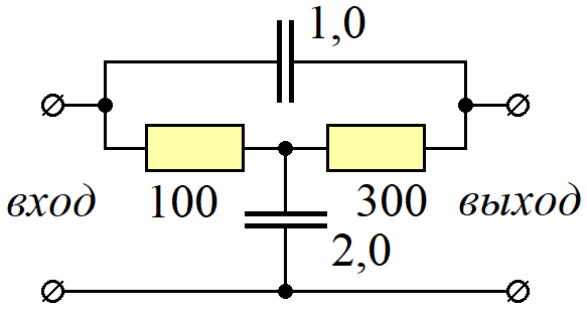
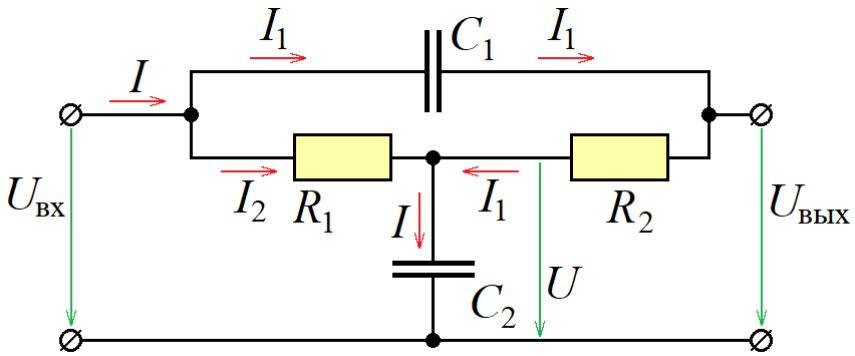
Полученное задание:



Введём обозначения:



$R_1 = 100\,Ом$

$R_2 = 300\,Ом$

$C_1 = 1\,мкФ$

$C_2 = 2\,мкФ.$

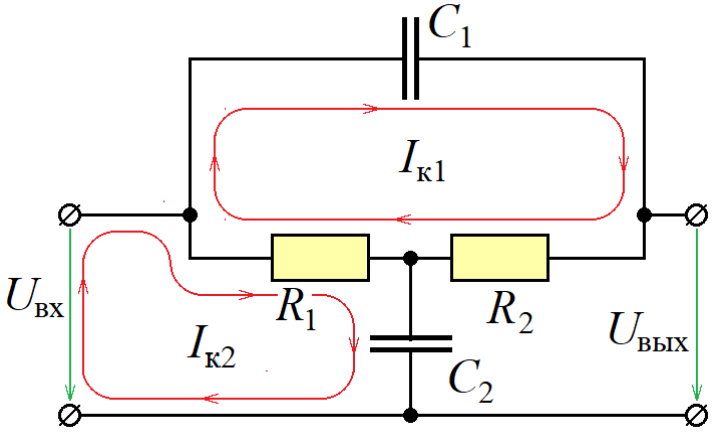
Вычисление частотной характеристики:

(Вариант Метод контурных токов:)

Введём контурные токи и запишем для них уравнения:

$$I_{к1}\frac{1}{j\omega C_1} + I_{к1}R_2 + \\ +\left(I_{к1} - I_{к2}\right)R_1 = 0$$

$$\left(I_{к2} - I_{к1}\right)R_1 + I_{к2}\frac{1}{j\omega C_2} = U_{вх}$$



Таким образом, имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} I_{к1} + I_{к1}\,j\omega R_2 C_1 + \left(I_{к1} - I_{к2}\right)j\omega R_1 C_1 = 0 \\ \left(I_{к2} - I_{к1}\right)j\omega R_1 C_2 + I_{к2} = U_{вх}\,j\omega C_2 \end{cases}$$

с двумя неизвестными $I_{к1}$ и $I_{к2}$.

Приведём подобные:

$$\begin{cases} I_{к1}\left(1 + j\omega R_2 C_1 + j\omega R_1 C_1\right) = I_{к2}\,j\omega R_1 C_1 \\ I_{к2}\left(j\omega R_1 C_2 + 1\right) = U_{вх}\,j\omega C_2 + I_{к1}\,j\omega R_1 C_2 \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $I_{к2}$:

$$I_{к2} = I_{к1}\frac{1+ j\omega R_2C_1 + j\omega R_1C_1}{j\omega R_1C_1}$$

и подставим во второе:

$$I_{к1}\frac{1+ j\omega R_2C_1 + j\omega R_1C_1}{j\omega R_1C_1}\left(j\omega R_1C_2 +1\right) = U_{вх} j\omega C_2 + I_{к1} j\omega R_1C_2$$

