

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Конспект лекций

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Лекция 13

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Экстремум ФНП. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума (формулировка с помощью матрицы Гессе, без док-ва).

13.1. Необходимое условие экстремума

Определение 13.1. Говорят, что *функция нескольких переменных* $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определенная в некоторой *окрестности точки* $a \in \mathbb{R}^n$, имеет в этой точке **локальный максимум (минимум)**, если существует такая *проколота окрестность* $\mathring{U}(a, \varepsilon)$ точки a , что для любой точки $x \in \mathring{U}(a, \varepsilon)$ выполнено неравенство $f(x) \leq f(a)$, ($f(x) \geq f(a)$). Понятия локального минимума и локального максимума функции объединяют под общим названием **экстремум функции**.

Если неравенства в определении 13.1 являются строгими, то говорят о **строгом экстремуме функции**.

Теорема 13.1 (необходимое условие экстремума функции). Пусть функция нескольких переменных $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в точке $a \in \mathbb{R}^n$ экстремум. Если функция $f(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) имеет в точке a *частную производную первого порядка* по переменному x_i , $1 \leq i \leq n$, то эта частная производная равна нулю: $f'_{x_i}(a) = 0$.

◀ Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$. Рассмотрим действительную функцию

$$g(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

одного действительного переменного t , которая получается, если у функции $f(x)$ зафиксированы все переменные, кроме i -го, равного t . Функция $g(t)$ в точке $t = a_i$ имеет *локальный экстремум*. В самом деле, пусть, например, $f(x)$ имеет в точке a локальный максимум. Тогда существует такая проколота окрестность $\mathring{U}(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n: 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ точки a , что $f(x) \leq f(a)$ при $x \in \mathring{U}(a, \varepsilon)$. Но в таком случае $g(t) \leq g(a_i)$ при $0 < |t - a_i| < \varepsilon$, что соответствует определению локального максимума функции одного переменного.

Функция $g(t)$ дифференцируема в точке $t = a_i$, так как функция $f(x)$ имеет в точке a частную производную по переменному x_i . При этом $g'(a_i) = f'_{x_i}(a)$. Согласно необходимому условию локального экстремума для функции действительного переменного, выполнено равенство $g'(a_i) = 0$. Следовательно, $f'_{x_i}(a) = 0$. ▶

Следствие 13.1. Пусть функция нескольких переменных $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в точке $a \in \mathbb{R}^n$ экстремум. Тогда:

- если в точке a определен *градиент функции* $f(x)$, то он равен нулю: $\text{grad } f(a) = 0$;
- если функция дифференцируема в точке a , то $df(a) = 0$.

◀ Утверждения следствия сводятся к следующему: если в точке a экстремума функция $f(x)$ имеет все частные производные, то эти частные производные равны нулю. Действительно, градиент — это вектор, координатами которого являются значения частных производных функции

первого порядка в данной точке, а коэффициентами *дифференциала первого порядка* являются те же значения частных производных. ►

Из следствия 13.1 вытекает, что точки экстремума функции нескольких переменных $f(x)$ надо искать либо среди точек, в которых $\text{grad } f(x) = 0$ (т.е. среди **стационарных точек функции**), либо среди точек, в которых градиент не определен (не существует одна или несколько частных производных). Все точки, в которых градиент функции равен нулю или не определен, называют точками, подозрительными на экстремум, или **критическими точками функции**.

Впрочем, согласно теореме 13.1, при исследовании функции на экстремум можно не рассматривать те критические точки, в которых хотя и не все частные производные существуют, но существует по крайней мере одна частная производная, не равная нулю.

Пример 13.1. Функция двух переменных $f(x, y) = e^{x^2} + (y + 2)^2 - 1$ дифференцируема на всей плоскости. Значит, в соответствии с необходимым условием экстремума (см. также следствие 13.1) точки экстремума этой функции надо искать среди ее стационарных точек. Найдем частные производные функции и приравняем их нулю:

$$f'_x = 2xe^{x^2} = 0, \quad f'_y = 2(y + 2) = 0.$$

Мы получили систему двух уравнений относительно неизвестных x и y . Единственным решением этой системы уравнений является $x = 0$, $y = -2$. Поэтому функция $f(x, y)$ может иметь экстремум только в точке $(0, -2)$.

Необходимое условие экстремума функции не позволяет определить, действительно ли в точке $(0, -2)$ функция $f(x, y)$ имеет экстремум. Оно лишь выделяет относительно небольшое количество точек, в которых экстремум может быть. Дальнейшее исследование на экстремум предполагает анализ каждой критической точки. В данном случае нетрудно увидеть, что в точке $(0, -2)$ функция $f(x, y)$ имеет локальный минимум, так как слагаемое e^{x^2} имеет наименьшее значение при $x = 0$, а слагаемое $(y + 2)^2$ — при $y = -2$.

Пример 13.2. Покажем, что у функции $g(x, y) = x^2 - y^2$ нет экстремумов (в этом, кстати, можно убедиться, изобразив в прямоугольной системе координат в пространстве *график* этой функции).

