

**Московский государственный технический университет  
имени Н.Э.БАУМАНА**

---

Факультет «Радиоэлектроника и лазерная техника»  
Кафедра «Лазерные и оптико-электронные системы»

**В.Б.Немтинов**

**Формирование изображения и типовые сигналы  
в когерентной оптической системе**

**Электронное учебное издание**

Учебное пособие по дисциплине «Когерентная и нелинейная оптика»

Москва

(С) 2012 МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 535. (075.8)

Рецензенты: Белозёров Альберт Фёдорович, д.т.н. профессор  
Лазарева Наталия Леонидовна, к.т.н. доцент

**Немтинов Владимир Борисович**

Формирование изображения и типовые сигналы в когерентной оптической системе. Электронное учебное издание. – М.: МГТУ имени Н.Э.Баумана, 60 с.

Учебное пособие содержит основные теоретические сведения о процессе преобразования сигналов в когерентной оптической изображающей системе как отображении множества оптических сигналов в себя. Исследована связь пространственно-координатного свёрточного формирования когерентного изображения и его пространственно-частотного представления. Проанализированы когерентная функция рассеяния и когерентная передаточная функция. Даны примеры пространственно-координатного и пространственно-частотного формирования изображения амплитудного объекта в приближении идеальной и реальной систем. Рассмотрено преобразование сигналов в трёхкомпонентной когерентной оптической изображающей системе и в трёхкомпонентном пространственно-частотном фильтре. В приложении приведён ансамбль рабочих типовых сигналов.

Пособие предназначено для студентов четвёртого курса, обучающихся по направлению «Лазерная техника и лазерные технологии».

Рекомендовано Учебно-методической комиссией НУК РЛМ МГТУ им. Н.Э.Баумана в качестве учебного пособия.

**Немтинов Владимир Борисович**

**Формирование изображения и типовые сигналы  
в когерентной оптической системе**

© 2012 МГТУ имени Н.Э.Баумана

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения и сокращения .....	3
Введение .....	4
1 Системно-модельный подход к описанию процесса преобразования сигналов в оптической системе .....	6
1.1 Идентификация оптической системы.....	7
1.2 Модельное представление оптической системы.....	9
1.3 Расчётно-формульная и операторно-вычислительная математические модели оптической системы .....	10
1.4 Оптические сигналы.....	12
2 Когерентная оптическая система .....	15
2.1 Когерентные свойства излучения .....	15
2.2 Координатное описание базисных типовых сигналов.....	17
2.2.1 $\delta$ -образные базисные точечные источники.....	20
2.2.2 Однородные сферические волны .....	21
2.2.3 Базисные пространственно-частотные гармоники.....	22
2.2.4 Однородные плоские волны .....	23
2.3 Иерархия транспарантных операторно-вычислительных моделей поведения линейной когерентной оптической изображающей системы.....	24
2.3.1 Идеальная оптическая система.....	25
2.3.2 Дифракционно ограниченная оптическая система .....	25
2.3.3 Корпулентная дифракционно ограниченная оптическая система	28
2.3.4 Абберрационная дифракционно ограниченная система .....	29
2.3.5 Реальная оптическая система .....	30
3 Инвариантное поведение линейной когерентной оптической изображающей системы .....	32

3.1	Пространственно-координатное описание процесса формирования изображения.....	32
3.1.1	Линейная когерентная оптическая изображающая система .....	32
3.1.2	Операторно-вычислительная свёрточная модель поведения пространственно инвариантной оптической системы в приближении дифракционно ограниченной оптической системы.....	33
3.1.3	Операторно-вычислительная свёрточная модель поведения пространственно инвариантной оптической системы в приближении реальной оптической системы .....	36
3.2	Пространственно-частотное описание процесса формирования изображения в когерентной оптической изображающей системе.....	37
3.2.1	Оптико-физический смысл приведённой когерентной функции рассеяния.....	37
3.2.2	Идентификация пространственно инвариантной когерентной оптической изображающей системы в виде линейного пространственно-частотного фильтра (ПЧФ).....	38
3.2.3	Когерентная передаточная функция оптической изображающей системы с прямоугольным и круглым зрачками в приближении дифракционно ограниченной оптической системы.....	41
3.3	Примеры пространственно-координатного и пространственно-частотного описания формирования изображения в линейной когерентной идеальной (ИОС) и реальной (РОС) оптической системе .....	44
3.3.1	Однокомпонентная линейная когерентная оптическая изображающая система.....	44
3.3.2	Трёхкомпонентная линейная КгрОИЗС.....	47
	Список использованных источников.....	50

## Обозначения и сокращения

ДОС	Дифракционно ограниченная оптическая система
АДОС	Аберрационная ДОС
ИОС	Идеальная оптическая система
КрпДОС	Корпулентная (конечно толщинная) ДОС
РОС	Реальная оптическая система
Гмо-копия	Геометрооптическая копия
КПФ	Когерентная передаточная функция
КгрФР (КФР)	Когерентная функция рассеяния
КгрОИзС (КОС)	Когерентная оптическая изображающая система
ММ	Математическая модель
ГмтМ	Геометрическая модель
МП	Модель поведения
ППС	Процесс преобразования сигналов
ПЧС	Пространственно-частотный спектр
ПЧФ	Пространственно-частотный фильтр
ПЭ	Преобразующий элемент
СП	Слой пространства
СПП	Слой пространства предметов
СПИ	Слой пространства изображений

## Введение

В настоящее время наблюдается интенсивная разработка и внедрение в практику лазерно-электронных приборов различного назначения. Их становление и развитие обусловлено революционными преобразованиями в оптике, которые произошли после создания первых лазеров. В 1916 году А.Эйнштейн предсказал существование явления вынужденного излучения – физической основы работы любого лазера. А через 44 года в 1960 г. создан первый лазер на рубине (Т.Мейман), который работал в импульсном режиме на длине волны 694,3 нм. В декабре того же года разработан гелий-неоновый лазер, излучающий в непрерывном режиме (А.Джаван, У.Беннет, Д.Хэрриот). Изначально он работал в инфракрасном диапазоне 1,15 мкм и 3,39 мкм, затем модифицирован для излучения видимого красного света 632,8 нм. Весомый вклад в изучение принципов квантового усиления и генерации внесли советские физики А.Прохоров и Н.Басов (Нобелевская премия по физике 1964 г.).

В 40-х и в самом начале 50-х годов оптика как наука считалась полностью завершённой. И вдруг неожиданно появляются первые лазеры, и начинается лавинообразная разработка новых типов, а потом для лазеров изготавливают волоконные световоды, с помощью которых создают волоконнооптические линии связи. А ещё появляются системы типа GPS и ГЛОНАСС, это тоже имеет прямое отношение к лазеру. Потому что без стандартов частоты, создаваемых на основе лазеров, существование этих систем невозможно.

Возникают лазерные системы различного применения, перечислить которые в рамках предисловия невозможно. Это лазерные локационные системы зондирования атмосферы и океана с целью экологического мониторинга газовых загрязнений в атмосфере и производственных помещениях и лазерного контроля нефтяных загрязнений на морской поверхности. Особую роль начинают играть лазерные системы видения и обнаружения. Сразу же после появления лазеров началось бурное развитие голографии. Наряду с получением изобразительных голограмм возникли различные специальные применения: го-

лограммные цифровые оптические элементы, голограммные прицелы, голографические интерферометры и т.п.

Российский физик Ж.Алфёров получил Нобелевскую премию 2000 г. за развитие полупроводниковых гетероструктур для высокоскоростной оптоэлектроники с официальной формулировкой «За создание базовых информационных технологий». Исследование гетероструктур с квантовыми точками привело к созданию уникальных лазеров на их основе.

Таким образом, мёртвая, казалось бы, наука–оптика вдруг порождает огромный ансамбль новинок, и в этом заключается её роль как **фундаментальной науки**. В результате в рамках упомянутых инженерно-технических приложений выделяется целое направление – лазерная, или когерентная, оптика, которая занимается синтезированием лазерно-оптических систем для формирования когерентного изображения. Поэтому задача пособия – выяснить структурные и поведенческие аспекты такой когерентной оптической системы.

## 1 Системно-модельный подход к описанию процесса преобразования сигналов в оптической системе

Оптическая система преобразует входные сигналы  $s(P)$  в выходные (преобразованные) оптические сигналы  $\sigma(Q)$ , где точка  $P(x,y)$  принадлежит пространству входных сигналов, а точка  $Q(x',y')$  – пространству преобразованных сигналов. Иначе говоря, процесс преобразования сигналов в оптической системе представляет собой отображение множества оптических сигналов в себя. При этом преобразующие свойства оптической системы определяются поведенческими свойствами объектива, а также слоёв пространства входных и преобразованных сигналов, которые обладают как осевой, так и сдвиговой симметрией. Явный вид результирующего оператора поведения оптической системы существенно зависит от выбранных моделей всех преобразующих элементов и от соответствующих значений их внешних и внутренних параметров. В зависимости от этих значений выделяют две основные разновидности оптической системы, а именно оптическую изображающую систему и оптическую фурье-преобразующую систему.

Полное исследование процесса преобразования сигналов в любой оптической системе сводится к анализу пространственно-координатного и пространственно-частотного поведения конкретных систем. При этом вид оператора поведения существенно зависит от степени когерентности излучения, рассеянного объектом. Реальная оптическая система формирует изображение при когерентном, некогерентном и частично когерентном излучении и называется когерентной, некогерентной и частично когерентной оптической системой соответственно. В пособии рассматриваются структура и поведение только когерентной оптической системы.

На современном уровне процесс преобразования сигналов в когерентной оптической системе анализируется в рамках тех или иных заместителей (образов, слепков и т.п.) – моделей. Поэтому изложение должно начинаться с идентификации основных положений системно-модельного подхода к описанию

процесса преобразования сигналов в оптической системе. Он является расширением классического системного подхода и использует структурно-функциональные связи триады "1s – M – 2C" (рисунок 1), задающие преобразующую связность сигнала  $s$  через модель  $M$  с системой  $C$  и обратно. В результате визуализируется вход сигнала  $s$  в систему  $C$  и его выход на основе сигнально-системной модельной идентификации.

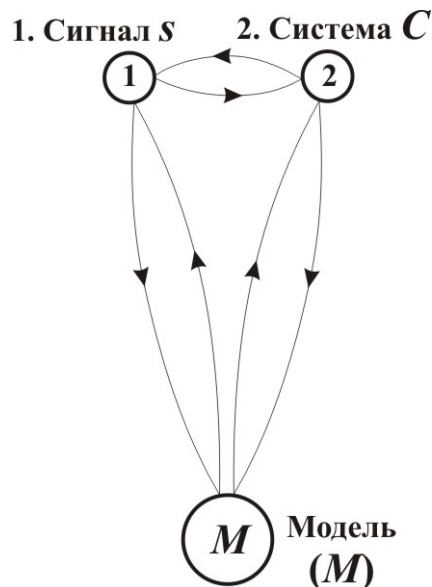


Рисунок 1 – Структурно-функциональная схема "1s – M – 2C", описывающая этапы процесса преобразования сигналов  $s$  в системе  $C$  на основе идентификации их модельных представлений (сигнально-системный 2-факторный модельный орграфовый лепесток)

### 1.1 Идентификация оптической системы

Хотя в настоящее время ни одно из определений системы не является общепринятым, обычно в рамках классического инженерного подхода в приборостроении под **технической системой** понимается целостная совокупность взаимосвязанных, взаимоупорядоченных и взаимодействующих **технических объектов**, т.е. элементов, устройств, аппаратуры и т.п., обладающих пространственной структурной или поведенческой замкнутостью. Эта совокупность технических объектов выполняет определённую задачу для достижения постав-

ленной цели на основе реализации технического или технологического процесса. Причём эффект, достигаемый от такой совокупности, не является суммарным по отношению к каждому из её функционально завершённых объектов. Анализ поведения любой технической системы на основе широкого использования научных знаний – главное условие научно-технического прогресса.

В зависимости от инженерно-физического содержания *технических объектов* идентифицируют конкретную реализацию **технической системы**. Если говорят о совокупности *оптико-технических объектов*, которая представляет собой *множество оптических элементов*, работающих при когерентном освещении, то в частном случае техническая система представляет собой **когерентную оптическую систему**.

Введённое определение разъясняет интуитивное восприятие технической системы как совокупности сложного связного набора *технических объектов*, но в настоящее время уже не может считаться удовлетворительным. *Во-первых*, любой преобразующий элемент суть новая подсистема. *Во-вторых*, что понимать под связями, упорядоченностью, взаимодействием и функциональной завершённостью элементов. *В-третьих*, что такое суммарный эффект. Поэтому в современной общей математической теории систем обходят попытки дать явное определение системы, так как, с одной стороны, *система многолика*, а с другой стороны, неизвестно, что такое *несистема*.

В результате **строгое определение системы** строится косвенно на основе понятия **модели**. Изучаемая **система** считается заданной, если имеется какая-либо её предметная (материальная) или теоретическая (идеальная) модель, не обязательно математическая, т.е. формируется некоторый в широком понимании образ, заместитель. В частности, **когерентная оптическая система** задаётся, прежде всего, в рамках какой-нибудь схемной модели, обычно в виде структурной, функциональной или классической оптической схемы. При этом **процесс преобразования сигналов** в когерентной оптической системе идентифицируется как отображение множества оптических сигналов в себя в рамках выбранной модели.

## 1.2 Модельное представление оптической системы

*Моделирование*, или *метод моделей*, – это один из основных способов изучения различных систем, процессов, явлений и сигналов с помощью модели, который лежит в основе любого рода исследований технических объектов. Создание метода моделей начинается с построения обобщённой трактовки *модели* системы, процесса, явления и сигнала как заместителя, или некоторого в широком смысле *образа* (реального или воображаемого). В общем случае образ формируется с помощью специального отображения, которое часто называют морфизмом. При формировании реального изображения всегда происходят потери информации. Такой морфизм называют гомоморфизмом, а *гомоморфный образ*, часто определяемый как *модельное представление*, используется в качестве заместителя (образа, слепка и т.п.) в рамках имитирующего моделирования изучаемой системы, первичной по отношению к модели. *Гомоморфный образ* сохраняет основные операции и соотношения между изображениями входных объектов, но допускает потери информации из-за наличия ядра гомоморфизма в виде теряемых элементов прообраза.

Такая трактовка модели применяется для моделирования процесса преобразования сигналов (ППС) в когерентной оптической системе как отображения множества сигналов в себя в рамках соответствующих модельных представлений. В случае оптической системы отображение представляет собой частный случай гомоморфизма на множестве только оптических сигналов, и его называют эндоморфизмом.

Фундаментальным оптическим примером *гомоморфного (эндоморфного) образа предмета* является его изображение в когерентной оптической изображающей системе. В этом случае происходит потеря разрешения из-за конечного размера дифракционно-абберационного образа точки (функции рассеяния) в изображении предмета как образе гомоморфизма. В свою очередь, ядро гомоморфизма представляет собой совокупность предметных точек, образы которых теряются в процессе формирования изображения (рисунок 3).

От рассматриваемой трактовки следует отличать применение термина модель как *прообраза* некоторой системы, её «представителя». В этом понимании модели проявляется принцип реального воплощения эталона, и здесь первичным понятием является сама модель, выступающая в качестве стандарта, образца, шаблона и т.д.

На практике использование того или иного представления модели фактически обусловлено *целью моделирования*. Если целью является выяснение свойств какого-либо объекта, процесса, явления с помощью другого объекта, процесса, явления (его модели), то говорят о *модели-образе*. При воспроизведении свойств эталона модель понимается как *прообраз*, а модель-образ обычно выступает как конструкция более высокого уровня абстракции по сравнению с оригиналом. Если из контекста всегда ясно, о каких моделях идет речь, то для краткости слова образ и прообраз обычно опускают. При этом **модельное представление** когерентной оптической системы служит отправным постулатом *системно-модельного подхода* к описанию ППС (рисунок 1).

Одной из самых совершенных физических предметных моделей технической системы является приборная модель (прибор), на создание которой направлены все теоретические исследования инженеров-разработчиков. В частности, оптическая аппаратура в любом оптико- и лазерно-электронном приборе представляет собой физическую предметную модель оптической изображающей системы. В такой постановке задачи анализ и синтез приборной модели как модельной реализации технической системы осуществляется на основе идентификации *системно-модельных факторов*, которые задают переход к модельным заместителям и тем самым индуцируют построение модельных представлений, и прежде всего математических моделей, системы.

### **1.3 Расчётно-формульная и операторно-вычислительная математические модели оптической системы**

Точное и строгое определение математической модели (ММ) произволь-

ной оптико- и лазерно-электронной системы вводится на основе тернарной математической структуры MSt Бурбаки-Колмогорова

$$\text{MSt} = \langle\langle S_0, S_1, \dots, S_k; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_l; \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n \rangle\rangle, \quad (1)$$

где  $S_0, S_1, \dots, S_k$  – основные множества;

$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_l$  –  $m$ -арные отношения;

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$  – конечный запас отображений.

С помощью триадной MSt, содержащей

$$\langle\langle \text{основные множества } S_k; \text{отношения } \mathcal{R}_i; \text{отображения (операторы) } \mathcal{P}_n \rangle\rangle, \quad (2)$$

строятся все известные и новые структурно-поведенческие и компьютерные ММ оптико- и лазерно-электронных систем и идентифицируется их связность.