Выразим $I_{к1}$:

$$I_{к1}\left(\frac{\left(1+ j\omega R_2C_1 + j\omega R_1C_1\right)\left(j\omega R_1C_2 +1\right)}{j\omega R_1C_1} - j\omega R_1C_2\right) = U_{вх} j\omega C_2$$

$$I_{к1}\left(\frac{1+ j\omega R_2C_1 + j\omega R_1C_1 + j\omega R_1C_2 + j\omega R_2C_1 j\omega R_1C_2 + j\omega R_1C_1 j\omega R_1C_2}{j\omega R_1C_1} - j\omega R_1C_2\right) =$$

$$= U_{вх} j\omega C_2$$

$$I_{к1}\left(\frac{1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1C_1C_2\left(R_2 + R_1\right)}{j\omega R_1C_1} - j\omega R_1C_2\right) = U_{вх} j\omega C_2$$

$$I_{к1}\frac{1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1C_1C_2\left(R_2 + R_1\right) + \omega^2 R_1C_1C_2R_1}{j\omega R_1C_1} = U_{вх} j\omega C_2$$

$$I_{к1}\left(1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1R_2C_1C_2\right) = -U_{вх}\omega^2 R_1C_1C_2$$

$$I_{к1} = -U_{вх}\frac{\omega^2 R_1C_1C_2}{1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1R_2C_1C_2}$$

Теперь учитывая, что $U_{вых} = U_{вх} - I_{к1}\frac{1}{j\omega C_1}$, получим:

$$U_{вых} = U_{вх} + U_{вх}\frac{\omega^2 R_1C_1C_2}{1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1R_2C_1C_2}\frac{1}{j\omega C_1} =$$

$$= U_{вх}\left(1 - \frac{j\omega R_1C_2}{1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1R_2C_1C_2}\right) =$$

$$= U_{вх}\frac{1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1R_2C_1C_2 - j\omega R_1C_2}{1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1R_2C_1C_2}$$

и частотная характеристика исследуемой цепи принимает вид:

$$H\left(\omega\right) = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1R_2C_1C_2 - j\omega R_1C_2}{1+ j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right) - \omega^2 R_1R_2C_1C_2} =$$

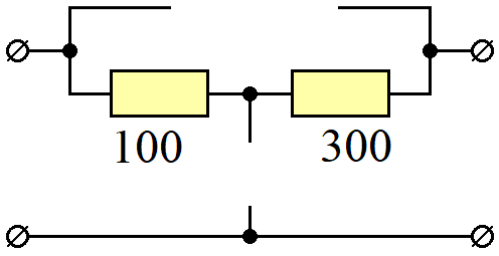
$$= \frac{1 - \omega^2 R_1R_2C_1C_2 + j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1\right)}{1 - \omega^2 R_1R_2C_1C_2 + j\omega\left(R_2C_1 + R_1C_1 + R_1C_2\right)}$$

.

Проверка полученного результата.

(приводится для информации, для отчёта не обязательна!)

Из общего вида предложенной цепи видно, что при $\omega = 0$ она приобретает вид:



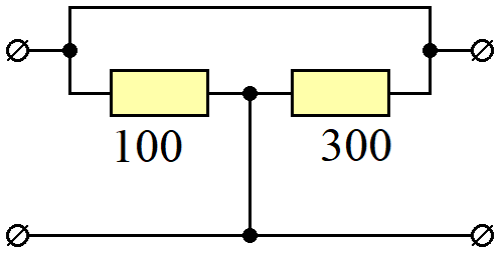
и её коэффициент передачи должен равняться 1.

Действительно,

$$H(\omega)\big|_{\omega=0} = \frac{1-0\times R_1R_2C_1C_2+0\times\left(R_2C_1+R_1C_1\right)}{1-0\times R_1R_2C_1C_2+0\times\left(R_2C_1+R_1C_1+R_1C_2\right)} =$$

$$= \frac{1-0+0}{1-0+0} = \frac{1}{1} = 1.$$

С другой стороны, при $\omega \to \infty$ цепь приобретает вид:



и её коэффициент передачи тоже должен стремиться к 1.

Действительно,

$$\lim_{\omega\to\infty} H(\omega) =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \frac{1-\omega^2R_1R_2C_1C_2+j\omega\left(R_2C_1+R_1C_1\right)}{1-\omega^2R_1R_2C_1C_2+j\omega\left(R_2C_1+R_1C_1+R_1C_2\right)} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{-\omega^2R_1R_2C_1C_2}{-\omega^2R_1R_2C_1C_2} = \frac{R_1R_2C_1C_2}{R_1R_2C_1C_2} = 1.$$

Используя вычисленную частотную характеристику $H(\omega)$, найдём и построим АЧХ исследуемой цепи:

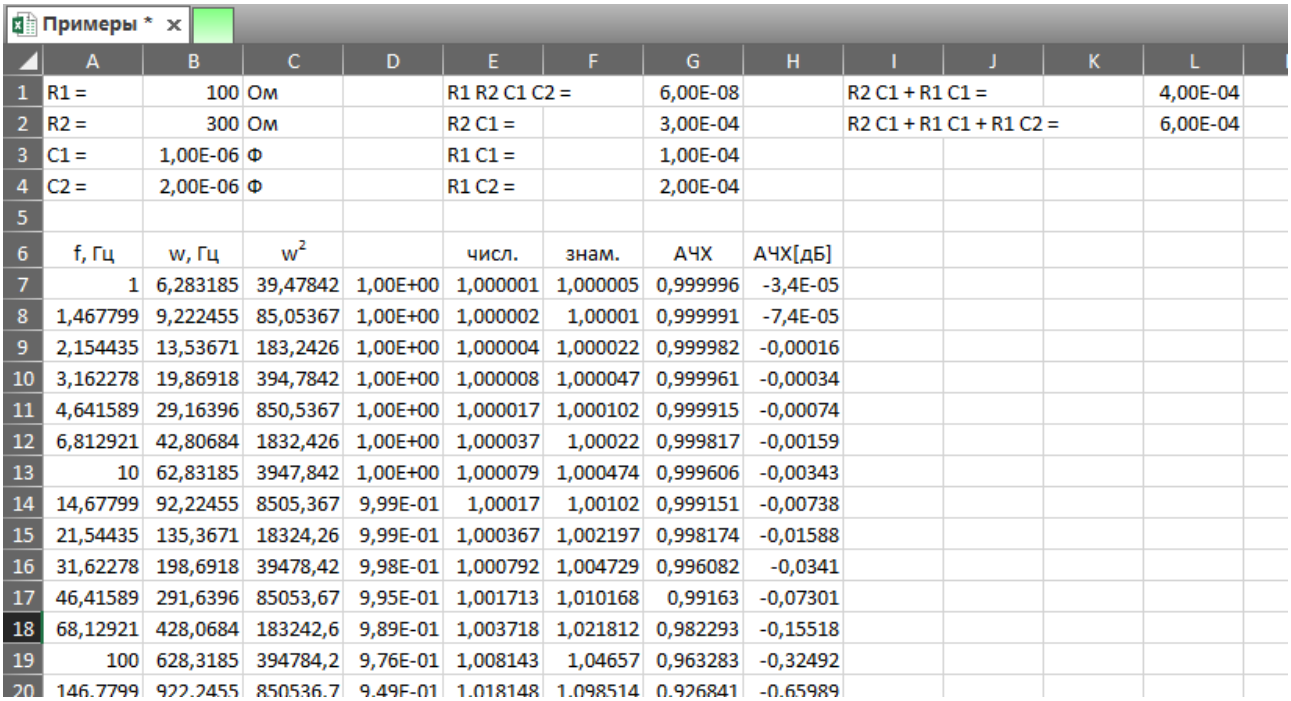
$$\text{АЧХ} = \left|H(\omega)\right| = \left|\frac{1-\omega^2R_1R_2C_1C_2+j\omega\left(R_2C_1+R_1C_1\right)}{1-\omega^2R_1R_2C_1C_2+j\omega\left(R_2C_1+R_1C_1+R_1C_2\right)}\right| =$$

$$= \frac{\left|1-\omega^2R_1R_2C_1C_2+j\omega\left(R_2C_1+R_1C_1\right)\right|}{\left|1-\omega^2R_1R_2C_1C_2+j\omega\left(R_2C_1+R_1C_1+R_1C_2\right)\right|} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(1-\omega^2R_1R_2C_1C_2\right)^2+\omega^2\left(R_2C_1+R_1C_1\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\omega^2R_1R_2C_1C_2\right)^2+\omega^2\left(R_2C_1+R_1C_1+R_1C_2\right)^2}}.$$

График АЧХ был построен в Excel. Фрагмент таблицы для графика:

(приводится для информации, для отчёта не обязателен!)



Примеры *

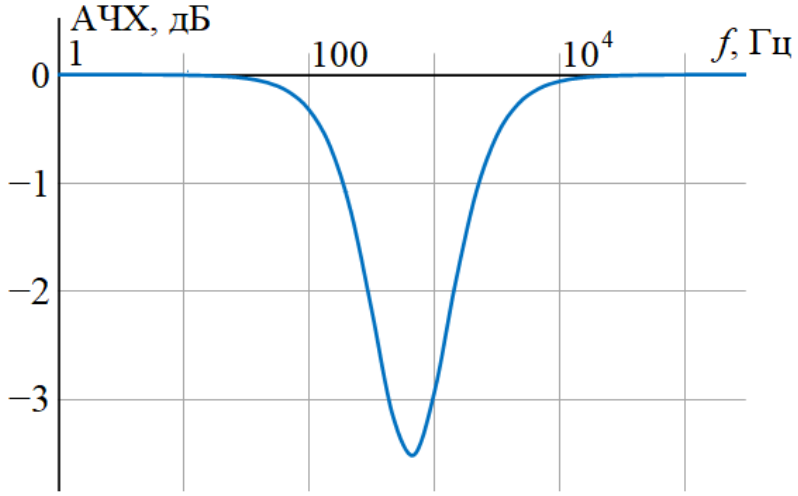
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	R1 =	100	Ом		R1 R2 C1 C2 =		6,00E-08		R2 C1 + R1 C1 =			4,00E-04
2	R2 =	300	Ом		R2 C1 =		3,00E-04		R2 C1 + R1 C1 + R1 C2 =			6,00E-04
3	C1 =	1,00E-06	Ф		R1 C1 =		1,00E-04					
4	C2 =	2,00E-06	Ф		R1 C2 =		2,00E-04					
5												
6	f, Гц	w, Гц	w^2		числ.	знам.	АЧХ	АЧХ[дБ]				
7	1	6,283185	39,47842	1,00E+00	1,000001	1,000005	0,999996	-3,4E-05				
8	1,467799	9,222455	85,05367	1,00E+00	1,000002	1,00001	0,999991	-7,4E-05				
9	2,154435	13,53671	183,2426	1,00E+00	1,000004	1,000022	0,999982	-0,00016				
10	3,162278	19,86918	394,7842	1,00E+00	1,000008	1,000047	0,999961	-0,00034				
11	4,641589	29,16396	850,5367	1,00E+00	1,000017	1,000102	0,999915	-0,00074				
12	6,812921	42,80684	1832,426	1,00E+00	1,000037	1,00022	0,999817	-0,00159				
13	10	62,83185	3947,842	1,00E+00	1,000079	1,000474	0,999606	-0,00343				
14	14,67799	92,22455	8505,367	9,99E-01	1,00017	1,00102	0,999151	-0,00738				
15	21,54435	135,3671	18324,26	9,99E-01	1,000367	1,002197	0,998174	-0,01588				
16	31,62278	198,6918	39478,42	9,98E-01	1,000792	1,004729	0,996082	-0,0341				
17	46,41589	291,6396	85053,67	9,95E-01	1,001713	1,010168	0,99163	-0,07301				
18	68,12921	428,0684	183242,6	9,89E-01	1,003718	1,021812	0,982293	-0,15518				
19	100	628,3185	394784,2	9,76E-01	1,008143	1,04657	0,963283	-0,32492				
20	146,7799	922,2455	850536,7	9,49E-01	1,018148	1,098514	0,926841	-0,65989				

