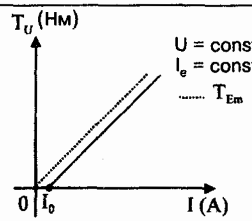
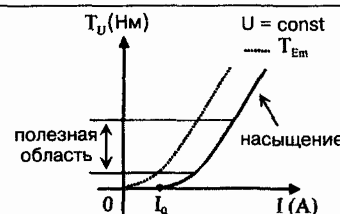
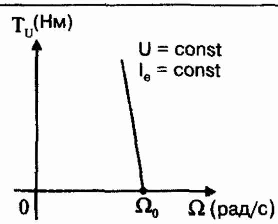
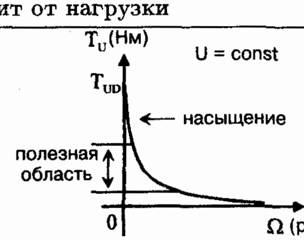
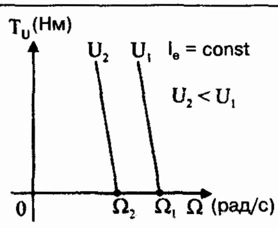
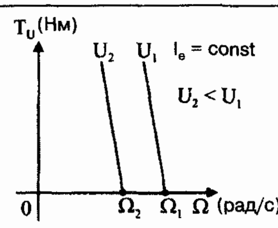
В заключение следует отметить, что этот двигатель обладает большим пусковым моментом, бо́льшим, чем в двигателе независимого возбуждения. На холостом ходу двигатель может пойти в разнос. Он используется в установках повышенного момента сопротивления — в электрической тяге, в стартерах автомобилей и т. д.

43.3.2. Баланс мощностей. КПД.

Как и в двигателе независимого возбуждения.

43.3.3. Характеристики двигателя последовательного возбуждения (табл. 43.2)

Таблица 43.2. Характеристики двигателей постоянного тока

Характеристики	Двигатель независимого возбуждения 	Двигатель последовательного возбуждения 
Скоростные характеристики $\Omega = f(I)$	 $\Omega \approx \frac{U}{K\Phi} - \left(\frac{R}{K\Phi}\right) I$ Скорость меняется мало при нагрузке	 $\Omega = \frac{U}{k\,I} - \frac{R_T}{k}$ На холостом ходу двигатель может пойти в разнос
Характеристики $T_U(I)$	 $T_U = (K\,\Phi)\,I - T_P$	 $T_U = k\,I^2 - T_P$ Максимальный пусковой момент
	Ток якоря зависит от нагрузки	
Механические характеристики $T_U(\Omega)$	 $T_U = \left(\frac{K\,\Phi\,U}{R} - T_P\right) - \frac{(K\,\Phi)^2}{R}\,\Omega$	 $T_U = \frac{k\,U^2}{(k\,\Omega + R_T)^2} - T_P$ Максимальный пусковой момент
Механические характеристики $T_U(\Omega)$ при переменном напряжении якоря		
	Регулировка скорости	

43.3.4. Торможение

Торможение осуществляется с использованием обратимости машины (см. § 43.2.4)

43.3.5. Универсальный двигатель

Имея момент, пропорциональный квадрату тока, двигатель может питаться синусоидальным током — универсальный двигатель. Статор такого двигателя выполняется шихтованным для ограничения потерь в железе. Двигатель распространен в фенах, миксерах, бытовых вентиляторах и т. п.

Предметный указатель

Заявки на книги присылайте по адресу:
125319 Москва, а/я 91
Издательство «Техносфера»
e-mail: knigi@technosphera.ru
sales@technosphera.ru
факс: (495) 956 33 46

В заявке обязательно указывайте
свой почтовый адрес!