Фундаментальные обобщающие свойства тернарной математической структуры MSt проявляются в том, что операторы и формулы, (формулы также трактуются как простейшие операторы), фактически задают частные случаи MSt, в которых множества  $S_k$  и отношения  $\mathcal{R}_l$  оказываются очевидными:

а) Простейшая *РАСЧЕТНО-ФОРМУЛЬНАЯ ПП ПОВЕДЕНИЯ* (РсчтФормулнМП), в которой формула  $f(x, y)$  идентифицируется оператором

$$\text{РсчтФормулнМП} \quad \mathcal{P}_f : x, y \rightarrow f(x, y) . \quad (3)$$

В качестве простого оптического примера РсчтФормулнМП можно рассмотреть идентификацию амплитудного коэффициента пропускания транспаранта, так что

$$\mathcal{P}_{\text{тр}} : x, y \rightarrow \tau_a^{\text{тр}}(x, y) . \quad (4)$$

б) Более развитая *ОПЕРАТОРНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПП ПОВЕДЕНИЯ* (ОператВычислтМП), в которой основное внимание уделяется заданию оператора поведения  $\mathcal{P}_{\text{пвд}}$ , устанавливающего связь между входными  $S_{\text{вх}}$  и выходными  $\sigma_{\text{вых}}$  оптическими сигналами

$$\text{ОператВычислтМП} \quad \mathcal{P}_{\text{пвд}} : s_{\text{вх}}(P) \rightarrow \sigma_{\text{вых}}(Q) \quad \text{или,} \quad \sigma_{\text{вых}}(Q) = \mathcal{P}_{\text{пвд}} \{s_{\text{вх}}(P)\}. \quad (5)$$

Все оптические операторы поведения связаны с процессом формирования

изображения, при котором входной сигнал преобразуется в выходной (см. (9)).

Именно формулы и операторы, задающие поведенческие свойства ММ технической системы, стали исходными модельными представлениями, на основе которых создана современная трактовка ММ как математической структуры MSt Бурбаки-Колмогорова. Поэтому для получения простых ММ, имеющих вид  $R_{\text{счт}} \text{ФормулнМП}$  и  $\text{ОператВычислтМП}$  идентифицируют рабочие формулы и операторы, описывающие поведение технической системы, с учётом основных используемых множеств и отношений (очевидных по умолчанию).

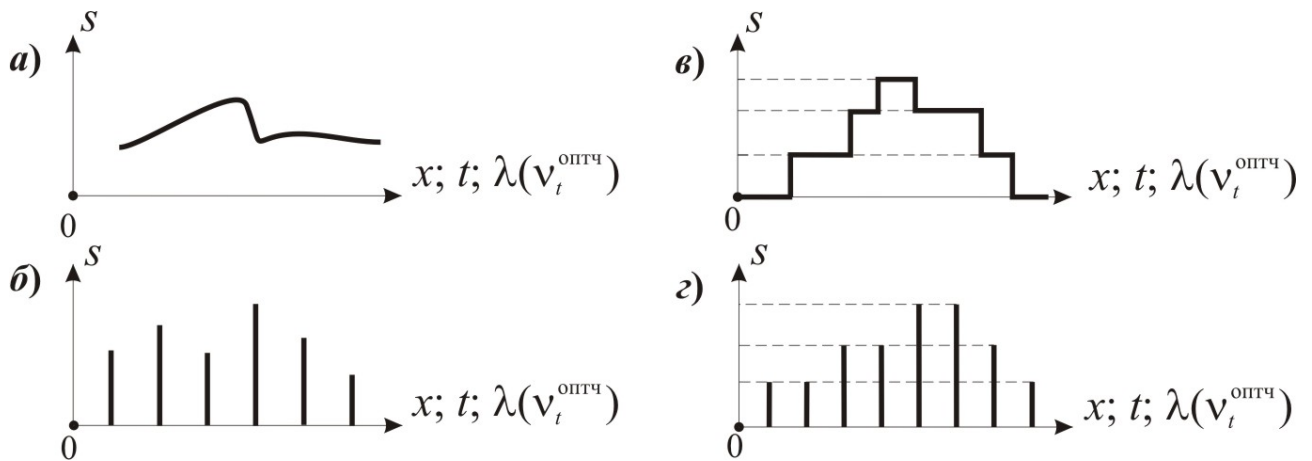
#### 1.4 Оптические сигналы

В рамках классического определения *сигнал* представляет собой *физический процесс*, несущий сообщение о каком-либо событии или состоянии технического объекта, протекающий в пространстве и во времени и охватывающий определенный спектральный диапазон, т.е. это материальная (физическая) форма представления информации для передачи по каналу. Преобразование исходного сообщения от объекта в оптический сигнал осуществляется в результате испускания, отражения и прохождения излучения. Оно может быть заложено как в самом процессе функционирования объекта, так и осуществляться в результате *модуляции* сигнала. Посредством совокупности сигналов можно с той или иной степенью полноты представить сколько угодно сложное событие или состояние объекта.

В реальной оптической системе в зависимости от *физической природы* различают: электромагнитные и, в частности, оптические, электрические, а также звуковые и другие сигналы. *Физической величиной* (основным информационным параметром сигнала), определенным образом связанной с передаваемым сообщением, определяющей характер сигнала и зависящей от пространственных координат и времени, может быть вектор  $E_{\text{элк}}$  напряженности электрического поля или вектор  $B_{\text{магн}}$  магнитной индукции в электромагнитной

волне, яркость  $L$ , светимость  $M$  или облучённость  $E$  (в общем случае интенсивность  $I$ ) в пространстве предметов и изображений, поток излучения  $\Phi$ , напряжение  $u$ , ток  $j$ , электрический заряд  $q$  или давление  $p$  в акустической волне.

При теоретическом описании ППС в системе независимо от физической природы сигнала говорят о его *математическом модельном представлении* в общем случае в виде функции  $s(P)$  в пятимерном пространстве  $\mathbb{R}^5(P)$ . В координатном представлении предметная точка  $P(x, y, z, \lambda, t)$  определяется тремя пространственными координатами  $x, y, z$ , длиной волны  $\lambda$  и моментом времени  $t$ . В частотном представлении вводят точку  $P_v(v_x, v_y, v_z, v_t^{\text{оптч}}, v_t^{\text{мдл}})$ , где  $v_x, v_y, v_z$  – координаты вектора  $\vec{v}$  пространственной частоты;  $v_t^{\text{оптч}} = c/\lambda$  – временная частота оптического излучения, или временная оптическая несущая;  $v_t^{\text{мдл}}$  – временная частота модуляции;  $c$  – скорость света в вакууме. Геометрические модели основных четырёх классов сигналов приведены на рисунке 2.



а) - аналоговый, т.е. непрерывный пространственно-временной сигнал, или  $\lambda(v_t^{\text{оптч}})$  сплошной спектр; б) - дискретный сигнал (линейчатый  $\lambda$ -спектр); в) - квантованный по уровню сигнал (полосатый  $\lambda$ -спектр); г) - дискретно-квантованный, или цифровой сигнал (идеальные продольные моды в лазере)

Рисунок 2 – Геометрические модели, идентифицирующие классы сигналов

При детальном анализе функции  $s(P)$  выделяют *дополнительные инфор-*

*мационные параметры физической величины*, изменяющиеся в соответствии с некоторой зависимостью, которая характеризует содержание передаваемого сообщения о каком-либо событии или состоянии объекта. К ним относятся амплитуда  $a$  и фаза  $\varphi$  комплексной амплитуды  $A = ae^{i\varphi}$ , временная частота  $\nu_t$ , комплексная степень когерентности  $\gamma_{12}$ , взаимная интенсивность  $J_{12}$ , вектор Джонса  $A_J$  для поляризованного излучения, длительность  $\Delta t$  сигнального импульса, ширина частотно-временного  $\Delta\nu_t$  и пространственно-частотного  $\Delta\vec{\nu}$  ( $\Delta\nu_x, \Delta\nu_y, \Delta\nu_z$ ) спектров, время задержки  $t_{зд}$  (запаздывания), единичный вектор нормали  $e$ , поляризационные параметры и т.п.

Таким образом, идентификация функции  $s(P)$  задаёт закон изменения изучаемой *оптической физической величины* в реальном физическом процессе. Этот закон отождествляется в теоретическом анализе с модельным представлением сигнала.

### Контрольные вопросы

1. Как задаётся когерентная оптическая система и как она связана с технической системой?
2. Идентифицируйте три основных вида математической модели поведения?
3. Дайте классическое определение сигнала и опишите четыре основных класса сигналов?

## 2 Когерентная оптическая система

### 2.1 Когерентные свойства излучения

При анализе поведения оптической системы прежде всего вводится предположение о строгой монохроматичности используемого излучения. Монохроматические волны, по определению, имеют бесконечную продолжительность во времени. Это очень жесткое ограничение, так как в лучшем случае излучение реальных источников, включая лазеры, является только *квазимонохроматическим*, т. е. состоящим из спектральных компонент, которые занимают частотный диапазон  $\Delta\nu_t$ , малый по сравнению со средней временной частотой  $\bar{\nu}_t$ . Монохроматичность излучения определяет его *временную* или *продольную когерентность* (согласованность). При этом излучение считается когерентным во времени, если разность фаз в фиксированной точке  $P$  не меняется с течением времени, так что  $\varphi_2(P, t_2) - \varphi_1(P, t_1) = \text{const}$ . В этом случае распределение интенсивности в интерференционном поле (*интерференционная структура*) равно интенсивности суммарной волны с учетом фазовых соотношений в интерферирующих волнах. *Степень временной когерентности* определяется путем измерения времени или длины когерентности по *видности* (контрасту) интерференционной структуры в интерферометрах с делением по амплитуде, когда весь волновой фронт участвует в формировании каждой из интерферирующих волн.

Точечный монохроматический источник в интерферометрах с делением по волновому фронту, в которых интерферирующие волны образуются из разных участков исходного фронта, формирует интерференционную структуру с видностью, равной единице. В случае источника конечных размеров, состоящего из независимых точечных монохроматических источников, интерференционная структура имеет меньшую видность, которая характеризует *степень пространственной* или *поперечной когерентности* излучения. При этом излучение считается *пространственно-когерентным*, если разность фаз в любых двух точках  $P_1$  и  $P_2$  не меняется с течением времени, так что  $\varphi_2(P_2, t) - \varphi_1(P_1, t) =$

const. К пространственно-когерентному излучению близко излучение одно-  
модовых лазеров.

В общем случае излучение называют *абсолютно когерентным*, если раз-  
ность фаз в любых точках  $P_1$  и  $P_2$  остается постоянной в любые моменты вре-  
мени  $t_1$  и  $t_2$ , так что  $\varphi_2(P_2, t_2) - \varphi_1(P_1, t_1) = \text{const}$ .

Примером абсолютно когерентных оптических сигналов являются идеа-  
лизированные плоские и сферические монохроматические волны. Абсолютно  
когерентного излучения в природе не существует, но к этому пределу (видность  
интерференционной структуры очень близка к единице) можно подойти в слу-  
чае одночастотной генерации в лазере. Хотя без специальных излучателей этот  
случай представляется лишь идеализацией, но результаты, которые получаются  
на основании идеализированного представления об абсолютной когерентности,  
могут быть с достаточной степенью точности использованы на практике.

При анализе ППС в оптической системе, прежде всего, выделяют систему  
с *когерентным поведением*. Такая система, работающая при абсолютно коге-  
рентном освещении и линейная относительно комплексной амплитуды поля,  
называется *когерентной оптической системой* (КгрОС). Одной из основных  
внешних характеристик КгрОС является линейная связность интерференцион-  
ного поля  $A_{\text{инц}}$ , так что

$$A_{\text{инц}} = A_1 + A_2 = a_1 \exp(i\varphi_1) + a_2 \exp(i\varphi_2). \quad (6)$$

При регистрации поля в КгрОС интенсивность  $I_{\text{КгрОС}}$  в плоскости наблюдения  
равна квадрату модуля суммарной амплитуды и в случае двух волн имеет вид

$$\begin{aligned} I_{\text{КгрОС}}(Q) &= |A_1(Q) + A_2(Q)|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= I_1(Q) + I_2(Q) + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где последнее слагаемое представляет собой интерференционный член, зави-  
сящий от разности фаз. Если в плоскости наблюдения складываются  $N$  коге-  
рентных волн, то для суммарной амплитуды и интенсивности получим

$$A_{\text{инц}}(Q) = \sum_{n=1}^N A_n(Q), \quad I_{\text{КгрОС}}(Q) = \left| \sum_{n=1}^N A_n(Q) \right|^2. \quad (8)$$

В общем случае для непрерывного распределения комплексной амплитуды сумма превращается в интеграл суперпозиции.

## 2.2 Координатное описание базисных типовых сигналов

Из геометрической оптики известно, что оптическая система (ОС) при определенном положении предметной плоскости  $xu$  формирует в сопряженной плоскости  $x'y'$  действительное геометрооптическое изображение  $\sigma(Q) = A'(x', y')$  объекта  $s(P) = A(x, y)$  (рисунок 1). При наличии мнимого изображения в оптическую систему включают также глаз наблюдателя. В общем случае в произвольной плоскости наблюдения  $x_{\text{нбл}} y_{\text{нбл}}$  формируется обобщённое дифракционное изображение в виде  $\sigma(Q_{\text{нбл}}) = A'(x_{\text{нбл}}, y_{\text{нбл}})$ . Идентификация поведения оптической изображающей системы осуществляется с помощью формально заданного оператора  $\mathcal{P}_{\text{ОС}}$ , определяющего преобразование множества  $\mathcal{S} = \{s(P)\}$  входных оптических сигналов во множество  $\Sigma = \{\sigma(Q)\}$  выходных (преобразованных) оптических сигналов в рамках операторно-вычислительной модели поведения (МП), так что

$$\sigma(Q) = A'(x', y') = \mathcal{P}_{\text{ОС}} \{s(P) = A(x, y)\}. \quad (9)$$

Само же построение операторно-вычислительной МП процесса формирования изображения в когерентной оптической системе (КОС) сводится к идентификации явного вида оператора поведения  $\mathcal{P}_{\text{ОС}}$  с учётом МП структурных преобразующих элементов (ПЭ) и классов входных и выходных оптических сигналов. С этой целью выделяют три основных ПЭ: два слоя пространства (СП) и объектив (рисунок 3).

**Слой пространства предметов (СПП)** толщиной  $a$ , или **слой пространства входных сигналов**, представляет собой область пространства между объектом излучения и входным зрачком объектива, в которой формируются входные оптические сигналы. **Слой пространства изображений (СПИ)** толщиной  $a'$ , или **слой пространства преобразованных сигналов**, представляет

собой область пространства между выходным зрачком объектива и плоскостью наблюдения, в которой формируются выходные сигналы. Свойства слоёв пространства определяются их толщинами и свойствами среды распространения. При описании процесса формирования изображения в КОС поведение когерентного СП рассматривается в рамках скалярной теории дифракции в приближении дифракции Френеля, т.е. в приближении *френелевского СП (Фр-СП)*.

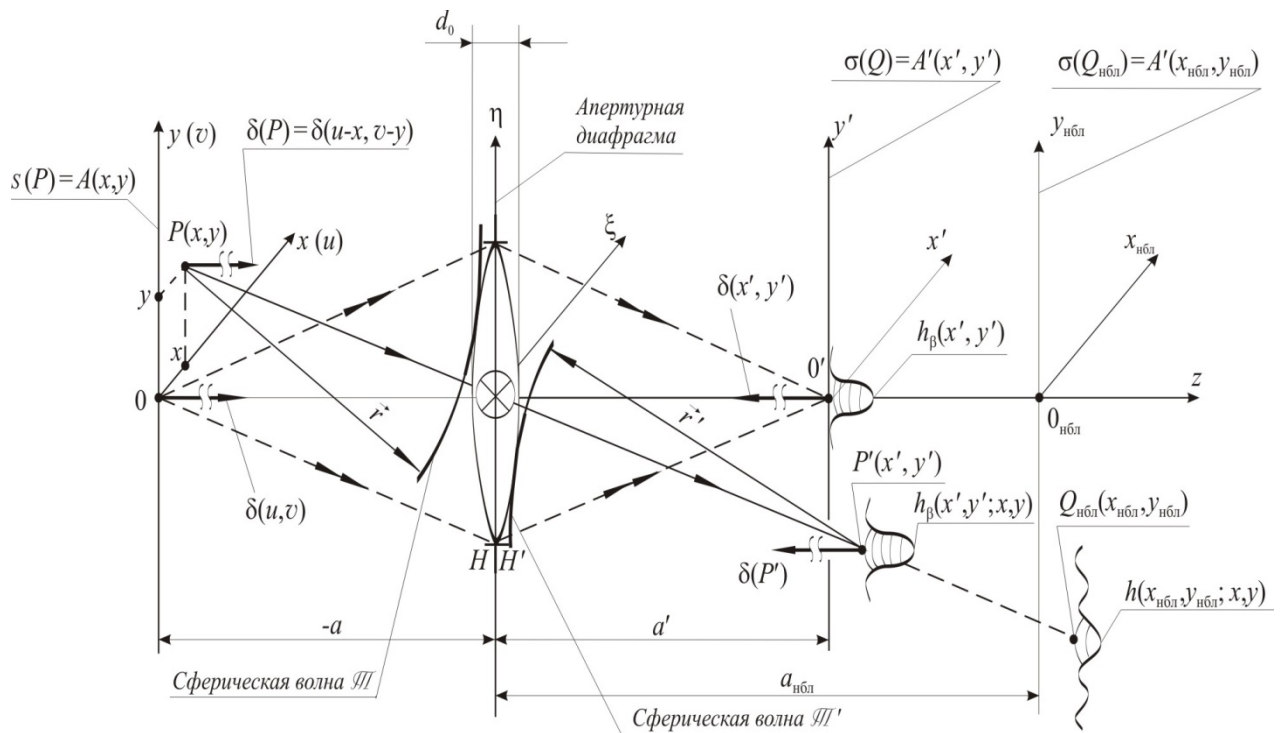


Рисунок 3 – Функциональная оптическая схема, идентифицирующая процесс формирования изображения в когерентной дифракционно ограниченной оптической системе

**Объектив (Обв),** или *оптическая система в узком смысле*, состоит в общем случае из совокупности зеркально-линзовых, призмных, волоконно-оптических, голограммных и других преобразующих элементов. Он играет основную роль при формировании выходного (преобразованного) оптического сигнала в плоскости изображения и идентифицируется в транспарантном приближении с помощью преобразующего оператора  $\mathcal{P}_{\text{обв}}^{\text{тр}}$ .