Таблица значений АЧХ:

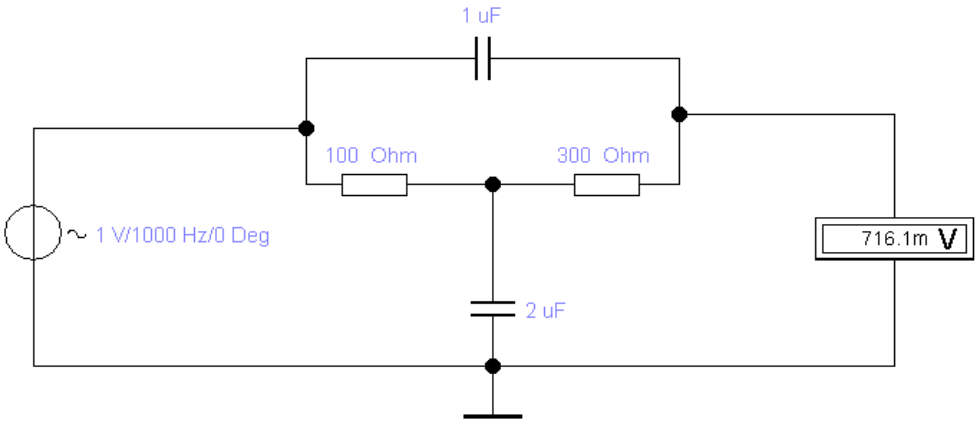
f, Гц	АЧХ, дБ
1	-3,4E-05
1,467799	-7,4E-05
2,154435	-0,00016
3,162278	-0,00034
4,641589	-0,00074
6,812921	-0,00159
10	-0,00343
14,67799	-0,00738
21,54435	-0,01588
31,62278	-0,0341
46,41589	-0,07301
68,12921	-0,15518
100	-0,32492
146,7799	-0,65989
215,4435	-1,26344
316,2278	-2,17582
464,1589	-3,14445
681,2921	-3,5137
1000	-2,93158
1467,799	-1,92773
2154,435	-1,08442
3162,278	-0,55621
4641,589	-0,27126
6812,921	-0,12893
10000	-0,06052
14677,99	-0,02824
21544,35	-0,01314

31622,78	-0,00611
46415,89	-0,00284
68129,21	-0,00132
100000	-0,00061
146779,9	-0,00028
215443,5	-0,00013
316227,8	-6,1E-05
464158,9	-2,8E-05
681292,1	-1,3E-05
1000000	-6,1E-06
1467799	-2,8E-06
2154435	-1,3E-06
3162278	-6,1E-07
4641589	-2,8E-07
6812921	-1,3E-07
10000000	-6,1E-08

По вычисленным значениям был построен график:



Для измерения АЧХ реальной цепи в программе-симуляторе EWB5.12 была построена схема:

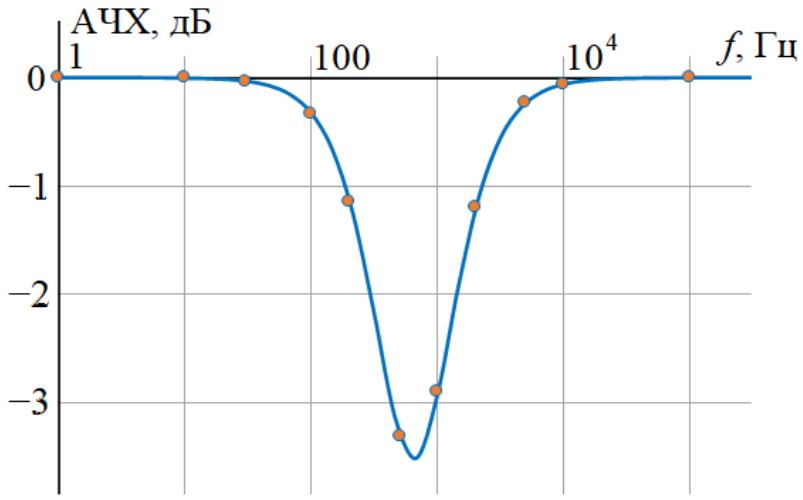


АЧХ цепи вычислялась как отношение выходного напряжения ко входному, для удобства действующее значение входного напряжения устанавливалось равным 1 В.