Функция $g(x, y)$ дифференцируема на всей плоскости. Поэтому ее точки экстремума могут быть лишь среди стационарных точек. Вычислим частные производные функции и запишем систему уравнений, приравняв частные производные нулю:

$$g'_x = 2x = 0, \quad g'_y = -2y = 0.$$

Эта система имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$. Значит, функция $g(x, y)$ может иметь экстремум лишь в точке $(0, 0)$. Однако при $y = 0$ функция одного переменного $g(x, 0) = x^2$ в точке $x = 0$ имеет строгий локальный минимум, так как $g(x, 0) = x^2 > 0 = g(0, 0)$, $x \neq 0$, а при $x = 0$ функция одного переменного $g(0, y) = -y^2$ при $y = 0$ имеет строгий локальный максимум, так как $g(0, y) = -y^2 < 0 = g(0, 0)$, $y \neq 0$. Поэтому точка $(0, 0)$ не может быть точкой экстремума функции $g(x, y)$. #

Пример 13.3. Функция двух переменных $h(x, y) = |x| + y^2$ дифференцируема во всех точках плоскости xOy , кроме точек оси Oy . При этом $h'_x(x, y) = 1$ при $x > 0$ и $h'_x(x, y) = -1$ при $x < 0$. Значит, точки экстремума могут располагаться только на оси Oy , в точках которой не существует частная производная h'_x . Обратим внимание, что частная производная функции $h(x, y)$ по переменному y существует во всех критических точках, но обращается в нуль только при $y = 0$, т.е. в начале координат. Поэтому единственная точка, в которой может быть экстремум функции, — это точка $(0, 0)$. Дальнейшее исследование поведения функции в окрестности этой точки можно проводить так же, как и в примере 13.1. Слагаемое $|x|$ имеет строгий локальный минимум при $x = 0$, а слагаемое y^2 — при $y = 0$. Следовательно, в точке $(0, 0)$ функция $h(x, y)$ имеет строгий локальный минимум.

13.2. Достаточное условие экстремума

Исследование *стационарных точек функции нескольких переменных* на экстремум, как и в случае функций одного переменного, можно проводить, анализируя *дифференциал второго порядка*. Напомним, что дифференциал второго порядка функции нескольких переменных представляет собой квадратичную форму относительно *приращений* (дифференциалов) независимых переменных.

Теорема 13.2 (достаточное условие экстремума функции). Пусть функция нескольких переменных $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определена в окрестности $U(a)$ точки a , дважды непрерывно дифференцируема в $U(a)$ и $df(a) = 0$. Тогда:

- 1) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a положительно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет *строгий локальный минимум*;
- 2) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a отрицательно определенная, то в этой точке функция $f(x)$ имеет *строгий локальный максимум*;
- 3) если квадратичная форма $d^2f(a)$ в точке a знакопеременная, то в этой точке функция $f(x)$ не имеет экстремума.

Пример 13.4. Функция $f(x, y) = x^2 + y^4$ двух переменных дифференцируема во всей плоскости xOy , и ее точки экстремума следует искать среди стационарных точек. Вычислив частные производные, заключаем, что у функции только одна стационарная точка $(0, 0)$. Так как функция дважды непрерывно дифференцируема, для исследования характера этой точки можно использовать теорему 13.2. В силу равенств

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

второй дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ имеет вид $d^2f(0, 0) = 2dx^2$. Это вырожденная квадратичная форма, сохраняющая знак. Значит, теорема 13.2 в данном случае ничего не дает. Однако нетрудно заметить, что в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y)$ имеет локальный минимум.

Функция двух переменных $g(x, y) = x^2 - y^4$ также имеет единственную стационарную точку $(0, 0)$, причем второй дифференциал этой функции в точке $(0, 0)$ совпадает с $d^2f(0, 0) = 2dx^2$. Но при этом функция $g(x, y)$ не имеет в точке $(0, 0)$ экстремума, так как она в этой точке достигает максимума при фиксированном $x = 0$ и минимума при фиксированном $y = 0$.

Напомним, что тип квадратичной формы $d^2f(a)$ можно определить с помощью критерия Сильвестра или приведением ее к каноническому виду. В случае функции двух переменных *достаточное условие экстремума функции* в сочетании с *критерием Сильвестра* приводит к простым правилам проверки.

Предположим, что функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в окрестности точки $P(a, b)$ и в этой точке выполнено *необходимое условие экстремума функции*, т.е.

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0.$$

В точке P матрица Гессе $f''(a, b)$ функции $f(x, y)$, представляющая собой матрицу квадратичной формы $d^2f(a, b)$, имеет вид

$$f''(a, b) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{xy}(a, b) & f''_{y^2}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Для частных производных в фиксированной точке часто используют обозначения:

$$A = f''_{x^2}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{y^2}(a, b).$$

С помощью этих обозначений *дифференциал второго порядка* функции $f(x, y)$ в точке P и матрицу Гессе можно записать следующим образом:

$$d^2 f(a, b) = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2, \quad f''(a, b) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Теорема 13.3 (достаточное условие экстремума для функции двух переменных).