Такую систему (рисунок 3), состоящую из *слоя пространства предметов* (СПП) толщиной  $a$ , *объектива* (Обв) и *слоя пространства изображений* (СПИ) толщиной  $a'$ , которая работает при когерентном освещении и формирует в сопряженной плоскости  $x'y'$  изображение объекта, находящегося в предметной плоскости  $xу$ , называют когерентной оптической изображающей системой (КгрОИЗС). Тогда в приближении френелевских слоёв пространства и в транспарантном приближении объектива оператор поведения КгрОИЗС  $\mathcal{P}_{\text{КОС}}$  представляет собой композицию трёх формально заданных операторов:

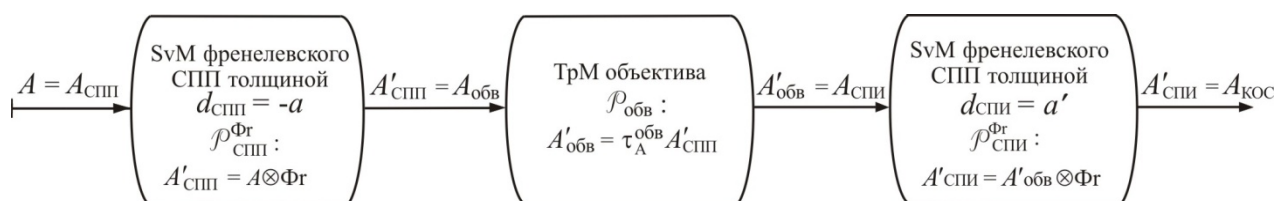
$$\mathcal{P}_{\text{КОС}} = \mathcal{P}_{\text{СПИ}}^{\text{Фр}} \mathcal{P}_{\text{Обв}}^{\text{тр}} \mathcal{P}_{\text{СПП}}^{\text{Фр}}, \quad (10)$$

где  $\mathcal{P}_{\text{Обв}}^{\text{тр}}$  – оператор поведения объектива в рамках транспарантной (тр) модели, а  $\mathcal{P}_{\text{СПИ}}^{\text{Фр}}$  и  $\mathcal{P}_{\text{СПП}}^{\text{Фр}}$  – дифракционные свёрточные операторы френелевского СП.

Каждый дифракционный оператор идентифицирует свёрточную операторно-вычислительную МП, описывающей взаимную свёртку сигнала на входе СП с двумерной функцией Френеля

$$\text{Фр}(x', y'; z) = [\exp(ikz)/i\lambda z] \exp[i(\pi/\lambda z)(x'^2 + y'^2)] = h_{\text{Фр}}(x', y'; z), \quad (11)$$

которая называется френелевской когерентной функцией рассеяния СП. С оптико-физической точки зрения функция Френеля задаёт дифракционный образ точечного источника (см. (35)) в виде сферической расходящейся волны на выходе соответствующего френелевского СП толщиной  $z$ . Структурно-функциональная схема, идентифицирующая поведение КгрОИЗС в рамках скалярной теории дифракции, приведена на рисунке 4.



СПП, СПИ – слои пространства предметов и изображений;

ТрМ – транспарантная и SvM – свёрточная модели; Фр – функция Френеля, описывающая сферическую расходящуюся волну на выходе френелевского СП

Рисунок 4 – Структурно-функциональная схема когерентной оптической системы

Из опыта известно, что КгрОИЗС линейна относительно амплитуды поля, или в общем случае относительно комплексной амплитуды  $A(P)$ . Поведение линейной КгрОИЗС (ЛКОИЗС) описывается линейным оператором  $\mathcal{P}_{\text{ЛКОС}}$  (см. (34)), который линейную комбинацию входных оптических сигналов переводит в линейную комбинацию выходных оптических сигналов. Иначе говоря, в линейной системе результат воздействия линейной комбинации входных сигналов носит аддитивный характер. Поэтому основное преимущество линейных систем состоит в том, что их реакцию (отклик) на какой-либо сложный сигнал можно выразить через отклики на некоторые «элементарные» типовые входные сигналы, каждый из которых вызывает отклик известного вида.

Для описания линейной комбинации входных и выходных сигналов используются **базисные типовые (специфические)** сигналы. Сигнал считается **типовым**, если его *пространственно-временная симметрия согласована (совпадает) с симметрией ПЭ*, т. е. операторы симметрии для типового сигнала и ПЭ одинаковы. При этом оператор называется оператором симметрии, если после его применения объект остаётся неизменным. Основными **базисными типовыми** сигналами при формировании изображения в КОИЗС (рисунок 3) являются  $\delta$ -образные точечные источники, сферические и плоские волны.

### 2.2.1 $\delta$ -образные базисные точечные источники

На практике большинство оптических систем обладает осевой симметрией, обусловленной *осевой симметрией* зеркально-линзовых оптических ПЭ, а также *изотропностью* и *однородностью* слоёв пространства. Поэтому элементарным объектом излучения с осевой симметрией является точечный источник, аналитически описываемый функцией  $\delta(P) = \delta(x, y)$ , осевая симметрия которой согласована с осевой симметрией произвольной ОС (рисунки П.15 – П.17).

При анализе процесса формирования изображения в ОС естественным оптико-физическим представлением входного сигнала является совокупность точечных источников. Так как оптические сигналы в предметной плоскости

двумерны, то двумерный входной сигнал удобно представить в виде непрерывной суммы точечных источников. Тогда на основании фильтрующего свойства  $\delta$ -функции входной сигнал  $A(x, y)$  можно представить в виде непрерывной свёрточной (sv) линейной комбинации смещённых точечных источников:

$$A(x, y) = \mathcal{P}_{sv}(A) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(u, v) \delta(x-u, y-v) du dv = A \otimes \delta(x, y), \quad (12)$$

где  $u, v$  – переменные интегрирования в предметной плоскости  $x, y$ ; комплексная амплитуда поля  $A(u, v)$  служит амплитудным коэффициентом, с которым суммируются  $\delta$ -источники. При этом входящие в (12) физические величины имеют следующие размерности:  $A(x, y) [B/m]$ ;  $\delta(x, y) [m^{-2}]$ .

В силу центральной симметрии  $\delta$ -функции с оптико-физической точки зрения (12) можно рассматривать как непрерывную двумерную сумму точечных источников  $\delta(u-x, v-y)$  с амплитудой  $A(u, v)$ , локализованных в фиксированных точках  $(x, y)$  предметной плоскости  $uv$  (рисунок 3). Так как выражение (12) справедливо для любого оптического сигнала  $A(x, y)$ , то континуальный набор смещённых  $\delta$ -функций образует базис  $\{\delta(u-x, v-y) | \forall x, y\}$  в пространствах входных  $\mathbb{S} = \{s(P)\}$  и выходных  $\mathbb{\Sigma} = \{\sigma(Q)\}$  оптических сигналов, а сами  $\delta$ -функции называют **базисными типовыми  $\delta$ -сигналами в координатном представлении**.

### 2.2.2 Однородные сферические волны

Каждый точечный источник  $\delta(P)$  предметной плоскости формирует расходящуюся сферическую волну, и, наоборот, каждая точка  $\delta(P')$  идеального геометрооптического изображения получается с помощью сходящейся сферической волны (рисунок 3). Поэтому в *изотропном* и *однородном* СП **базисные типовые сигналы** принимают вид *осесимметричных* однородных расходящихся (рсах) и сходящихся (сх) сферических волн с комплексными амплитудами

$$A_{\text{рсх}}(Q) = (a/r) \exp(ikr) = (a/r) \exp(i2\pi vr), \quad (13)$$

$$A_{\text{сх}}(Q) = A_{\text{рсх}}^*(Q) = (a/r) \exp(-ikr) = (a/r) \exp(-i2\pi vr), \quad (14)$$

где  $a/r$  – амплитуда;  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  – длина радиус-вектора точки наблюдения  $Q$ ;

$k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;

$\lambda$  – длина волны в вакууме;

$v = 1/\lambda$  – пространственная частота сферической волны. Разложение произвольной комплексной амплитуды поля по этим волнам задается линейным оператором слоя пространства в виде двумерной непрерывной суммы сферических волн.

### 2.2.3 Базисные пространственно-частотные гармоники

Высококорректированные оптические системы (ОС) с малым угловым полем формируют изображение одинакового качества в пределах всего линейного поля. Они обладают *симметрией сдвига*, когда смещение объекта излучения приводит к соответствующему смещению изображения без изменения его качества. Симметрия сдвига ОС обусловлена не только высокой степенью коррекции объектива, но также *изотропностью* и *однородностью* СП. Она присуща периодическим излучающим объектам и идентифицируется с разложением таких сигналов в тригонометрический ряд Фурье. Поэтому элементарным объектом излучения, обладающим симметрией сдвига, является гармоническая пространственно-частотная решётка – транспарант (рисунки П.12 – П.14).

Для представления непериодических сигналов в виде непрерывной линейной комбинации гармоник используется вещественный интеграл Фурье. Тогда одним из *основных типовых сигналов* являются также косинусоидальная  $\cos 2\pi v_{x_0} x$  или синусоидальная  $\sin 2\pi v_{x_0} x$  гармоники, где  $v_{x_0}$  – пространственная частота оптического периодического объекта. Гармоники задают пространственно-частотные свойства периодического объекта, симметрия сдвига кото-

рого на период  $T_{x_0} = 1/v_{x_0}$  согласована с симметрией сдвига ОИЗС.

В силу практической универсальности разложения сигнала в дискретную или непрерывную сумму гармоник с определенной амплитудой и фазой соответствующий набор гармоник образует базис в пространстве сигналов. Поэтому сами гармоники  $\cos 2\pi v_{x_0} x$  и  $\sin 2\pi v_{x_0} x$  называют **базисными типовыми сигналами** в пространственно-частотном представлении (базисными пространственно-частотными гармониками).

### 2.2.4 Однородные плоские волны

При освещении каждой двумерной гармонической решётки плоской нормально падающей волной на её выходе в *изотропном* и *однородном* СП формируются две плоские волны, дифрагирующие симметрично относительно оптической оси. Верно и обратное, две плоские волны, симметрично падающие на плоскость наблюдения, образуют косинусоидальное или синусоидальное распределение амплитуды, так что на основании формул Эйлера имеем

$$\cos(2\pi v_{x_0} x) = [\exp(i2\pi v_{x_0} x) + \exp(-i2\pi v_{x_0} x)]/2, \quad (15)$$

$$\sin(2\pi v_{x_0} x) = [\exp(i2\pi v_{x_0} x) - \exp(-i2\pi v_{x_0} x)]/(2i), \quad (16)$$

где  $\exp(\pm i2\pi v_{x_0} x)$  – комплексные амплитуды плоских волн в плоскости  $x y$ , которые распространяются в плоскости  $x z$  в направлении вектора пространственной частоты  $\vec{v}_0 = (\pm v_{x_0}, 0, v_{z_0})$  соответственно.

Таким образом, в СП **пространственно-частотные базисные типовые сигналы** в пространственно-частотном представлении принимают вид плоских волн. При этом разложение комплексной амплитуды одномерного периодического оптического сигнала  $A(x)$  по плоским волнам  $\exp(i2\pi v_{x_k} x)$  с амплитудами  $c_k$  задается в виде комплексного ряда Фурье

$$A(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(i2\pi v_{x_k} x) \quad (17)$$

или обратного преобразования Фурье  $\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{A}(v_x)\}$  для непрерывного сигнала

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(v_x) \exp(i2\pi x v_x) dv_x = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{A}(v_x)\}. \quad (18)$$

$$\text{где} \quad \tilde{A}(v_x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \exp(-i2\pi v_x x) dx = \mathcal{F}\{A(x)\} \quad (19)$$

суть *прямое преобразование Фурье*  $\mathcal{F}\{A(x)\}$ , или *фурье-образ* функции  $A(x)$ , который также называют "*A с тильдой*". Функция  $\tilde{A}(v_x) = |\tilde{A}(v_x)| \exp[i\varphi_s(v_x)]$  суть *непрерывный комплексный пространственно-частотный спектр (ПЧС)*, или *комплексная спектральная плотность*, которую графически изображают в виде *спектральной плотности амплитуд*  $a_s(v_x) = |\tilde{A}(v_x)|$  и *спектральной плотности фаз*  $\varphi_s(v_x) = \arg \tilde{A}(v_x)$  для  $-\infty < v_x < \infty$ .

### 2.3 Иерархия транспарантных операторно-вычислительных моделей поведения линейной когерентной оптической изображающей системы

Объектив, используемый на практике, имеет ограниченный световой диаметр, обладает аберрациями и, как правило, состоит из нескольких положительных и отрицательных линз, а также других ПЭ, причем сами линзы не являются тонкими. Его поведение описывают в рамках транспарантной операторно-вычислительной модели (5) на языке геометрической оптики с помощью различных вариаций *комплексного амплитудного коэффициента пропускания*

$$\tau_A^{\text{обв}}(\xi, \eta) = \tau_a^{\text{обв}} \tau_\varphi^{\text{обв}}. \quad (20)$$

На этом пути формируются различные модельные представления *оптической системы*, связанные с усложнением транспарантной модели объектива при последовательном переходе от *идеальной системы* к *реальной оптической системе*. В результате при описании процесса формирования изображения для идентификации поведения линейной КОИЗС выделяют пять основных приближённых иерархических транспарантных моделей объектива.

### 2.3.1 Идеальная оптическая система

В рамках геометрической оптики, прежде всего, говорят об *идеальной оптической системе (ИОС)*, которая не нарушает гомоцентричности проходящих через неё пучков света. Предполагается, что в системе отсутствуют аберрации и не учитывается дифракционное рассеяние, так что ИОС описывает процесс формирования предельного частного случая изображения в виде идеальной геометрооптической копии (Гмо-копии). На рисунке 3 приведены идеальные  $\delta$ -копии входных  $\delta$ -образных точечных источников, так что с учётом (5) операторно-вычислительная МП ИОС имеет вид

$$\delta(Q) = \mathcal{P}_{\text{ИОС}} \{ \delta(P) \}. \quad (21)$$

Иначе говоря, сферическая волна, выходящая из точки  $P$ , после объектива превращается в сферическую волну, сходящуюся в точке  $Q$ , т.е. отсутствуют апертурные ограничения ( $\tau_a^{\text{ИОС}} \equiv 1$ ;  $\tau_A^{\text{ИОС}} = \tau_\phi^{\text{обв}}$ ).

В результате, полагая длину волны  $\lambda \rightarrow 0$ , в рамках параксиальной геометрической оптики выделяют ИОС, состоящую из СПП, реального объектива, работающего в бесконечно малой области вблизи оптической оси (параксиальной области), и СПИ. Этот частный случай ИОС с тонким однолинзовым анаберрационным (идеальным) объективом рассматривается в качестве первого исходного приближённого транспарантного операторно-вычислительного модельного представления объектива, так что

$$A_{\text{зр}}^{\text{сх}}(\xi, \eta) = \mathcal{P}_{\text{обв}}^{\text{ИОС}} \{ A_{\text{зр}}^{\text{рсх}}(\xi, \eta) \} = \tau_A^{\text{ИОС}}(\xi, \eta) A_{\text{зр}}^{\text{рсх}}(\xi, \eta) = \tau_\phi^{\text{обв}} A_{\text{зр}}^{\text{рсх}}(\xi, \eta). \quad (22)$$

### 2.3.2 Дифракционно ограниченная оптическая система

В рамках второго приближённого транспарантного модельного представления идентификация оптической системы с реальным объективом сводится к формальной замене некоторой сложной совокупности линз и зеркал конечной *толщины (корпуленции)* «элементарным» ПЭ с сосредоточенными пара-

метрами в виде тонкого однолинзового объектива. Однолинзовый объектив считается тонким, если луч, падающий на первую поверхность в точке  $M(\xi, \eta)$ , пересекает вторую поверхность в точке  $M'(\xi', \eta')$  приблизительно с такими же координатами ( $\xi' \approx \xi, \eta' \approx \eta$ ). При этом смещением луча внутри тонкого объектива можно пренебречь, а линейное увеличение в зрачках  $\beta_{зр} \cong 1$ . С позиций геометрической оптики это означает, что главные плоскости  $H$  и  $H'$  совпадают. Кроме того, плоскости входного  $\xi\eta$  и выходного  $\xi'\eta'$  зрачков совпадают с плоскостью апертурной диафрагмы и лежат в общей главной плоскости. Такой тонкий однолинзовый объектив идентифицируют как транспарант и задают его поведение с помощью *комплексного амплитудного коэффициента пропускания* (20), который учитывает амплитудную и фазовую модуляцию.