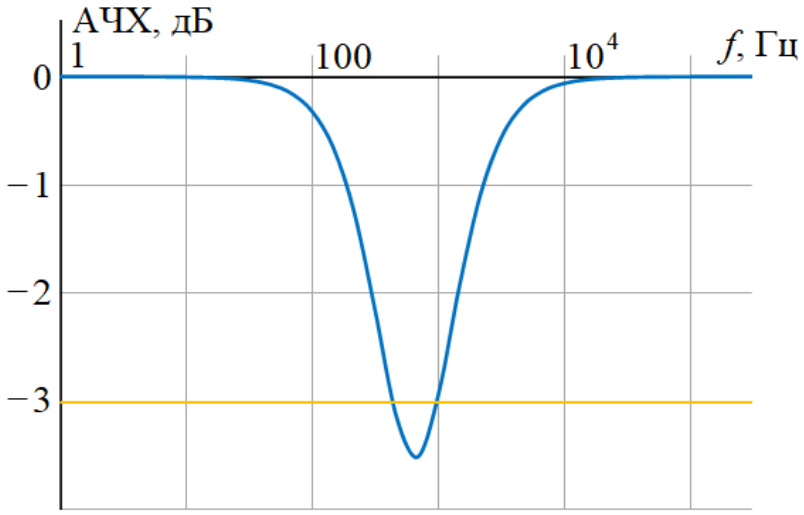
Результаты измерений приведены в таблице:

f, Гц	АЧХ	АЧХ, дБ
1	1	0
10	0,9997	-0,00261
30	0,9964	-0,03133
100	0,9624	-0,33289
200	0,8765	-1,14496
500	0,6834	-3,3065
1000	0,7161	-2,90053
2000	0,8711	-1,19864
5000	0,9739	-0,22971
10000	0,9932	-0,05927
100000	1	0
1000000	1	0

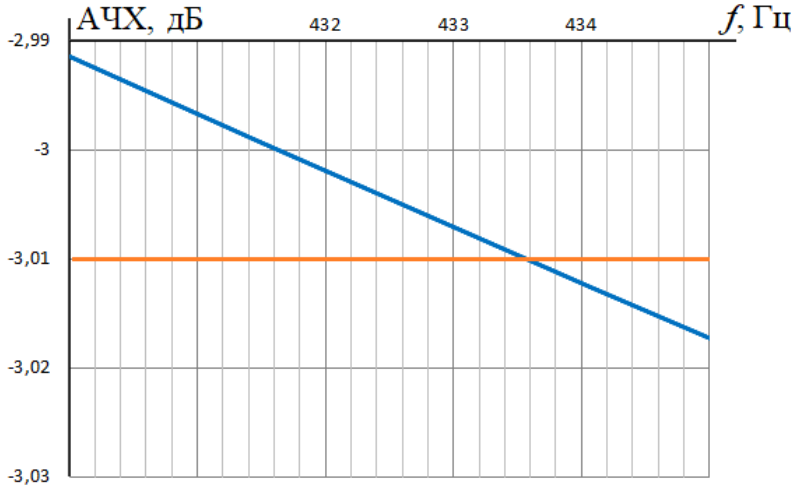
Измеренные значения АЧХ были нанесены на ранее построенный теоретический график:



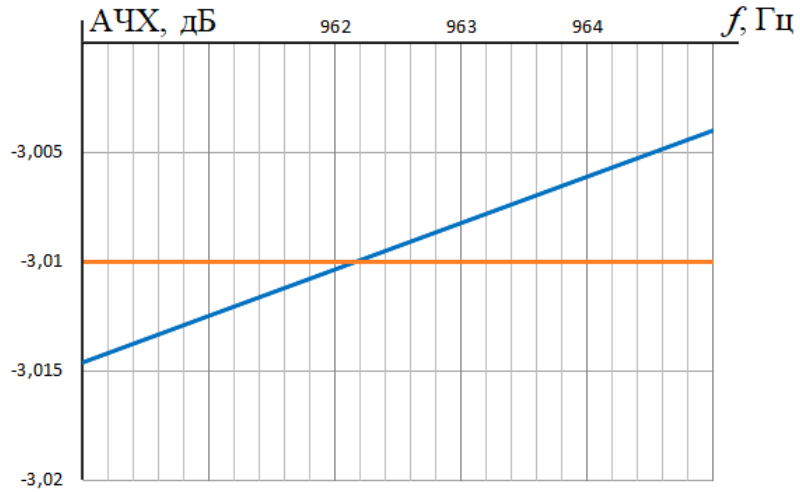
Для определения частот среза рассматриваемой цепи на график АЧХ была добавлена горизонтальная линия $\text{АЧХ}_{\max} - 3{,}01\text{дБ} = -3{,}01\text{дБ}$



Точки пересечения этой линии с графиком АЧХ определяют частоты среза:



Нижняя частота среза $f_{\text{ср.н}} = 433,6\,\text{Гц}$.