Подробная информация о книгах на сайте
http://www.technosphera.ru

Ги Шатенье, Мишель Боэ, Даниель Буи, Жак Вайан, Даниэль Веркиндер

Учебник по общей электротехнике

Компьютерная верстка – С.А. Кулешов
Корректор – А.М. Кириленко
Дизайн книжных серий – С.Ю. Биричев
Дизайн – И.А. Куколева
Выпускающий редактор – О.Н. Кулешова
Ответственный за выпуск – В.М. Макарцев

Формат 70x100/16. Печать офсетная.
Гарнитура LaTeX.
Печ.л. 39. Тираж 2500 экз. Зак. №3927.
Бумага офсет №1, плотность 65 г/м^2.

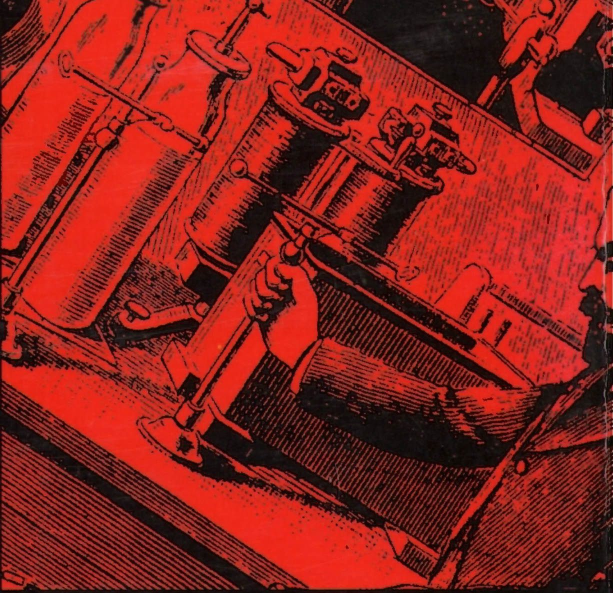
Издательство «Техносфера»
125319, Москва, ул. Краснопролетарская, д.16, стр.2

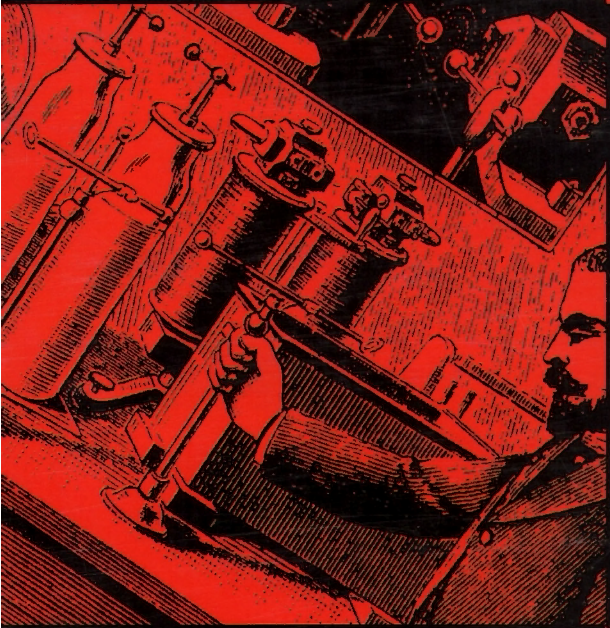
Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО ПФ «Полиграф-Книга».
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, дом 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75

мир
физики
и техники

Г. ШАТЕНЬЕ, М. БОЭ, Д. БУИ,
Ж. ВАЙАН, Д. ВЕРКИНДЕР

Учебник по общей
электротехнике





ГИ ШАТЕНЬЕ, ДАНИЕЛЬ БУИ – ПРОФЕССОРА ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ, МИШЕЛЬ БОЭ, ЖАК ВАЙАН, ДАНИЭЛЬ ВЕРКИНДЕР – ПРОФЕССОРА ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ УНИВЕРСИТЕТА PIERRE MENDES FRANCE, ВАЛЕНСИЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И СИГНАЛЫ,
ЭЛЕКТРОННЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ,
ЭЛЕКТРОНИКА СИГНАЛОВ,
СИЛОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА,
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

ТЕХНОСФЕРА

ISBN 978-5-94836-210-6
9 785948 362106