С одной стороны, любой реализуемый объектив является апертурно ограниченным. Он осуществляет амплитудную модуляцию, пропуская только часть волнового фронта, и тем самым вносит дифракционные искажения. Влияние дифракции на апертуре объектива в транспарантном представлении учитывается с помощью модуля  $\tau_a^{обв}$  комплексного амплитудного коэффициента пропускания. Область, где  $\tau_a^{обв} \neq 0$ , определяется конечными размерами зрачка и без учёта поглощения в стекле совпадает с *функцией зрачка*  $P_{зр}(\xi, \eta)$ , так что

$$\tau_a^{обв}(\xi, \eta) = P_{зр}(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & (\xi, \eta) \in D_{зр}, \\ 0 & (\xi, \eta) \notin D_{зр}, \end{cases} \quad (23)$$

где  $D_{зр}$  — область, задающая форму зрачка. В случае прямоугольного зрачка со сторонами  $2\xi_{зр} \times 2\eta_{зр}$  *типовая функция зрачка* имеет вид (рисунки П.1 – П.3)

$$\tau_a^{\square}(\xi, \eta) = P_{зр}^{\square}(\xi, \eta) = \text{rect}(\xi/2\xi_{зр}, \eta/2\eta_{зр}) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leq \xi_{зр}, |\eta| \leq \eta_{зр}, \\ 0 & \text{в ост. сл.} \end{cases} \quad (24)$$

Для осесимметричного сферического объектива функция зрачка, обладающая осевой симметрией, является *типовым сигналом* и имеет вид (рисунок П.4)

$$\tau_a^{\circ}(\rho) = P_{зр}^{\circ}(\rho) = \text{circ}(\rho/\rho_{зр}) = \begin{cases} 1 & \rho \leq \rho_{зр}, \\ 0 & \text{в ост. сл.} \end{cases} \quad (25)$$

где  $\rho_{зр} = (\xi_{зр}^2 + \eta_{зр}^2)^{1/2}$  — радиус зрачка.

С другой стороны, объектив осуществляет фазовую модуляцию, внося фазовый сдвиг  $\varphi_{обв}(\xi, \eta)$ , определяющий его фокусирующие свойства и пропорциональный оптической толщине в каждой точке. Фазомодулирующие свойства объектива задаются с помощью фазового коэффициента пропускания  $\tau_{\varphi}^{обв}$ , который в параксиальном приближении имеет вид

$$\tau_{\varphi}^{обв}(\xi, \eta) = \exp[-i(\pi / \lambda f')(\xi^2 + \eta^2)]. \quad (26)$$

В зависимости от знака фокусного расстояния  $f'$  (положительная или отрицательная линза) фазовый сдвиг  $\varphi_{обв}(\xi, \eta)$ , вносимый объективом, будет соответственно отрицательным или положительным. Тогда комплексный амплитудный коэффициент пропускания тонкого однолинзового объектива (20), учитывающий апертурно дифракционные искажения, имеет вид

$$\tau_A^{ДОС}(\xi, \eta) = \tau_a^{обв}(\xi, \eta) \tau_{\varphi}^{обв}(\xi, \eta) = P_{зр}(\xi, \eta) \exp[-i(\pi / \lambda f')(\xi^2 + \eta^2)]. \quad (27)$$

Таким образом, в рамках второго приближённого модельного представления говорят о *дифракционно ограниченной оптической системе (ДОС)*. Иначе говоря, КгрОИЗС в приближении ДОС состоит из двух СП и тонкого однолинзового анаберрационного апертурно ограниченного объектива, осуществляющего фазовую модуляцию падающей волны и вносящего только дифракционные искажения из-за ограниченной апертуры. Дифракция на ограниченной апертуре объектива, работающего с увеличением  $\beta$ , приводит к размытию идеального геометрооптического изображения точки (рисунок 3). При этом дифракционный образ точки называется когерентной функцией рассеяния (КФР  $h_{\beta}$ ). Соответствующая транспарантная операторно-вычислительная МП объектива в приближении ДОС на основании (5) примет вид

$$A'_{зр}(\xi, \eta) = \mathcal{P}_{обв}^{ДОС} \{A_{зр}(\xi, \eta)\} = \tau_A^{ДОС}(\xi, \eta) A_{зр}(\xi, \eta). \quad (28)$$

### 2.3.3 Корпулентная дифракционно ограниченная оптическая система

В рамках третьего приближённого транспарантного модельного представления системы учитывается только *конечная толщина (корпуленция)* реального объектива, который в общем случае состоит из нескольких линз конечной толщины. У такого объектива главные плоскости, входной и выходной зрачки не совпадают (рисунок 5), а под функцией зрачка в (23) – (25) подразумевается функция  $P_{зр}(\xi', \eta')$  выходного зрачка, отличная от нуля в области  $D'_{зр}$ . Иначе говоря, корпулентное обобщение ДОС сводится к учёту влияния конечной толщины реализуемого объектива, которое идентифицируется в результате введения *входного и выходного зрачков*. Они представляют собой отверстия конечных размеров и являются изображениями апертурной диафрагмы в обратном и прямом ходе соответственно. Через входной зрачок волна  $A_{зр}(\xi, \eta) = A(\xi, \eta; -p)$  входит в объектив конечной толщины, называемый *корпулентным объективом*. Далее волна проходит через оптические преобразующие элементы и попадает в выходной зрачок. Последний является геометрическим изображением входного зрачка и определяет волновой фронт  $A'_{зр}(\xi', \eta') = A(\xi', \eta'; -p + \Delta p)$  на выходе корпулентного объектива.

Если корпулентный объектив рассчитан таким образом, что оптический путь для каждого луча, который выходит из точки  $P$  (рисунок 5) и приходит в сопряжённую точку  $P'$ , остается одинаковым, то волна в выходном зрачке представляет собой сферу радиуса  $r'$  с центром в точке  $P'$  (идеальный волновой фронт). При этом распространение оптического излучения от плоскости входного зрачка до плоскости выходного зрачка анаберрационного корпулентного объектива достаточно точно описывается с помощью формул параксиальной геометрической оптики. Дифракция учитывается только на участках от плоскости объекта до входного зрачка (СПП) или от выходного зрачка до плоскости изображения (СПИ).

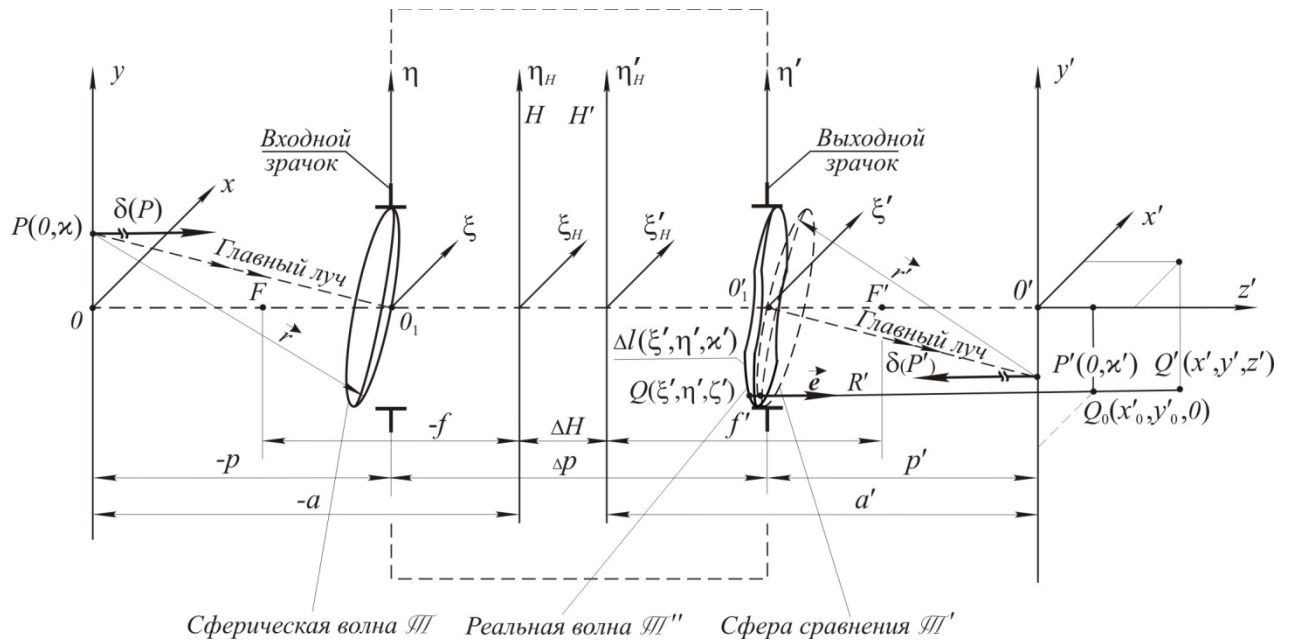


Рисунок 5 – Формирование изображения в реальной оптической системе

Так как апертурные дифракционные ограничения корпулентного объектива можно отнести к любому из зрачков, то в дальнейшем для определенности влияние дифракционных эффектов учитывается с помощью функции выходного зрачка. Такая оптическая система с анаберрационным апертурно ограниченным корпулентным объективом называется *корпулентной ДОС*. При введении нормированных безразмерных координат на выходном зрачке

$$\xi_N = \xi' / \xi'_{зр}, \quad \eta_N = \eta' / \eta'_{зр}, \quad \rho_N = \rho' / \rho'_{зр}, \quad (29)$$

где  $2\xi'_{зр}$ ,  $2\eta'_{зр}$  – стороны прямоугольного зрачка;

$\rho'_{зр}$  – радиус круглого зрачка,

операторно-вычислительные транспарантные модели поведения объектива в приближении ДОС и корпулентной ДОС совпадают.

### 2.3.4 Аберрационная дифракционно ограниченная система

В рамках четвертого приближённого транспарантного модельного пред-

ставления системы учитываются абберационные искажения тонкого однолинзового объектива. На выходе реального объектива (рисунок 5) фронт реальной волны даже от точечного источника  $\delta(P)$  отличается от сферической формы на волновую абберацию  $\Delta l(\xi, \eta; x, y)$ . Такую оптическую систему с абберационным апертурно ограниченным объективом называют *абберационной ДОС (АДОС)*. Для неё *комплексный амплитудный коэффициент пропускания тонкого однолинзового объектива* (20), учитывающий дифракционные и абберационные искажения, включает в себя абберационную функцию зрачка  $P_{аб}(\xi, \eta)$ :

$$\tau_A^{аб}(\xi, \eta | \Delta l) = \tau_a^{аб}(\xi, \eta) \tau_\phi^{обв}(\xi, \eta) = P_{аб}(\xi, \eta) \tau_\phi^{обв}(\xi, \eta), \quad (30)$$

где  $P_{аб}(\xi, \eta) = P_{зр}(\xi, \eta) \exp [ik\Delta l(\xi, \eta; x, y)] = P_{зр}(\xi, \eta) \exp [\varphi_{зр}(\xi, \eta)]$ . (31)

Соответствующая транспарантная операторно-вычислительная модель поведения объектива в приближении АДОС на основании (5) примет вид

$$A'_{зр}(\xi, \eta) = \mathcal{P}_{обв}^{АДОС} \{A_{зр}(\xi, \eta)\} = \tau_A^{аб}(\xi, \eta) A_{зр}(\xi, \eta). \quad (32)$$

### 2.3.5 Реальная оптическая система

В рамках пятого приближённого транспарантного модельного представления системы учитываются абберационные искажения и *конечная толщина (корпуленция)* реального объектива. Такую оптическую систему называют *реальной (рлн) оптической системой (РОС)*, или *корпулентной АДОС*. Для транспарантной операторно-вычислительной модели поведения объектива в приближении РОС используется коэффициент пропускания реального объектива:

$$A'_{зр}(\xi', \eta') = \mathcal{P}_{обв}^{рлн} \{A_{зр}(\xi, \eta)\} = \tau_{обв}^{рлн}(\xi', \eta') A_{зр}(\xi', \eta'). \quad (33)$$

Так как ход лучей от входного до выходного зрачка хорошо описывается с помощью формул геометрической оптики, то влияние конечной толщины реального объектива оказывается несущественным. Более того, по аналогии с поведением ДОС и *корпулентной ДОС* при введении нормированных координат (29) на выходном зрачке операторно-вычислительные транспарантные модели поведения объектива в приближении АДОС и РОС совпадают (см. 3.2.3).

В результате можно выделить три существенно различные по коэффициенту пропускания объектива линейные когерентные оптические изображающие системы: идеальную оптическую систему (ИОС); дифракционно ограниченную оптическую систему (ДОС); абберационную дифракционно ограниченную оптическую систему (АДОС). Проанализируем поведение дифракционно ограниченной оптической системы.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое временная, пространственная и абсолютная когерентность?
2. Опишите основные базисные типовые сигналы?
3. Что такое функция зрачка?
4. Чем отличаются дифракционно ограниченная и корпулентная оптическая система от идеальной оптической системы?
5. Какими особенностями обладают абберационная дифракционно ограниченная оптическая система и реальная оптическая система?

## 3 Инвариантное поведение линейной когерентной оптической изображающей системы

### 3.1 Пространственно-координатное описание процесса формирования изображения

#### 3.1.1 Линейная когерентная оптическая изображающая система

При описании процесса формирования изображения в линейной когерентной оптической системе (ЛКОС) входной двумерный оптический сигнал  $A(x, y)$  представляют в виде непрерывной суммы точечных источников. Применяя принцип линейности к непрерывной линейной комбинации входных базисных типовых  $\delta$ -сигналов в виде (12), получим выражение на выходе ЛКОС для сигнала  $A'(x', y')$ , рассматриваемого в плоскости изображения  $x'y'$  (рисунок 3). Получение изображения описывается с помощью линейного оператора поведения  $\mathcal{P}_{\text{ЛКОС}}$  в виде *интеграла суперпозиции*, который отражает тот факт, что ЛКОС является пространственной линейной системой, а оптические сигналы двумерны, так что

$$\begin{aligned} A'(x', y') &= \mathcal{P}_{\text{ЛКОС}} \{A(x, y)\} = \mathcal{P}_{\text{ЛКОС}} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} A(u, v) \delta(x-u, y-v) du dv \right\} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} A(u, v) \mathcal{P}_{\text{ЛКОС}} \{ \delta(x-u, y-v) \} du dv . \end{aligned} \quad (34)$$

где  $u, v$  – переменные интегрирования в предметной плоскости  $x y$ . При этом оператор  $\mathcal{P}_{\text{ЛКОС}}$ , устанавливающий связь между входными  $A(x, y)$  и выходными  $A'(x', y')$  оптическими сигналами, идентифицирует с учётом (5) операторно-вычислительную модель поведения ЛКОС.

Обозначим *пространственный отклик ЛКОС*, работающей с линейным увеличением  $\beta = x'/x = y'/y$ , на входной базисный типовой  $\delta$ -сигнал в виде

$$h_{\beta}(x', y'; x, y) = \mathcal{P}_{\text{ЛКОС}} \{ \delta(u-x, v-y) \}. \quad (35)$$

В приближении ДОС отклик представляет собой дифракционный образ точечного источника  $\delta(u-x, v-y)$ , локализованного в точке  $(x, y)$  предметной плоскости  $uv$  (рисунок 3). Так как его вид показывает, как ЛКОС из-за дифракции на апертуре рассеивает (размывает) изображение точки, то это дифракционное изображение  $h_{\beta}(x', y'; x, y)$  называют **когерентной функцией рассеяния (КФР)** оптической системы в плоскости  $x'y'$  геометрооптического изображения в приближении ДОС. В результате для операторно-вычислительной модели поведения ЛКОС получим

$$A'(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} A(x, y) h_{\beta}(x', y'; x, y) dx dy, \quad (36)$$

где комплексная амплитуда входного поля  $A(x, y)$  служит амплитудным коэффициентом, с которым суммируются функции рассеяния. Входящие в (34) физические величины имеют размерности:  $h_{\beta}(x', y'; x, y)$  [м<sup>-2</sup>],  $A(x, y)$  [В/м].

### 3.1.2 Операторно-вычислительная свёрточная модель поведения пространственно инвариантной оптической системы в приближении дифракционно ограниченной оптической системы

Как следует из (36), выходной сигнал  $A'(x', y')$  в любой точке плоскости изображения  $x'y'$  равен линейной комбинации когерентных функций рассеяния от всех точечных источников в плоскости объекта с комплексными амплитудами  $A(x, y)$ . Для итоговой идентификации операторно-вычислительной модели поведения ЛКОС в рамках скалярной теории дифракции на основе структурно-функциональной схемной модели (рисунок 4) требуется определить КФР ДОС.

На основании формулы (10), используя свёрточные модели поведения для френелевских СПП и СПИ, а также транспарантную операторно-вычислительную модель поведения (28) апертурно ограниченного объектива **в приближении ДОС**, найдём выражение для КФР ДОС

$$\begin{aligned}
h_{\beta}^{\text{ДОС}}(x', y'; x, y) &= \mathcal{P}_{\text{ЛКОС}}^{\text{ДОС}} \{ \delta(u-x, v-y) \} = (\beta / \lambda^2 a'^2) \times \\
&\times \exp[ik(-a+a')] \exp\{i[\pi(\beta-1)/\beta\lambda a'](x'^2 + y'^2)\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\xi, \eta) \exp\{-i(2\pi/\lambda a')[(x' - \beta x)\xi + (y' - \beta y)\eta]\} d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{37}$$

Первый экспоненциальный множитель  $\exp[ik(-a+a')]$ , стоящий перед интегралом в (37), представляет собой постоянную фазовую задержку, обусловленную распространением волны в ДОС от предметной плоскости до плоскости изображения и его можно в дальнейшем не учитывать. Второй экспоненциальный множитель  $\exp\{i[\pi(\beta-1)/\beta\lambda a'](x'^2 + y'^2)\}$  характеризует квадратичное фазовое искривление в плоскости изображения  $x'y'$ . Если конечной целью процесса формирования изображения является регистрация распределения интенсивности с помощью квадратичного регистрирующего устройства (приёмника излучения), то этим фазовым множителем также можно пренебречь. Но в активной оптической системе, работающей в когерентном свете, квадратичный фазовый сдвиг может оказаться нежелательным. Для его устранения в плоскости изображения должен располагаться корригирующий положительный объектив с фокусным расстоянием  $f'_{\text{кр}} = a'\beta/(\beta-1)$ .