Верхняя частота среза $f_{\text{ср.в}} = 962,2\,\text{Гц}$.

Для вычисления ФЧХ цепи представим её частотную характеристику в виде:

$$H(\omega)=\frac{K+jK_1}{K+jK_2},$$

где

$$K=1-\omega^2R_1R_2C_1C_2,$$

$$K_1=\omega\left(R_2C_1+R_1C_1\right),$$

$$K_2=\omega\left(R_2C_1+R_1C_1+R_1C_2\right).$$

Домножим числитель и знаменатель частотной характеристики на $K-jK_2$:

$$H(\omega)=\frac{(K+jK_1)(K-jK_2)}{(K+jK_2)(K-jK_2)}=\frac{K^2+K_1K_2+jK\left(K_1-K_2\right)}{K^2+K_2^2}$$

ФЧХ определяется отношением мнимой и действительной частей частотной характеристики:

$$\text{ФЧХ}=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\left(K^2+K_1K_2+jK\left(K_1-K_2\right)\right)}{\operatorname{Re}\left(K^2+K_1K_2+jK\left(K_1-K_2\right)\right)}=\operatorname{arctg}\frac{K\left(K_1-K_2\right)}{K^2+K_1K_2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\left(1-\omega^2R_1R_2C_1C_2\right)\left(\omega\left(R_2C_1+R_1C_1\right)-\omega\left(R_2C_1+R_1C_1+R_1C_2\right)\right)}{\left(1-\omega^2R_1R_2C_1C_2\right)^2+\left(\omega\left(R_2C_1+R_1C_1\right)\right)\left(\omega\left(R_2C_1+R_1C_1+R_1C_2\right)\right)}$$

$$=-\operatorname{arctg}\frac{\omega R_1C_2\left(1-\omega^2R_1R_2C_1C_2\right)}{\left(1-\omega^2R_1R_2C_1C_2\right)^2+\omega^2\left(R_2C_1+R_1C_1\right)\left(R_2C_1+R_1C_1+R_1C_2\right)}=$$

График ФЧХ был построен в Excel. Фрагмент таблицы для графика:

(приводится для информации, для отчёта не обязателен!)

Примеры

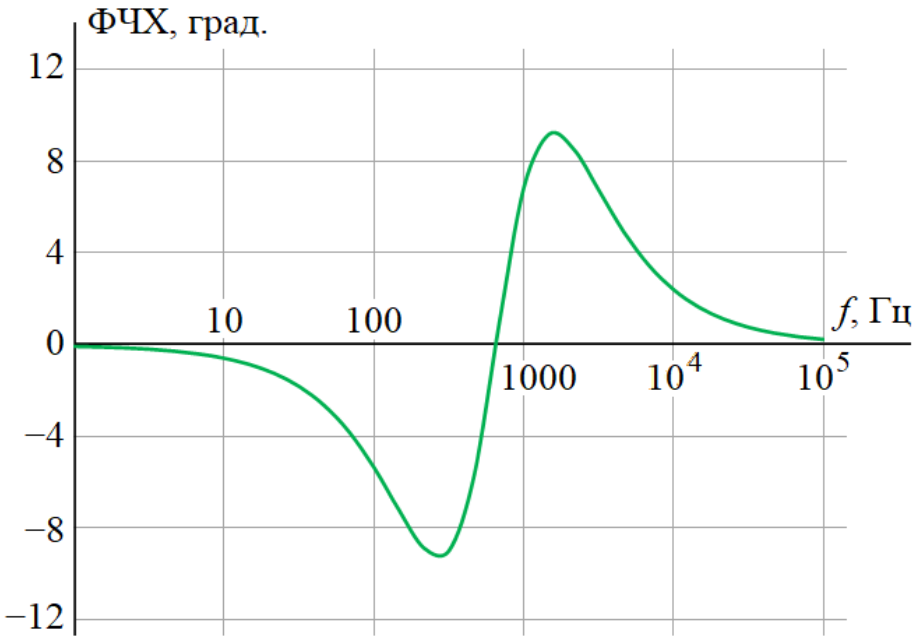
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	R1 =	100	Ом		R1 R2 C1 C2 =		6,00E-08			R2 C1 + R1 C1 =			4,00E-04	
2	R2 =	300	Ом		R2 C1 =		3,00E-04			R2 C1 + R1 C2 + R1 C2 =			6,00E-04	
3	C1 =	1,00E-06	Ф		R1 C1 =		1,00E-04							
4	C2 =	2,00E-06	Ф		R1 C2 =		2,00E-04							
5														
6	f, Гц	w, Гц	w^2	K	K_1	K_2	числ.	знам.	ФЧХ	ФЧХ, град.				
7	1	6,283185	39,47842	1,00E+00	2,51E-03	3,77E-03	-1,26E-03	1,00E+00	-0,00126	-0,071999		=ATAN2(H7;G7)		
8	1,467799	9,222455	85,05367	1,00E+00	3,69E-03	5,53E-03	-1,84E-03	1,00E+00	-0,00184	-0,10568				
9	2,154435	13,53671	183,2426	1,00E+00	5,41E-03	8,12E-03	-2,71E-03	1,00E+00	-0,00271	-0,155114				
10	3,162278	19,86918	394,7842	1,00E+00	7,95E-03	1,19E-02	-3,97E-03	1,00E+00	-0,00397	-0,227667				
11	4,641589	29,16396	850,5367	1,00E+00	1,17E-02	1,75E-02	-5,83E-03	1,00E+00	-0,00583	-0,334139				
12	6,812921	42,80684	1832,426	1,00E+00	1,71E-02	2,57E-02	-8,56E-03	1,00E+00	-0,00856	-0,490357				
13	10	62,83185	3947,842	1,00E+00	2,51E-02	3,77E-02	-1,26E-02	1,00E+00	-0,01256	-0,719451				
14	14,67799	92,22455	8505,367	9,99E-01	3,69E-02	5,53E-02	-1,84E-02	1,00E+00	-0,01841	-1,05508				
15	21,54435	135,3671	18324,26	9,99E-01	5,41E-02	8,12E-02	-2,70E-02	1,00E+00	-0,02698	-1,545711				
16	31,62278	198,6918	39478,42	9,98E-01	7,95E-02	1,19E-01	-3,96E-02	1,00E+00	-0,03944	-2,259552				
17	46,41589	291,6396	85053,67	9,95E-01	1,17E-01	1,75E-01	-5,80E-02	1,01E+00	-0,05738	-3,287599				
18	68,12921	428,0684	183242,6	9,89E-01	1,71E-01	2,57E-01	-8,47E-02	1,02E+00	-0,08265	-4,735615				
19	100	628,3185	394784,2	9,76E-01	2,51E-01	3,77E-01	-1,23E-01	1,05E+00	-0,11654	-6,677511				
20	146,7799	922,2455	850536,7	9,49E-01	3,69E-01	5,53E-01	-1,75E-01	1,10E+00	-0,15714	-9,00374				

