

Лекция 1.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Метрика и окрестности в \mathbb{R}^n .

Рассмотрим в \mathbb{R}^n , евклидовом n - мерном пространстве элементы x и y

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n),$$

где расстояние задано

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Пусть задана точка $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Множество $U_n(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho(x, a) < r\}$ называется открытым n – мерным шаром радиуса r с центром в точке a .

Определение 2. Множество $V_n(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho(x, a) \leq r\}$ называется замкнутым n – мерным шаром радиуса r с центром в точке a .

Определение 3. Множество $S_n(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho(x, a) = r\}$ называется n – мерной сферой радиуса r с центром в точке a .

Пример 1. $A(a, b) \in \mathbb{R}^2$; $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2 - \text{открытый круг;}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2 - \text{замкнутый круг.}$$

Пример 2. $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2$ - замкнутый шар.

Определение 4. Множество $|x_1 - a_1| \leq d_1, \dots, |x_n - a_n| \leq d_n$ называется n – мерным параллелепипедом.

Определение 5. ε – окрестностью точки $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется открытый шар $V_n(a, \varepsilon)$ радиуса ε с центром в точке a .

$$V_n(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

Определение 6. Точка $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества D , если $\exists \varepsilon$ – окрестность точки a все точки которой принадлежат множеству D .

Определение 7. Точка $b \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой* множества D , если $\forall \varepsilon$ – окрестность этой точки содержит точки, которые принадлежат множеству D , так и точки ему не принадлежащие .

Множества в \mathbb{R}^n .

Определение. Множество D пространства \mathbb{R}^n называется *открытым множеством*, если любая точка этого множества внутренняя.

Определение. Если все точки множества находятся внутри некоторого шара конечного радиуса, то множество называется *ограниченным*.

Определение. *Непрерывная кривая* в пространстве \mathbb{R}^n – это множество точек этого пространства, координаты которых есть непрерывные функции

$$x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

Определение. Множество пространства \mathbb{R}^n называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Определение. *Областью* назовем открытое связное множество.

Определение. *Окрестностью* точки $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ назовем любое открытое связное множество, содержащее точку a .

Скалярные функции n переменных как отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть даны два множества

$X \subset \mathbb{R}^n$ (\mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство) и $U \subset \mathbb{R}$.

Элементы множества X есть

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\bar{y} = (y_1, \dots, y_n),$$

Элементы множества U есть числа $u \in U \subset \mathbb{R}$.

Определение. Функцией f назовем отображение $\forall x \in X \subset \mathbb{R}^n$ в один элемент $u \in U \subset \mathbb{R}$.

Обозначаем так:

$$u = f(x_1, \dots, x_n)$$

или $f: X \rightarrow U$ или $X \xrightarrow{f} U$.

Множество X называется *областью определения функции*.

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – аргумент функции;

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ – значение функции на

элементе $x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subset \mathbb{R}^n$;

$f(X) = \{f(x): x \in X\}$ – область значений функции.

Функция двух переменных $u = f(x; y)$, есть отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Пример 1. $u = x^2 + y^2$ $(-1; 2) \rightarrow u = 1 + 4 = 5$.

Пример 2. $u = x + y + z$ $(1; 2; -1) \rightarrow u = 1 + 2 - 1 = 2$.

Пример 3. $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ $(1; 1 \dots; 1) \rightarrow u = 1 + 1 \dots + 1 = n$.

Линии и поверхности уровня

Геометрическое место точек $(x, y, f(x; y))$ называется поверхностью :

$$u = f(x; y).$$

Пример. $u = x^2 + y^2$

Рис.

Параболоид.

Для геометрического изучения функции $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ вводится понятие линии уровня.

Определение. *Линией уровня* функции $u = f(x; y)$ называется геометрическое место точек на плоскости Oxy , в которых функция принимает одно и то же постоянное значение

$$u = f(x; y), \quad u = C.$$

Уравнение линии уровня: $f(x; y) = C$.

Пример. $u = x^2 + y^2$

Уравнение линии уровня : $x^2 + y^2 = C$.

Для геометрического изучения функции $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ вводится понятие поверхности уровня.

Определение. *Поверхностью уровня* функции $u = f(x; y; z)$ называется геометрическое место точек в пространстве $Oxyz$, в которых функция принимает одно и то же постоянное значение

$$u = f(x; y; z), \quad u = C.$$

Уравнение поверхности уровня: $f(x; y; z) = C$.

Пример. $u = x^2 + y^2 + z^2$

Уравнение поверхности уровня : $x^2 + y^2 + z^2 = C$.