В дальнейшем предполагается, что условия, при которых влиянием экспоненциальных фазовых множителей можно пренебречь, всегда выполняются. Поэтому будем рассматривать КФР ДОС без учёта фазовых множителей, обозначая её по-прежнему через  $h_{\beta}^{\text{ДОС}}$ . В результате для предметной точки  $P(x, y)$  и для точки на оси  $O(0,0)$  получим соответственно

$$\begin{aligned}
h_{\beta}^{\text{ДОС}}(x' - \beta x, y' - \beta y) &= (\beta / \lambda^2 a'^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\xi, \eta) \exp\{-i(2\pi/\lambda a') \times \\
&\times [(x' - \beta x)\xi + (y' - \beta y)\eta]\} d\xi d\eta,
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
h_{\beta}^{\text{ДОС}}(x', y') &= (\beta / \lambda^2 a'^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\xi, \eta) \exp[-i(2\pi/\lambda a')(x'\xi + y'\eta)] d\xi d\eta = \\
&= [\beta / (\lambda a')^2 \mathcal{F}\{P_{\text{зр}}(\xi, \eta)\}].
\end{aligned} \tag{39}$$

Как следует из (38) для фиксированной предметной точки  $P(x, y)$  центр дифракционного изображения (рисунок 3) находится в точке геометрического изображения  $P'(x' = \beta x, y' = \beta y)$ , т.е. вид функции рассеяния не зависит от точки приложения входного  $\delta$ -источника. Такая когерентная функция рассеяния  $h_{\beta}^{\text{ДОС}}(x' - \beta x, y' - \beta y)$ , зависящая только от разности координат, называется пространственно инвариантной КФР и соответствует пространственно инвариантной оптической системе. В результате общая операторно-вычислительная модель поведения (34) для пространственно инвариантной ДОС имеет вид взаимной свёртки входного сигнала  $A(x, y)$  с КФР (38):

$$\begin{aligned} A_{\text{ДОС}}(x', y') &= \mathcal{P}_{sv}^{\text{КДОС}} \{A(x, y) | h_{\beta}^{\text{ДОС}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) h_{\beta}^{\text{ДОС}}(x' - \beta x, y' - \beta y) dx dy = \\ &= (1/\beta^2) A(x'/\beta, y'/\beta) \otimes h_{\beta}^{\text{ДОС}}(x', y'). \end{aligned} \quad (40)$$

Заметим, что с учётом (19) КФР в виде (39) с точностью до постоянного множителя  $\beta/(\lambda a')^2$  представляет собой двумерное *прямое преобразование Фурье* от функции зрачка, или *фурье-образ* функции зрачка,

$$h_{\beta}^{\text{ДОС}}(x' = \lambda a' v_x, y' = \lambda a' v_y) = \tilde{P}_{\text{зр}}(v_x, v_y) = \mathcal{F}\{P_{\text{зр}}(\xi, \eta)\} \quad (41)$$

для пространственных частот  $v_x = x'/\lambda a'$ ,  $v_y = y'/\lambda a'$ . Иначе говоря, выражение (41) имеет глубокий оптико-физический смысл, показывая, что КФР ДОС совпадает с пространственно-частотным спектром (ПЧС) функции зрачка.

Введём в рассмотрение приведенную КФР ДОС

$$\begin{aligned} h_{\text{ДОС}}(x', y') &= (1/\beta) h_{\beta}^{\text{ДОС}}(x', y') = (1/\lambda^2 a'^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(\xi, \eta) \times \\ &\times \exp[-i(2\pi/\lambda a')(x'\xi + y'\eta)] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (42)$$

и распределение поля в идеальном геометрическом изображении

$$A_{\text{ГМО}}(x', y') = (1/\beta) A(x'/\beta, y'/\beta), \quad (43)$$

которое представляет собой масштабированную (в общем случае  $|\beta| \neq 1$ ) и перевернутую ( $\beta < 0$ ) геометрическую копию (Гмо-копию) объекта в идеальной оптической системе. Множитель  $1/\beta$  выражает закон сохранения энергии

при изменении масштаба Гмо-копии. Тогда общая свёрточная операторно-вычислительная модель поведения (40) для **пространственно инвариантной ДОС** приобретает вид взаимной свертки идеальной Гмо-копии  $A_{\text{ГМО}}(x', y')$  с приведённой КФР ДОС  $h_{\text{ДОС}}(x', y')$ , так что

$$A_{\text{ДОС}}(x', y') = \mathcal{P}_{\text{sv}}^{\text{ДОС}}(A_{\text{ГМО}} | h_{\text{ДОС}}) = A_{\text{ГМО}} \otimes h_{\text{ДОС}}(x', y'). \quad (44)$$

Из (44) следует, что при учёте дифракционных эффектов изображение даже при отсутствии aberrаций не является Гмо-копией объекта, а представляет собой его несколько сглаженный облик. **Сглаживание** является следствием *неравенства нулю ширины КФР* и может привести к значительному ослаблению мелких деталей и, как следствие, соответствующей потере разрешающей способности.

### 3.1.3 Операторно-вычислительная свёрточная модель поведения пространственно инвариантной оптической системы в приближении реальной оптической системы

Для пространственно инвариантной РОС (рисунок 5) в рассмотренных формулах (37) – (39), (42) функция зрачка  $P_{\text{зр}}(\xi, \eta)$  в виде (23) заменяется на абберационную функцию зрачка  $P_{\text{аб}}(\xi, \eta)$  в виде (31). Тогда общая КФР РОС  $h_{\beta}^{\text{РОС}}(x', y')$  и приведённая КФР  $h_{\text{РОС}}(x', y') = (1/\beta) h_{\beta}^{\text{РОС}}(x', y')$  по аналогии с (39) и (42) равны

$$\begin{aligned} h_{\beta}^{\text{РОС}}(x', y') &= (\beta/\lambda^2 p'^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{аб}}(\xi', \eta'; \kappa') \exp\{-i(2\pi/\lambda p') [x'\xi' + y'\eta']\} = \\ &= (\beta/\lambda^2 p'^2) \mathcal{F}\{P_{\text{аб}}(\xi', \eta'; \kappa')\}, \quad (v_x = x'/\lambda p', v_y = y'/\lambda p'), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} h_{\text{РОС}}(x', y') &= (1/\lambda^2 p'^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{аб}}(\xi', \eta'; \kappa') \exp\{-i(2\pi/\lambda p') [x'\xi' + y'\eta']\} = \\ &= (1/\lambda^2 p'^2) \mathcal{F}\{P_{\text{аб}}(\xi', \eta'; \kappa')\}, \quad (v_x = x'/\lambda p', v_y = y'/\lambda p'). \end{aligned} \quad (46)$$

В результате операторно-вычислительные модели поведения **пространствен-**

но инвариантной РОС имеют вид взаимной свёртки, аналогичной (40) и (44):

$$\begin{aligned} A_{\text{РОС}}(x', y') &= T_{\text{SV}}^{\text{КРОС}} \{A(x, y) | h_{\beta}^{\text{РОС}}\} = A(x, y) h_{\beta}^{\text{РОС}}(x' - \beta x, y' - \beta y) dx dy = \\ &= (1/\beta^2) A(x'/\beta, y'/\beta) \otimes h_{\beta}^{\text{РОС}}(x', y'), \end{aligned} \quad (47)$$

$$A_{\text{РОС}}(x', y') = T_{\text{SV}}^{\text{КРОС}} \{A_{\text{ГМО}} | h_{\text{РОС}}\} = A_{\text{ГМО}} \otimes h_{\text{РОС}}(x', y'). \quad (48)$$

## 3.2 Пространственно-частотное описание процесса формирования изображения в когерентной оптической изображающей системе

### 3.2.1 Оптико-физический смысл приведённой когерентной функции рассеяния

Выражение (42) для приведённой КФР ДОС можно рассматривать с двух точек зрения. Во-первых, с точностью до множителя  $1/\lambda^2 a'^2$  она равна фурье-образу функции зрачка  $P_{\text{зр}}(\xi, \eta)$  для пространственных частот  $v_x = x'/\lambda a'$ ,  $v_y = y'/\lambda a'$ :

$$h_{\text{ДОС}}(x', y') = h_{\text{ДОС}}(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) = (1/\lambda^2 a'^2) \tilde{P}_{\text{зр}}(v_x, v_y). \quad (49)$$

Во-вторых, альтернативное частотное описание приведенной КФР, которое является более удобным при пространственно-частотном анализе ДОС, можно получить, если в (42) сделать замену переменных  $\xi = -\lambda a' v_x$ ,  $\eta = -\lambda a' v_y$ .

. Откуда

$$\begin{aligned} h_{\text{ДОС}}(x', y') &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(-\lambda a' v_x, -\lambda a' v_y) \exp[i2\pi(x'v_x + y'v_y)] dv_x dv_y = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{P_{\text{зр}}(-\lambda a' v_x, -\lambda a' v_y)\}, \end{aligned} \quad (50)$$

т.е. представляет собой обратное преобразование Фурье от функции  $P_{\text{зр}}(-\lambda a' v_x, -\lambda a' v_y)$ , получающейся из функции зрачка в результате замены  $\xi' = \lambda a' v_x$ ,  $\eta' = \lambda a' v_y$  и последующего отражения относительно начала координат (появляется знак минус).

В частности, для приведённой КФР АД ОС по аналогии с (49) имеем

$$h_{\text{АДОС}}(x', y') = h_{\text{АДОС}}(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) = (1/\lambda^2 a'^2) \tilde{P}_{\text{аб}}(v_x, v_y; \square). \quad (51)$$

В свою очередь, вид приведенной КФР ИОС, формирующей идеальную геометрооптическую копию, найдем, устремив в (50) длину волны к нулю, так что

$$\begin{aligned} h_{\text{ИОС}}(x', y') &= \lim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{зр}}(-\lambda a' v_x, -\lambda a' v_y) \exp[i2\pi(x'v_x + y'v_y)] dv_x dv_y = \\ &= \lim h_{\text{ДОС}}(x', y') = \delta(x', y') \text{ при } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Таким образом, дифракционное изображение точки в приближении параксиальной геометрической оптики имеет  $\delta$ -образный вид. Подставляя (52) в (44), получим (43). Иначе говоря, так как ширина КФР ИОС равна нулю, то дифракционного сверточного сглаживания идеального изображения не происходит, и оно является точной геометрооптической копией объекта.

### 3.2.2 Идентификация пространственно инвариантной когерентной оптической изображающей системы в виде линейного пространственно-частотного фильтра (ПЧФ)

Учитывая, что фурье-образ свёртки равен произведению фурье-образов, в результате перехода в (44) к пространственно-частотным представлениям с учётом (43) получим выражение для мультипликативного оператора поведения *двумерного линейного когерентного ПЧФ (КзрПЧФ)*, описывающего передачу пространственных частот в когерентной ДОС:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\text{ДОС}}(v_x, v_y) &= \mathcal{P}_{\text{кпчф}}^{\text{ДОС}}(\tilde{A}_{\text{ИОС}} | h_{\text{ДОС}}) = \tilde{A}_{\text{ИОС}}(v_x, v_y) \tilde{h}_{\text{ДОС}}(v_x, v_y) = \\ &= \beta \tilde{A}(\beta v_x, \beta v_y) \tilde{h}_{\text{ДОС}}(v_x, v_y), \end{aligned} \quad (53)$$

где  $\tilde{A}(\beta v_x, \beta v_y)$  – масштабированный ПЧС входного когерентного оптического сигнала в виде распределения комплексной амплитуды;  $\tilde{A}_{\text{ИОС}}(v_x, v_y)$  – ПЧС идеального геометрооптического когерентного изображения без учета аберра-

ционных и дифракционных искажений;  $\tilde{A}_{\text{ДОС}}(v_x, v_y)$  – ПЧС выходного когерентного дифракционно ограниченного изображения. Фурье-образ приведённой пространственно инвариантной КФР ДОС, определяемый с помощью (50) как

$$\tilde{h}_{\text{ДОС}}(v_x, v_y) = \mathcal{F}\{h_{\text{ДОС}}(x', y')\} = P_{\text{Зр}}(-\lambda a'v_x, -\lambda a'v_y), \quad (54)$$

называют **когерентной передаточной функцией (КПФ) ДОС**. КПФ представляет собой функцию зрачка  $P_{\text{Зр}}(-\xi, -\eta)$  отражённую относительно начала координат, у которой координаты  $\xi, \eta$  заменяются на  $\lambda a'v_x, \lambda a'v_y$ .

На практике в силу плоскостной или осевой симметрии большинства объективов функция зрачка является центрально симметричной и отрицательные знаки у аргументов в (54) несущественны. При этом входящие в (53) и (54) физические величины имеют следующие размерности:

$$\tilde{A}(\beta v_x, \beta v_y), \tilde{A}_{\text{ИОС}}(v_x, v_y), \tilde{A}_{\text{ДОС}}(v_x, v_y) [B \times M], \quad \tilde{h}_{\text{ДОС}}(v_x, v_y) [\text{безразмерная}].$$

При построении мультипликативного оператора поведения *двумерного линейного КгрПЧФ*, описывающего передачу пространственных частот в когерентной КрпДОС, АДОС, РОС, ИОС используются соответствующие КПФ.

В случае КрпДОС в формуле (54)  $a'$  заменяется на  $p'$ . Для определения КПФ пространственно инвариантной ОИЗС в приближении АДОС представим приведённую КФР (51) в виде, аналогичном (50):

$$h_{\text{АДОС}}(x', y') = \mathcal{F}^{-1}\{P_{\text{аб}}(-\lambda a'v_x, -\lambda a'v_y; \kappa')\}. \quad (55)$$

С учётом (55) фурье-образ приведённой пространственно-инвариантной КФР:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{АДОС}}(v_x, v_y) &= P_{\text{аб}}(-\lambda a'v_x, -\lambda a'v_y; \kappa') = \\ &= P_{\text{Зр}}(-\lambda a'v_x, -\lambda a'v_y; \kappa') \exp[ik\Delta l(-\lambda a'v_x, -\lambda a'v_y; \kappa')] \end{aligned} \quad (56)$$

определяет КПФ АДОС. Аналогично с учётом (54) для КПФ РОС получим

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{РОС}}(v_x, v_y) &= P_{\text{аб}}(-\lambda p'v_x, -\lambda p'v_y; \kappa') = \\ &= P_{\text{Зр}}(-\lambda p'v_x, -\lambda p'v_y; \kappa') \exp[ik\Delta l(-\lambda p'v_x, -\lambda p'v_y; \kappa')]. \end{aligned} \quad (57)$$

Кроме того, на основании (52) выражение для КПФ ИОС имеет вид

$$\tilde{h}_{\text{иос}}(v_x, v_y) = F\{\delta(x', y')\} \equiv 1(v_x, v_y). \quad (58)$$

Таким образом, чтобы определить **пространственно-частотный спектр (ПЧС)**  $\tilde{A}_{\text{дос}}$  когерентного изображения на выходе двумерного линейного когерентного ПЧФ, в частности в приближении ДОС (см. (53)), надо: 1) найти когерентную передаточную функцию (КПФ) ДОС (54); 2) вычислить ПЧС  $\tilde{A}(v_x, v_y)$  входного сигнала и, заменив в нем  $v_x, v_y$  на  $\beta v_x, \beta v_y$ , перейти к масштабированному ПЧС  $\tilde{A}(\beta v_x, \beta v_y)$ ; 3) полученные результаты подставить в (53) и перемножить с учётом множителя  $\beta$ .

Переход к пространственно-частотным представлениям описывает передачу пространственных частот в когерентной ДОС. В результате сглаживание контуров объекта в рамках свёрточной операторно-вычислительной модели поведения (44) теперь можно рассматривать как результат фильтрации (передачи) пространственных частот с помощью мультипликативного оператора поведения (53) *двумерного линейного КзрПЧФ*. Потеря разрешения обусловлена тем, что высокие пространственные частоты не пропускаются финитной функцией зрачка объектива. Так как  $P_{\text{зр}}(\xi', \eta') = |P_{\text{аб}}(\xi', \eta')|$  не превосходит единицы, то в соответствии с (54) и (56) – (58) такими же значениями обладает КПФ. Иначе говоря, когерентная пространственно инвариантная ОИЗС имеет финитный пространственно-частотный диапазон пропускания, определяемый прямоугольной  $D_v^{\square} = \{|v_x| \leq v_1^{\text{кг}}, |v_y| \leq v_2^{\text{кг}}\}$  или круговой  $D_v^{\circ} = \{v \leq v_{\text{кг}}\}$  областями в частотной плоскости (см (62)). На границе этих областей финитная КПФ сразу падает до нуля. Это означает, что составляющие вне диапазона пропускания полностью подавляются. При этом в ДОС и КрпДОС все частотные компоненты проходят без искажения амплитуды и фазы, а в РОС и АДОС происходит изменение амплитуды и фазовый сдвиг, вообще говоря, на каждой частоте.