(фрагмент приведён для ознакомления, приводить его в отчёте не нужно)

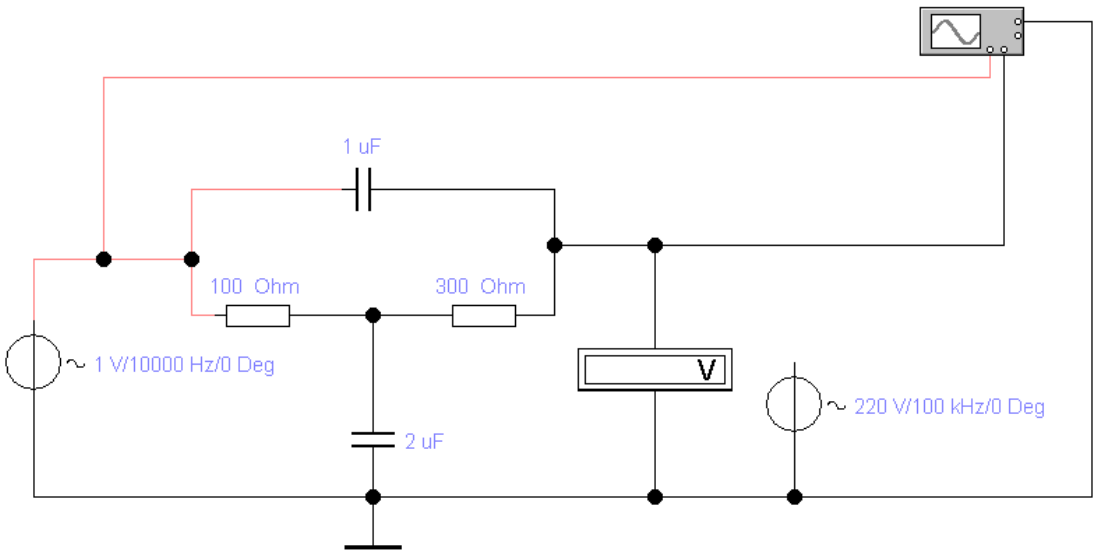
Для того, чтобы избежать при вычислениях в Excel неточности 180 градусов, вместо функции Excel ATAN (arctg) была использована функция ATAN2.
Таблица значений ФЧХ:

f, Гц	ФЧХ, град.
1	-0,072
1,467799	-0,10568
2,154435	-0,15511
3,162278	-0,22767
4,641589	-0,33414
6,812921	-0,49036
10	-0,71945
14,67799	-1,05508
21,54435	-1,54571
31,62278	-2,25955
46,41589	-3,2876
68,12921	-4,73561
100	-6,67751
146,7799	-9,00374
215,4435	-11,067
316,2278	-11,2121
464,1589	-7,13701
681,2921	1,106693
1000	8,618339
1467,799	11,48508
2154,435	10,65165
3162,278	8,414609
4641,589	6,152205
6812,921	4,333376
10000	2,998666
14677,99	2,05786
21544,35	1,406747
31622,78	0,959911
46415,89	0,654456
68129,21	0,446027
100000	0,303922