Пусть функция $f(x, y)$ определена в *окрестности* $U(a, b)$ точки $P(a, b)$, дважды непрерывно дифференцируема в $U(a, b)$ и $df(a, b) = 0$. Тогда:

- 1) если $A > 0$ и $AC - B^2 > 0$, то в точке $P(a, b)$ функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный минимум;
- 2) если $A < 0$ и $AC - B^2 > 0$, то в точке P функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный максимум;
- 3) если $AC - B^2 < 0$, то функция $f(x, y)$ не имеет в точке P экстремума.

◀ Согласно критерию Сильвестра, второй дифференциал $d^2 f(a, b)$ является положительно определенной квадратичной формой, если $A > 0$ и $\det f''(a, b) = AC - B^2 > 0$. Второй дифференциал является отрицательно определенной квадратичной формой, если $A < 0$ и $AC - B^2 > 0$. Он является знакопеременной квадратичной формой, если $AC - B^2 < 0$. Наконец, квадратичная форма $d^2 f(a, b)$ вырождена, если $AC - B^2 = 0$. С учетом этих фактов из теоремы 13.2 получаем доказываемое утверждение. ▶

Теорема 13.3 не охватывает случай $AC = B^2$. В этом случае квадратичная форма $d^2 f(a, b)$ вырождена, но сохраняет знак, так как квадратный трехчлен

$$d^2 f(a, b) = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2$$

по переменному dx (при $A \neq 0$) или переменному dy (при $C \neq 0$) имеет нулевой дискриминант и потому представляет собой полный квадрат. Например, при $A \neq 0$ имеем

$$A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2 = A \left(dx + \frac{B}{A} dy \right)^2.$$

При $AC = B^2$ функция может иметь в точке (a, b) локальный экстремум, а может и не иметь его (см. пример 13.4).

13.3. Исследование функций на экстремум

Задачу исследования *функции нескольких переменных* $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на экстремум часто записывают в виде

$$f(x) \rightarrow \text{extr}.$$

Такие задачи решают в два этапа. На первом этапе с помощью *необходимых условий экстремума* отбирают точки, подозрительные на экстремум (*критические точки*). На втором этапе каждую отобранную точку исследуют на наличие в ней *экстремума функции*. Это исследование может выполняться либо с помощью различных *достаточных условий экстремума* (см. 13.2), либо с помощью непосредственного анализа поведения функции в *окрестности* исследуемой точки.

Пример 13.5. Рассмотрим задачу

$$x^3 + 2xy + y^2 \rightarrow \text{extr}.$$

Функция $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$ является бесконечно дифференцируемой, т.е. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Поэтому ее точки экстремума — это *стационарные точки*, которые можно найти, приравняв нулю частные производные функции первого порядка:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

В нашем случае $f'_x(x, y) = 3x^2 + 2y$, $f'_y(x, y) = 2x + 2y$, и мы получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0, \\ 2x + 2y = 0. \end{cases} \quad (13.1)$$

Из второго уравнения находим, что $x = -y$, и после подстановки в первое уравнение получаем $3y^2 + 2y = 0$. Следовательно, система (13.1) имеет два решения

$$y_1 = 0, \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_2 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Значит, функция $f(x, y)$ имеет две стационарных точки $P_1(0, 0)$, $P_2(2/3, -2/3)$.

Воспользуемся достаточным условием экстремума для функции двух переменных. Для этого найдем *частные производные второго порядка* функции $f(x, y)$:

$$f''_{x^2}(x, y) = 6x, \quad f''_{xy}(x, y) = 2, \quad f''_{y^2}(x, y) = 2.$$

Подставляя в эти производные координаты точки P_1 , находим $A = 0$, $B = 2$, $C = 2$. Отсюда $AC - B^2 < 0$, и, согласно достаточным условиям экстремума функции двух переменных, в точке $P_1(0, 0)$ функция $f(x, y)$ экстремума не имеет. Аналогичные вычисления для точки P_2 дают следующее: $A = 4 > 0$, $B = 2$, $C = 2$, $AC - B^2 > 0$. Значит, в точке $P_2(2/3, -2/3)$ функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный минимум. Значение функции в точке P_2 равно $f_{\min} = -4/27$.

Обратим внимание на то, что у функции $f(x, y)$ есть значения, меньшие $f_{\min}$. Например, $f(-10, 0) = -1000$. Это говорит о том, что минимум в точке P_2 носит локальный характер, а не абсолютный: значение $f(2/3, -2/3)$ является наименьшим лишь в некоторой окрестности точки P_2 , но не во всей плоскости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 13. Экстремум функции нескольких переменных	57
13.1. Необходимое условие экстремума	57
13.2. Достаточное условие экстремума	59
13.3. Исследование функций на экстремум	60