В общем случае в формулу (53) входит масштабированный ПЧС объекта  $\tilde{A}(\beta v_x, \beta v_y)$ , поскольку  $|\beta \neq 1|$ . Иначе говоря, при изменении масштаба изо-

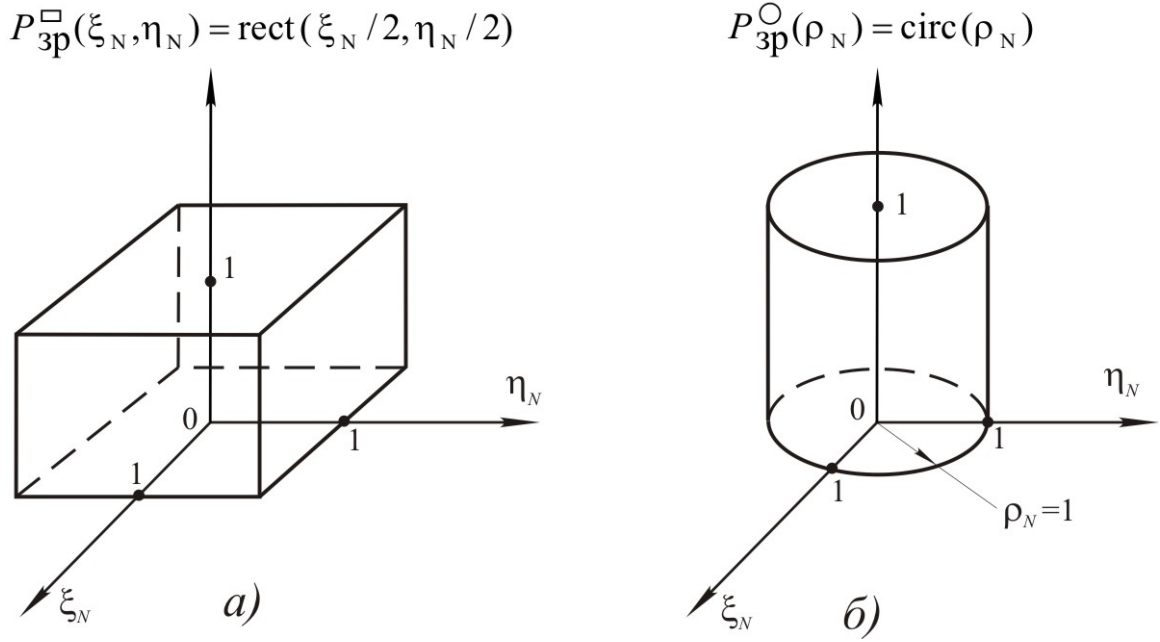
бражения в ОИЗС происходит преобразование ПЧС, соответственно растяжение ( $|\beta| < 1$ , *фотоапарат*), так как период деталей в изображении объекта уменьшается, или сжатие ( $|\beta| > 1$ , *кинотеатр*), так как период деталей в изображении объекта увеличивается. Этой простой операции для пространственно инвариантной ОИЗС в инвариантной во времени электронной системе соответствует двухступенчатый процесс записи временного сигнала с последующим его воспроизведением с большей или меньшей скоростью соответственно.

### 3.2.3 Когерентная передаточная функция оптической изображающей системы с прямоугольным и круглым зрачками в приближении дифракционно ограниченной оптической системы

Рассмотрим ДОС с прямоугольным и круглым выходными зрачками, поверхностные геометрические модели которых в каноническом виде приведены на рисунках П.3 и П.4. Соответствующие выражения для зрачковых функций на основе (24) и (25) в координатах  $\rho'(\xi', \eta')$  имеют вид

$$P_{зр}^{\square}(\xi', \eta') = \text{rect}(\xi'/2\xi'_{зр}, \eta'/2\eta'_{зр}), \quad P_{зр}^{\circ}(\rho') = \text{circ}(\rho'/\rho'_{зр}), \quad (59)$$

где  $2\xi'_{зр}, 2\eta'_{зр}$  – стороны прямоугольного выходного зрачка;  $\rho'_{зр}$  – радиус круглого выходного зрачка.



*а)* прямоугольный зрачок; *б)* круглый зрачок

Рисунок 6 – Поверхностные геометрические модели типовых канонических зрачковых функций в нормированных пространственных координатах

Переходя в (59) на основании (29) к нормированным пространственным координатам, получим канонические зрачковые функции

$$P_{\text{зр}}^{\square}(\xi_N, \eta_N) = \text{rect}(\xi_N/2, \eta_N/2), \quad P_{\text{зр}}^{\circ}(\rho_N) = \text{circ}(\rho_N), \quad (60)$$

которые представлены на рисунке 6.

Построение КПФ на основе идентифицированных функций зрачка, реализованное в (54), для центрально симметричных зрачковых функций осуществляется в результате перехода от пространственных координат зрачка в (59) к пространственным частотам по формулам  $\xi' = \lambda a' v_x$ ,  $\eta' = \lambda a' v_y$ ,  $\rho' = \lambda a' v$ :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{доc}}^{\square}(v_x, v_y) &= \text{rect}(\lambda a' v_x / 2\xi'_{\text{зр}}, \lambda a' v_y / 2\eta'_{\text{зр}}) = \\ &= \text{rect}[v_x / (2\xi'_{\text{зр}}/\lambda a'), v_y / (2\eta'_{\text{зр}}/\lambda a')] = \text{rect}[v_x / (2v_1^{\text{кр}}), v_y / (2v_2^{\text{кр}})], \\ \tilde{h}_{\text{доc}}^{\circ}(v) &= \text{circ}(\lambda a' v / \rho'_{\text{зр}}) = \text{circ}(v / v^{\text{кр}}). \end{aligned} \quad (61)$$

Переход к нормированным безразмерным пространственным частотам

$$v_{xN} = v_x / v_1^{\text{кр}}, \quad v_{yN} = v_y / v_2^{\text{кр}}, \quad v_N = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} / v^{\text{кр}} = v / v^{\text{кр}} \quad (62)$$

приводит к построению в нормированных пространственно-частотных координатах типовых канонических КПФ, которые показаны на рисунке 7.

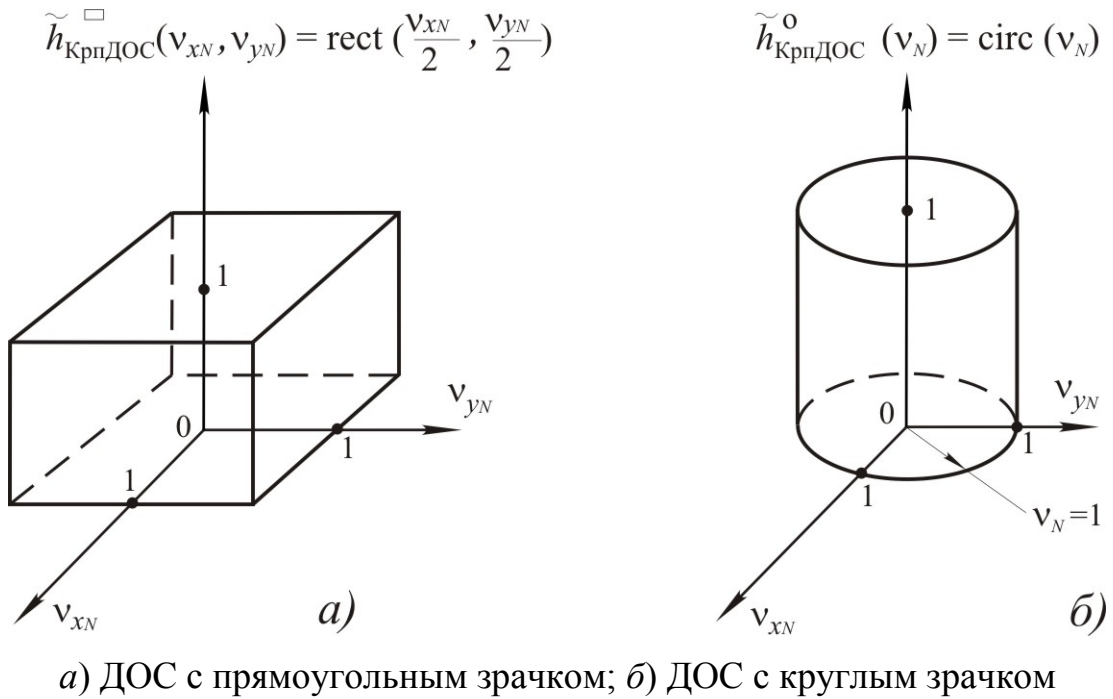


Рисунок 7 – Поверхностные геометрические модели типовых канонических когерентных передаточных функций дифракционно ограниченной оптической системы в нормированных пространственно-частотных координатах

Нормирующие пространственно-частотные множители

$$v_1^{кГ} = v_{x\ кГ}^{\max} = \xi'_{зр} / \lambda a'; \quad v_2^{кГ} = v_{y\ кГ}^{\max} = \eta'_{зр} / \lambda a'; \quad v^{кГ} = v_{кГ}^{\max} = \rho'_{зр} / \lambda a' \quad (63)$$

представляют собой максимальные пространственные частоты, пропускаемые когерентным ПЧФ (61) с прямоугольной и круглой апертурой соответственно, так что нормированные канонические КПФ имеют вид

$$\tilde{h}_{\text{ДОС}}^{\square}(v_{xN}, v_{yN}) = \text{rect}(v_{xN}/2, v_{yN}/2), \quad \tilde{h}_{\text{ДОС}}^{\circ}(v_N) = \text{circ}(v_N). \quad (64)$$

Преимущество введения нормированных пространственных координат и частот состоит в том, что с точностью до обозначения формулы (64) совпадают с формулами (61). Задание выходных зрачковых функций в нормированных пространственных координатах  $\rho_N(\xi_N, \eta_N)$  (рисунок 6) автоматически индуцирует КПФ в нормированных частотных координатах  $v_N(v_{xN}, v_{yN})$  (рисунок 7).

Кроме того, в результате перехода к нормированным пространственным

частотам формулы (64) одновременно описывают КПФ корпулентной ДОС (как показано на рисунке 7) с нормирующими частотами

$$v_1^{кг} = v_{x кг}^{\max} = \xi'_{зр} / \lambda p'; \quad v_2^{кг} = v_{y кг}^{\max} = \eta'_{зр} / \lambda p'; \quad v^{кг} = v_{кг}^{\max} = \rho'_{зр} / \lambda p', \quad (65)$$

в которых  $a'$  заменяется на  $p'$ . Следует заметить, что нормированные пространственные координаты и частоты также удобно использовать для построения абберационной функции зрачка (31) и КПФ АДОС (56) и РОС (57).

Для идентификации конкретного диапазона пространственных частот, пропускаемых КгрПЧФ необходимо задать размеры зрачка и параметры  $a'$  или  $p'$  и  $\lambda$ . В частности, если  $2\rho'_{зр} = 2\xi'_{зр} = 2\eta'_{зр} = 20$  мм,  $a' = 100$  мм,  $\lambda = 0,5$  мкм, то на основании  $v_1^{кг} = v_2^{кг} = v^{кг} = 200$  мм<sup>-1</sup>.

### 3.3 Примеры пространственно-координатного и пространственно-частотного описания формирования изображения в линейной когерентной идеальной (ИОС) и реальной (РОС) оптической системе

#### 3.3.1 Однокомпонентная линейная когерентная оптическая изображающая система

Ниже приведены рисунки 8 – 11, иллюстрирующие пространственно-координатное свёрточное поведение когерентной оптической изображающей системы (КгрОИЗС) и пространственно-частотное мультипликативное поведение этой же системы как когерентного пространственно-частотного фильтра (КгрПЧФ). Свёрточные операторы вверху рисунков и мультипликативные операторы внизу связаны между собой преобразованием Фурье ( $\mathcal{F}$ -оператор).

На рисунке 8 идентифицировано координатное и частотное формирование идеальной когерентной функции рассеяния (КФР) в двумерной КгрОИЗС в приближении ИОС в виде геометрической  $\delta$ -копии (Гмо  $\delta$ -копии).

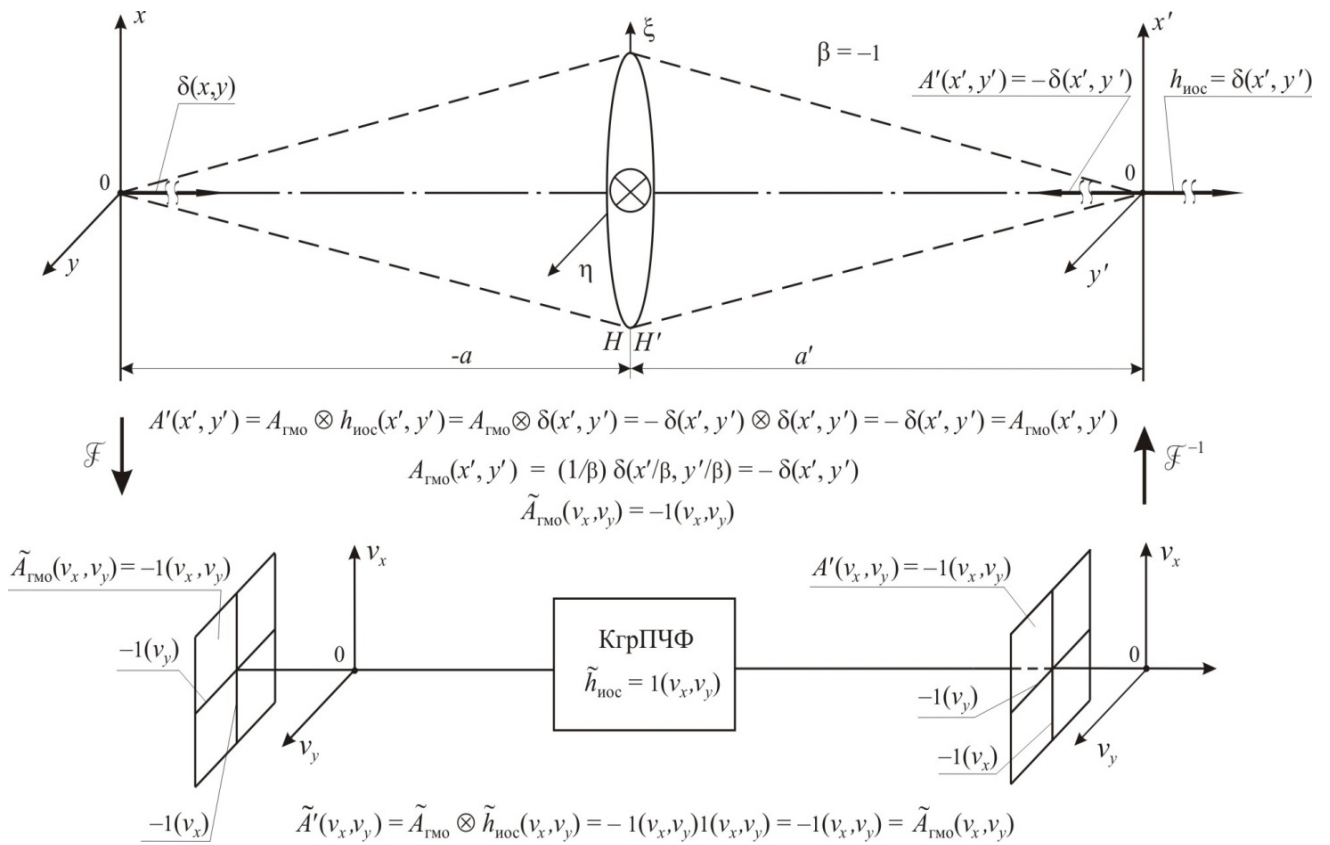


Рисунок 8 – Идентификация пространственно-координатного и пространственно-частотного поведения двумерной КгрОИЗС в приближении ИОС

На рисунке 9 показано свёрточное пространственно-координатное и мультипликативное пространственно-частотное (внизу) формирование ГМО-копии  $\text{rect}$ -образного амплитудного объекта в одномерной КгрОИЗС в приближении ИОС.

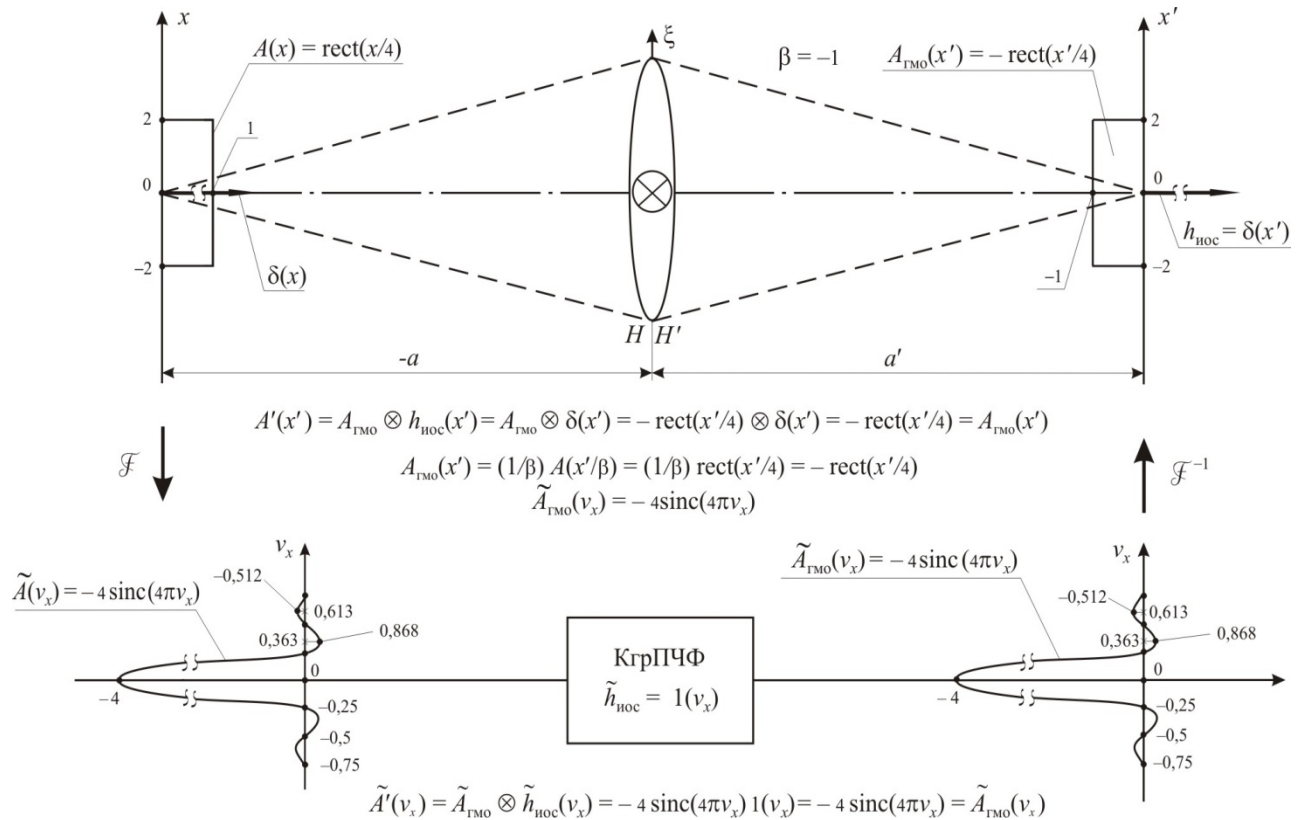


Рисунок 9 – Пространственно-координатное и пространственно-частотное формирование ГМО-копии амплитудного объекта в виде  $\text{rect}(x/4)$  в одномерной КгрОИЗС в приближении ИОС

На рисунке 10 дано формирование реального изображения гест-объекта и его пространственно-частотного спектра (ПЧС) в случае гест-образной КФР в приближении РОС.