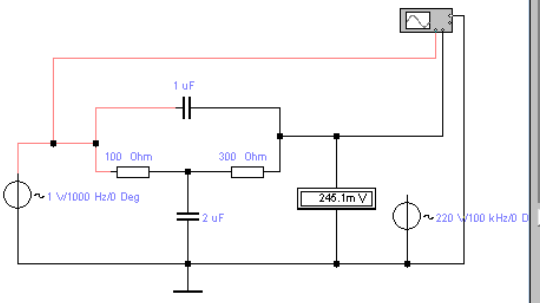
По вычисленным значениям был построен график:

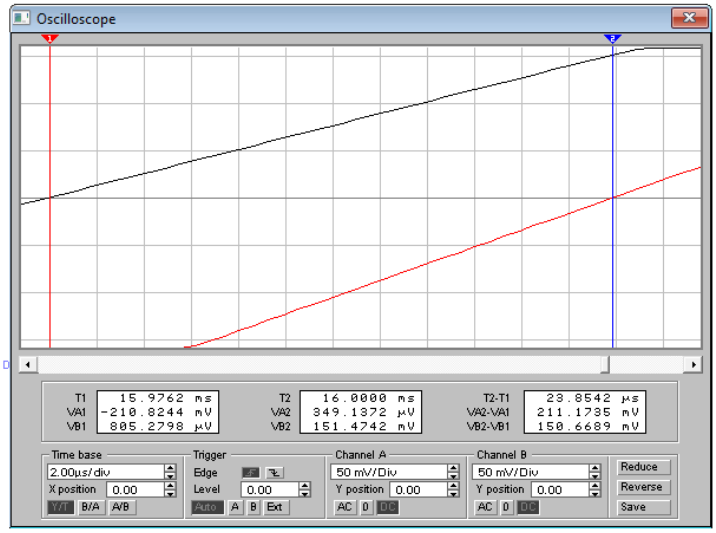


Для измерения ФЧХ в программе-симуляторе EWB5.12 была собрана исследуемая схема, представляющая собой ранее собранную схему, в которую добавлен осциллограф и генератор высокой (по сравнению с тестовым генератором) частоты:



Сдвиг фаз между выходным и входным сигналами измерялся по сдвигу между точками пересечения нуля осциллограммами выходного и входного сигналов:





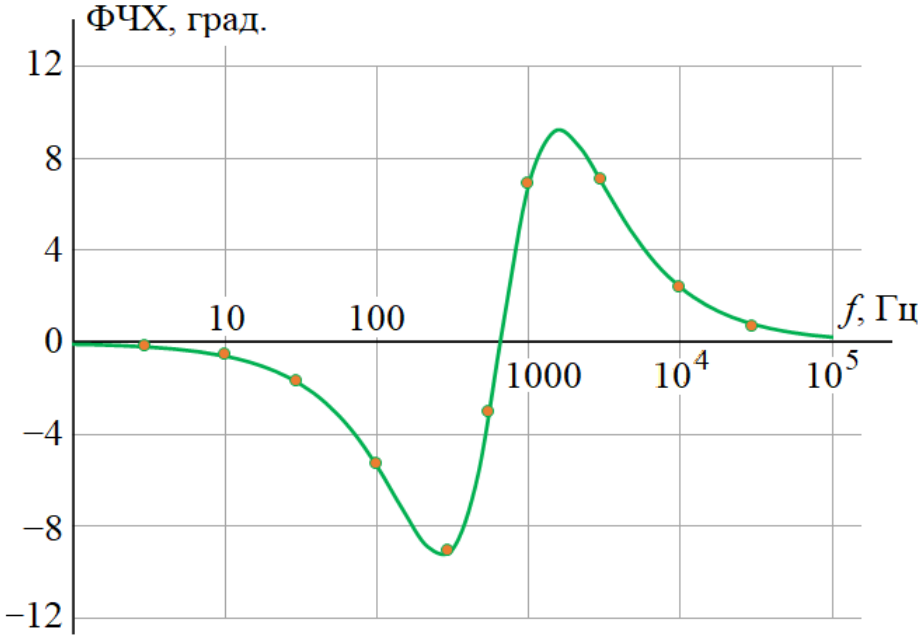
Измеренные таким образом точки ФЧХ рассчитаны по формуле

$$\text{ФЧХ} = \frac{\Delta}{T} \times 360\,\text{град.} = \left(T_2 - T_1\right) f \times 360\,\text{град.}$$

и приведены в таблице:

f, Гц	$T_2 - T_1$	ФЧХ, град.
3	-0,0001997	-0,21568
10	-0,0001997	-0,71892
30	-0,0001984	-2,14272
100	-0,0001847	-6,6492
300	-0,0001052	-11,3616
550	-0,00001942	-3,84516
1000	0,0000239	8,604
3000	0,00000815	8,802
10000	8,35E-07	3,00492
30000	8,08E-08	0,872532

Полученные описанным способом измеренные точки ФЧХ были нанесены на ранее построенный теоретический график:



Из графиков АЧХ и ФЧХ видно, что частота, на которой ФЧХ обращается в 0, совпадает с частотой, на которой график АЧХ принимает экстремальное (в данном случае – минимальное) значение.