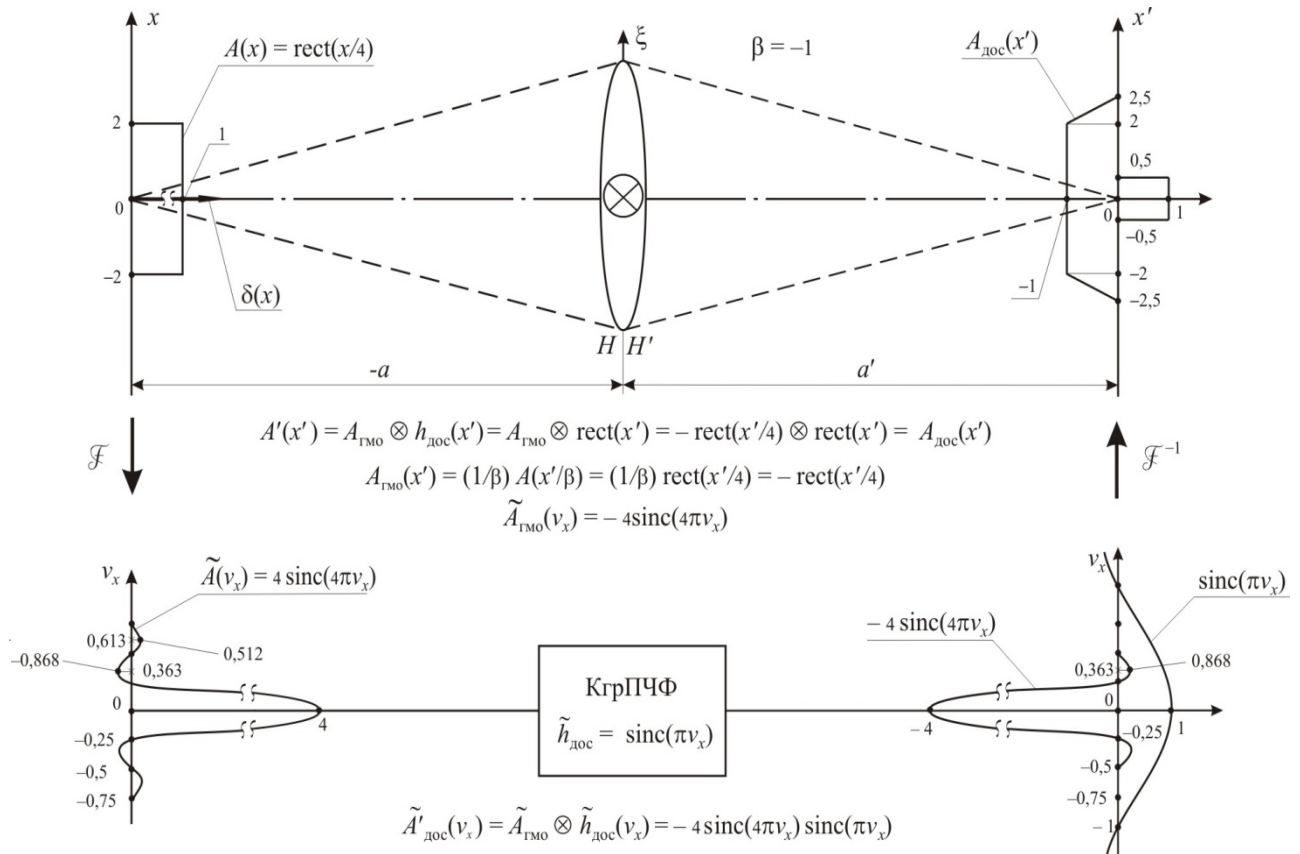
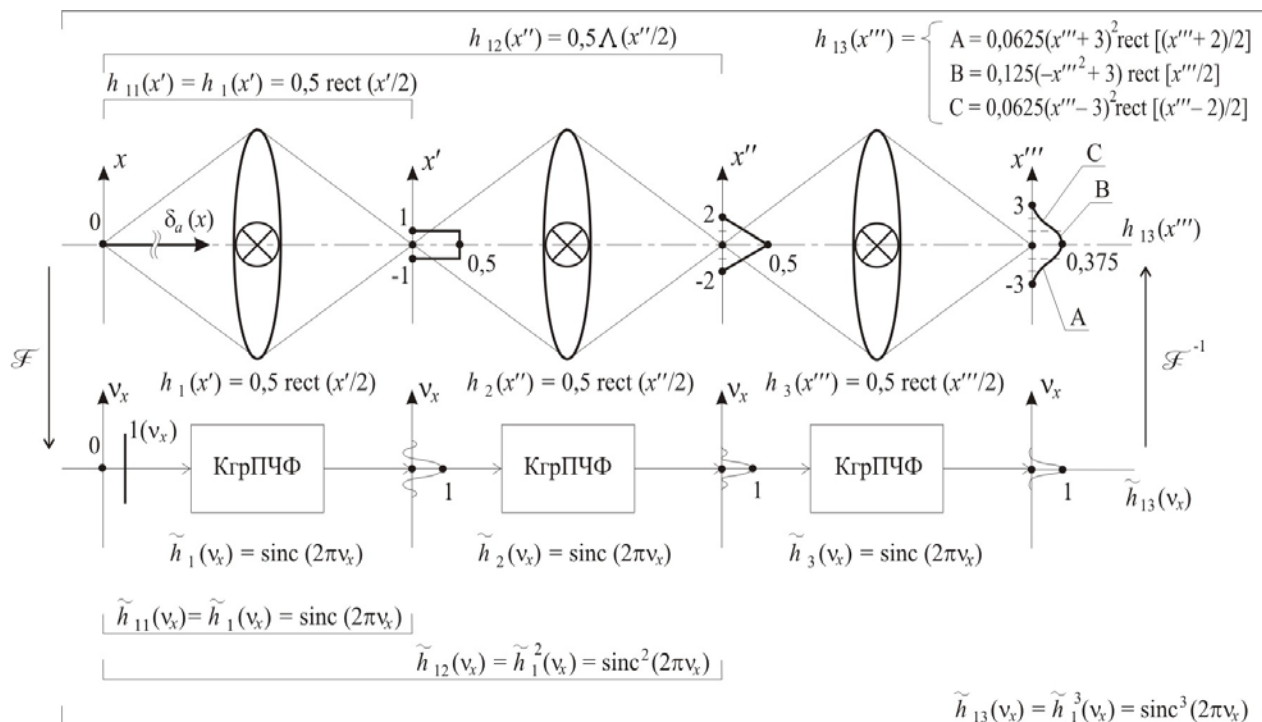


Рисунок 10 – Пространственно-координатное и пространственно-частотное формирование изображения амплитудного объекта в виде  $\text{rect}(x/4)$  в одномерной КгрОИЗС в приближении РОС с гест-КФР

### 3.3.2 Трёхкомпонентная линейная КгрОИЗС

На рисунке 11 приведены три стоящие последовательно друг за другом идентичные КгрОИЗС с одинаковой гест-образной КФР. Идентифицирован трёхступенчатый свёрточный процесс и построены два промежуточных и третье итоговое изображение  $\delta$ -образного входного сигнала. Рассмотрено мульт-

типликативное пространственно-частотное поведение каждой подсистемы и всей КгрОИЗС в целом. Найдена когерентная передаточная функция (КПФ) для однокомпонентного, двухкомпонентного и трёхкомпонентного КгрПЧФ.



$h_1, h_2, h_3$  – три одинаковые когерентные гест-функции рассеяния (КгрФР);  
 $h_{11} = h_1, h_{12}, h_{13}$  – КгрФР одно-, двух- и трёхкомпонентной КгрОИЗС соответственно;  
 $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$  – три одинаковые когерентные передаточные функции (КПФ);

$\tilde{h}_{11} = \tilde{h}_1, \tilde{h}_{12}, \tilde{h}_{13}$  – КПФ одно-, двух- и трёхкомпонентного КгрПЧФ

Рисунок 11 – Процессы формирования изображения в результате последовательного преобразования сигналов в трёхкомпонентной когерентной оптической изображающей системе (КгрОИЗС) и в трёхкомпонентном когерентном пространственно-частотном фильтре (КгрПЧФ)

## Контрольные вопросы

1. Что такое инвариантное поведение линейной когерентной оптической изображающей системы?
2. В чём состоит оптико-физический смысл интеграла суперпозиции?
3. Что такое когерентная функция рассеяния ДОС, КрпДОС, АДОС, РОС, ИОС?
4. В чём состоит оптико-физический смысл пространственной инвариантности оптической системы?
5. Что описывает операторно-вычислительная свёрточная модель поведения пространственно инвариантной оптической системы в дифракционном приближении?
6. Что описывает операторно-вычислительная свёрточная модель поведения пространственно инвариантной реальной оптической системы?
7. В чём состоит оптико-физический смысл двух видов приведённой когерентной функции рассеяния?
8. Как строится пространственно-частотное описание инвариантной когерентной оптической изображающей системы в виде линейного пространственно-частотного фильтра?
9. Что такое когерентная передаточная функция (КПФ) ДОС, КрпДОС, АДОС, РОС, ИОС?
10. Какова связь функции зрачка и КПФ оптической изображающей системы с прямоугольным и круглым зрачками в нормированных координатах и нормированных частотах?
11. Как построить координатное и частотное описание формирования изображения в двумерной когерентной ИОС?
12. Как построить координатное и частотное описание формирования  $\Gamma$  копии амплитудного объекта в одномерной когерентной ИОС?
13. Как построить координатное и частотное описание формирования изображения амплитудного объекта в одномерной когерентной РОС?
14. Как построить координатное и частотное описание формирования изображения амплитудного объекта в трёхкомпонентной когерентной РОС?

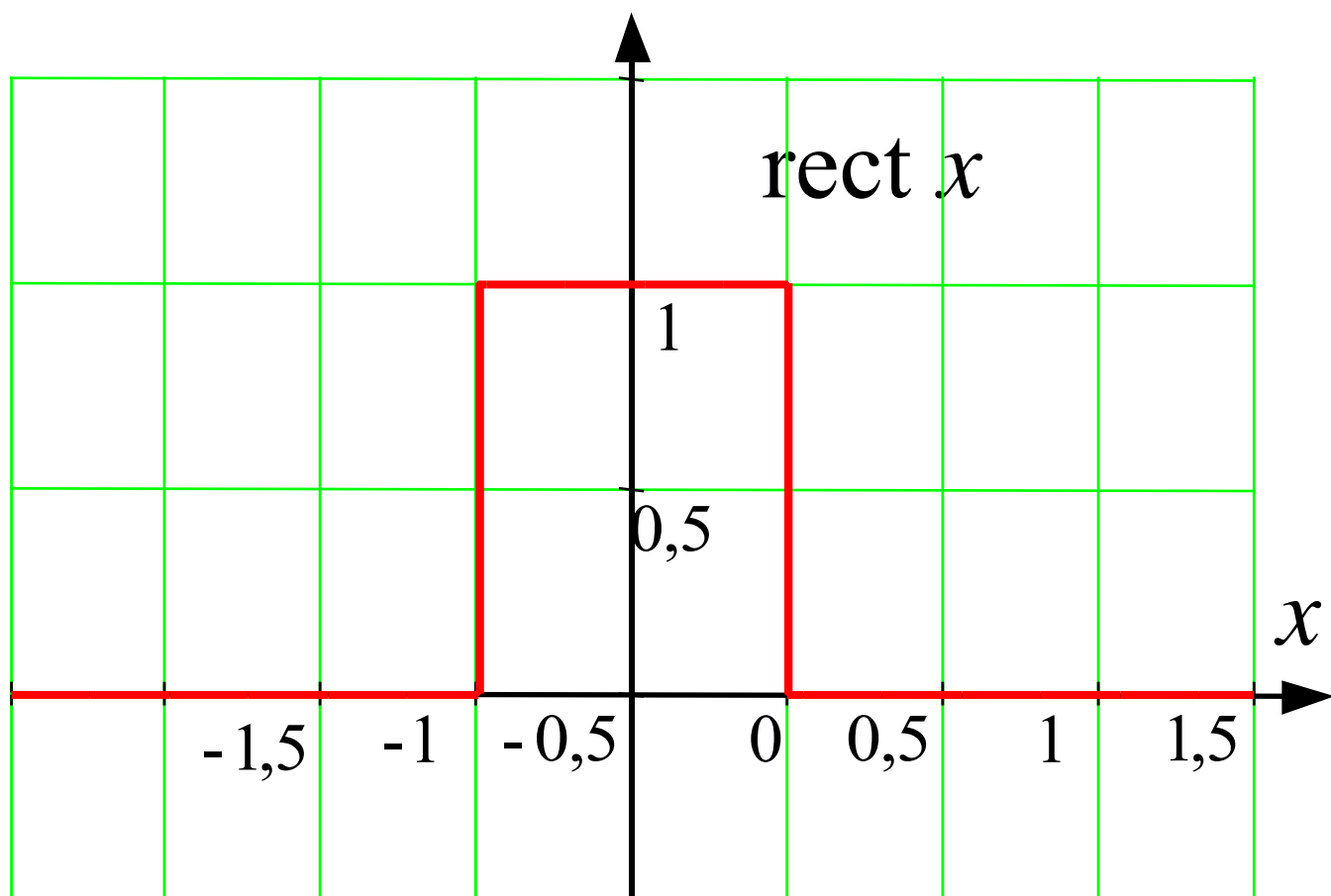
## Список использованных источников

1. Мосягин Г.М., Немтинов В.Б., Лебедев Е.Н. Теория оптико-электронных систем: учебник для студентов вузов по оптическим специальностям. – М.: Машиностроение, 1990. – 432с.
2. Мосягин Г.М., Немтинов В.Б. Теория преобразования сигналов в оптико-электронных приборах. – М.: Изд-во МВТУ. Части 1,2,3. – 1981, 1982, 1983.
3. Якушенко Ю.Г. Теория и расчет оптико-электронных приборов: учебник. – М.: Логос, 2011. – 568с.
4. Порфирьев Л.Ф. Основы теории преобразования сигналов в оптико-электронных системах. – Л.: Машиностроение, 1989. – 387с.
5. Мирошников М.М. Теоретические основы оптико-электронных приборов. – Л.: Машиностроение, 1983. – 696с.

# **ПРИЛОЖЕНИЕ**

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ,  
ЗАДАЮЩИЕ ВИД ФУНКЦИИ ЗРАЧКА  
и ИДЕНТИФИЦИРУЮЩИЕ  
ВХОДНЫЕ и ВЫХОДНЫЕ ТИПОВЫЕ СИГНАЛЫ  
в КОГЕРЕНТНОЙ  
ОПТИЧЕСКОЙ ИЗОБРАЖАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ**

## Канонический 1-м типовой rect-сигнал



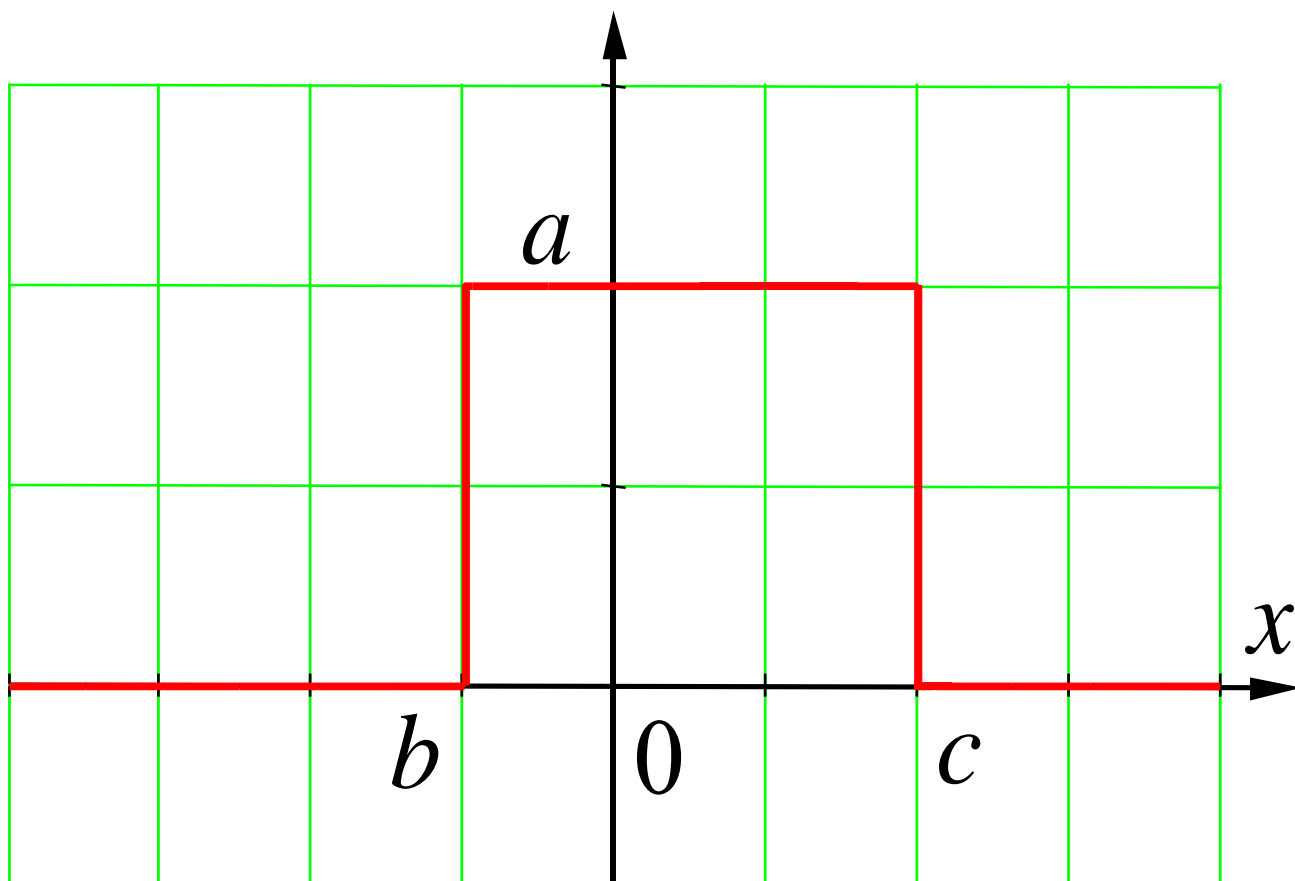
Одномерная rect-функция в каноническом виде

$$\text{rect } x = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \end{cases}$$

Рис. П.1.

## Обобщённый 1-м типовой **rect**-сигнал

$$a \operatorname{rect}\left(\frac{x - 0,5(b + c)}{c - b}\right)$$

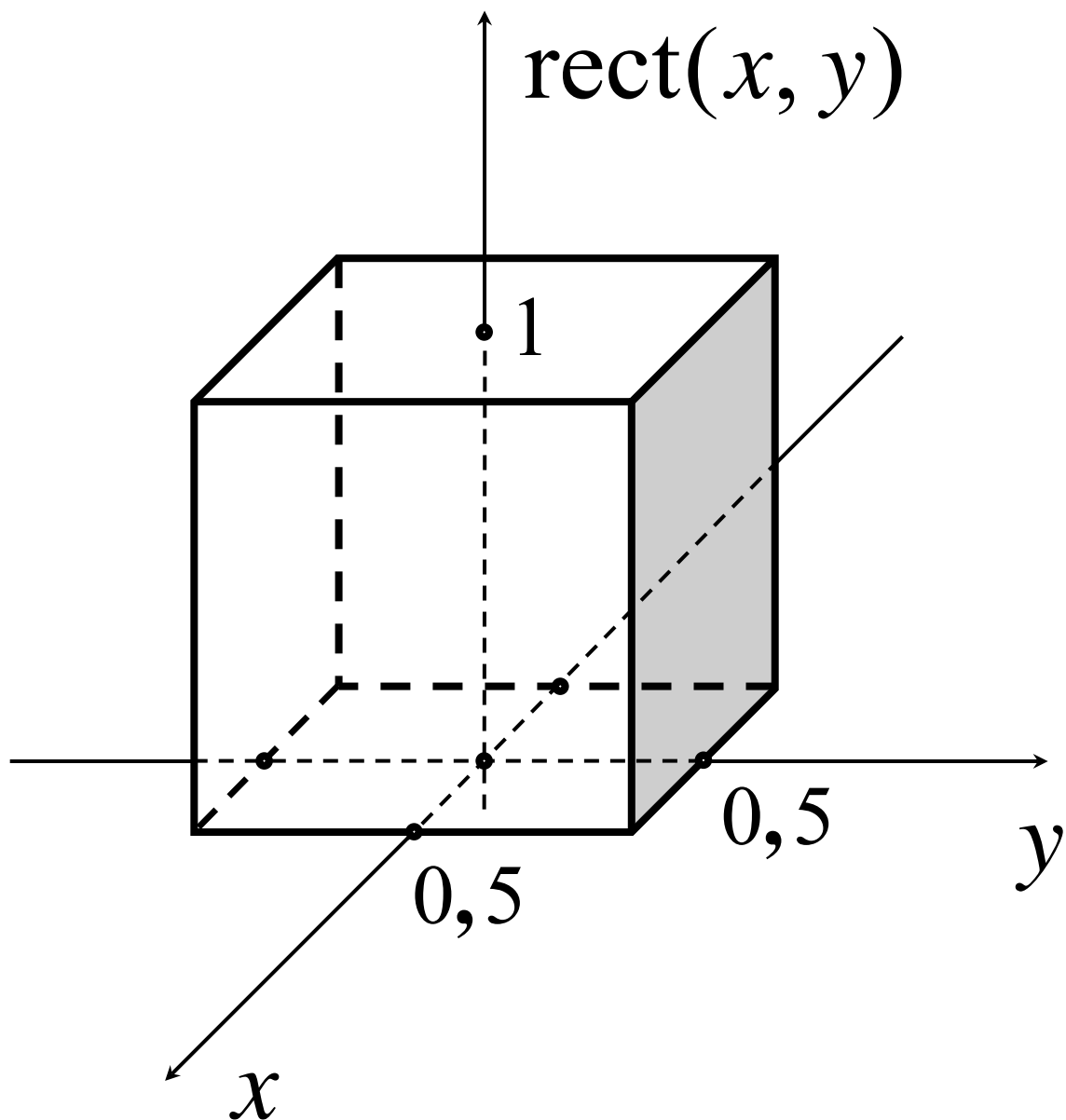


Одномерная **rect**-функция в обобщённом виде

$$a \operatorname{rect}\left(\frac{x - 0,5(b + c)}{c - b}\right) = \begin{cases} 0, & x \leq b \\ a, & b < x \leq c \\ 0, & c < x \end{cases}$$

Рис. П.2.

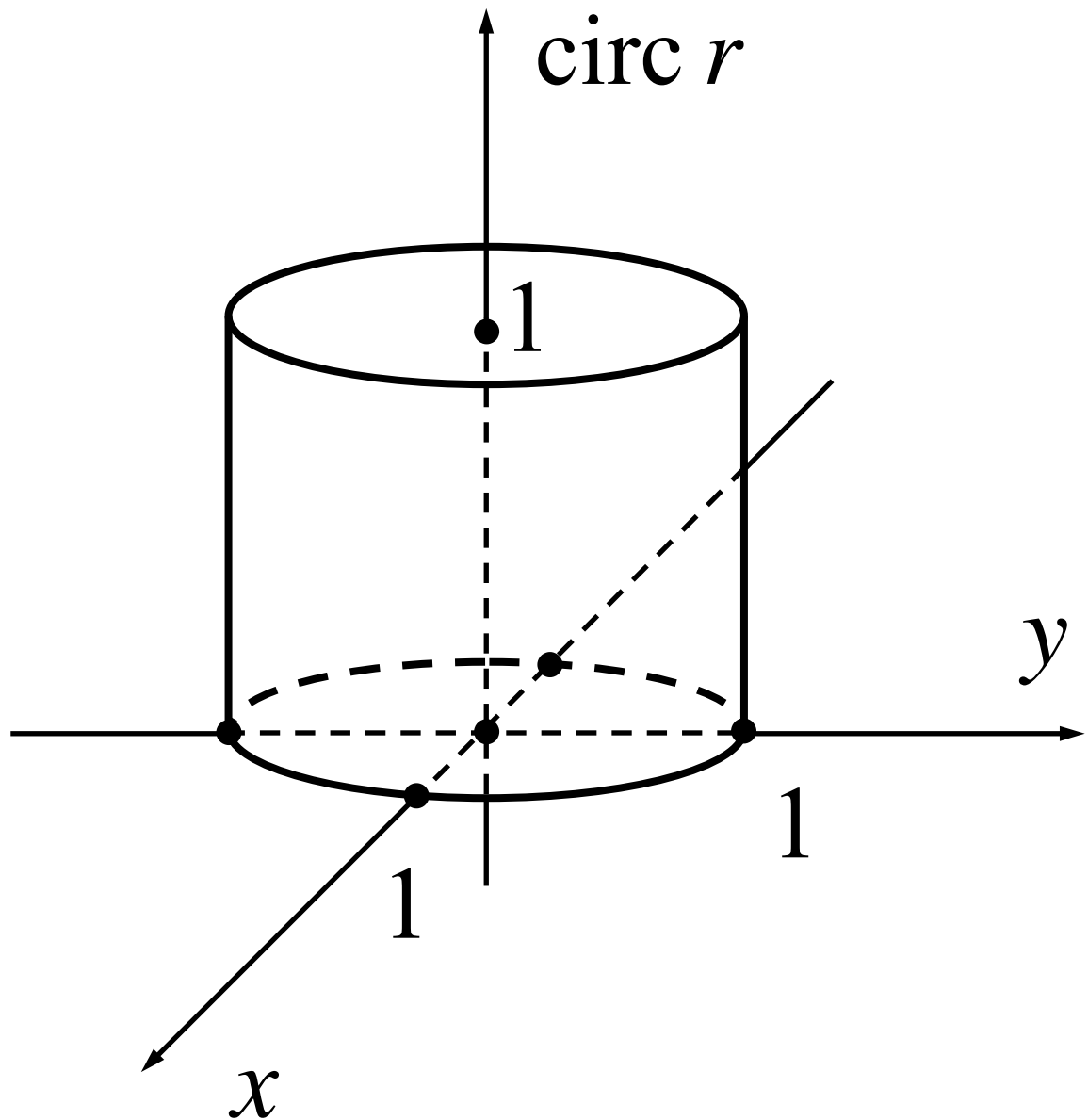
## Канонический типовой 2-м rect-сигнал



$$\text{rect}(x, y) = \text{rect } x \cdot \text{rect } y$$

Рис. П.3.

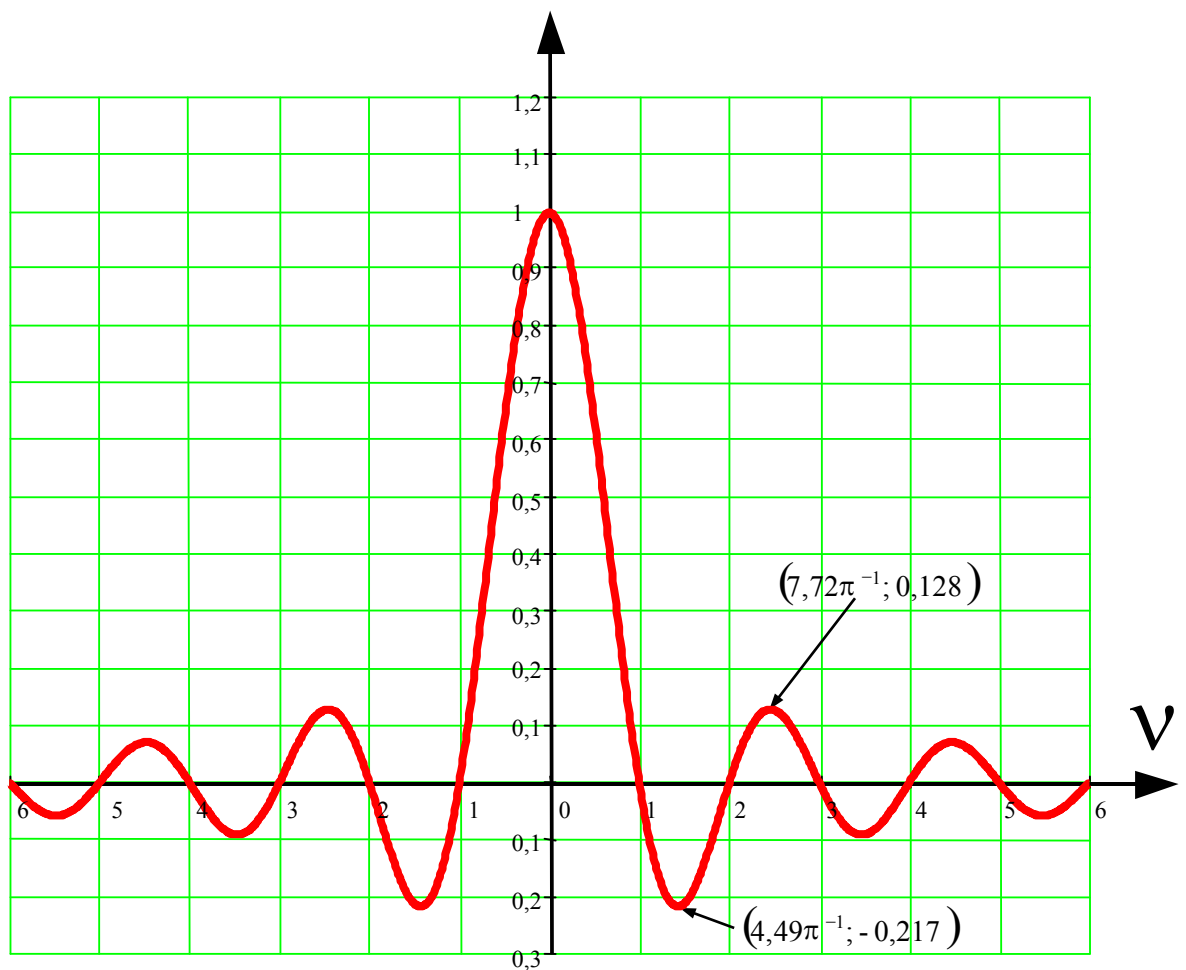
## Канонический 2-м circ-типовой сигнал



$$\text{circ } r = \begin{cases} 1 & , r \leq 1 \\ 0 & , r > 1 \end{cases}$$

Рис. П.4.

# Канонический 1-м типовой sinc-сигнал $\text{sinc}(\pi v)$

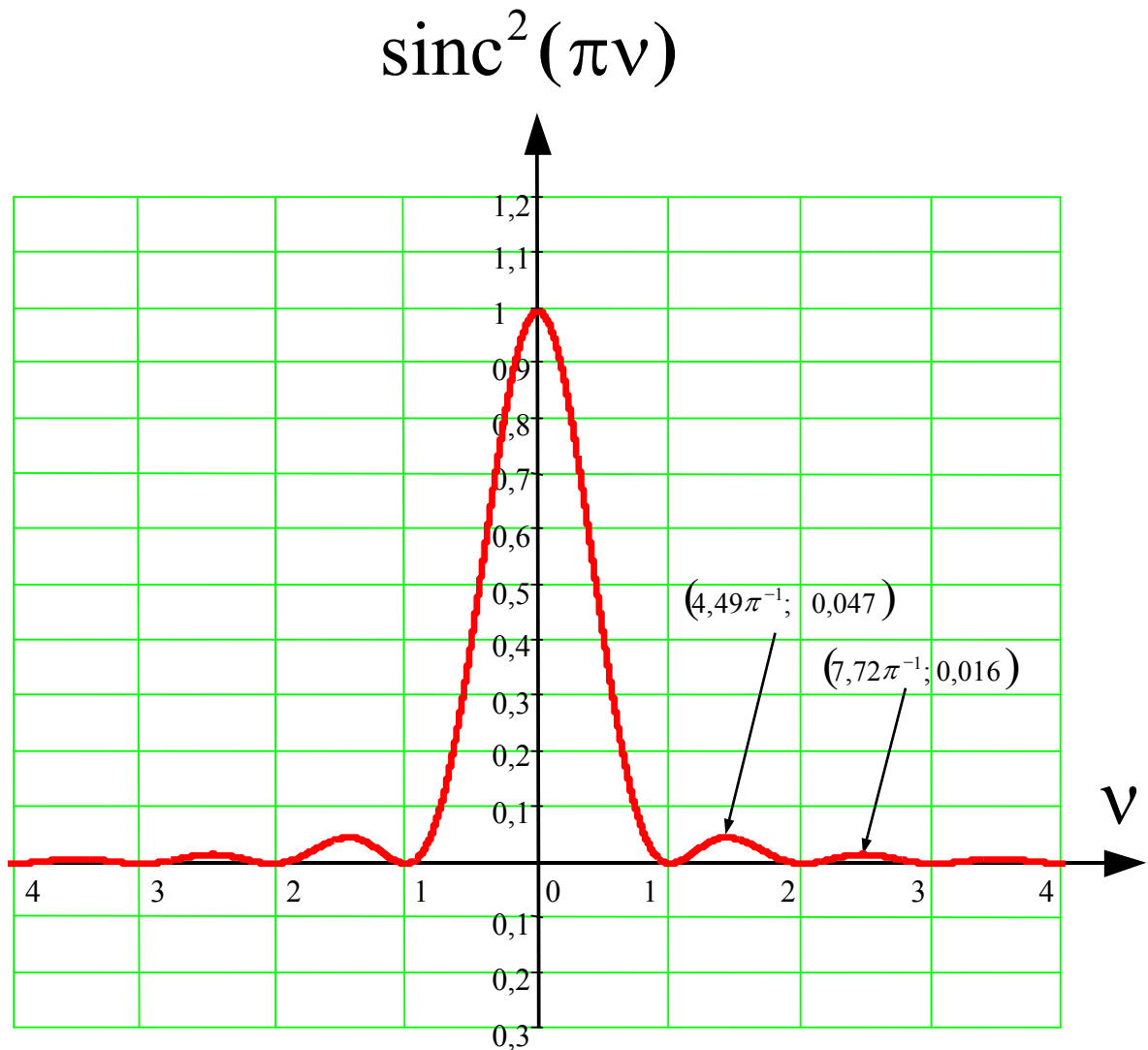


Одномерная sinc-функция в каноническом  
ВИДЕ

$$\text{sinc}(\pi v) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi v)}{\pi v}, & v \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \\ 1, & v = 0 \end{cases}$$

Рис. П.5.

## Канонический 1-м типовой sinc<sup>2</sup>-сигнал



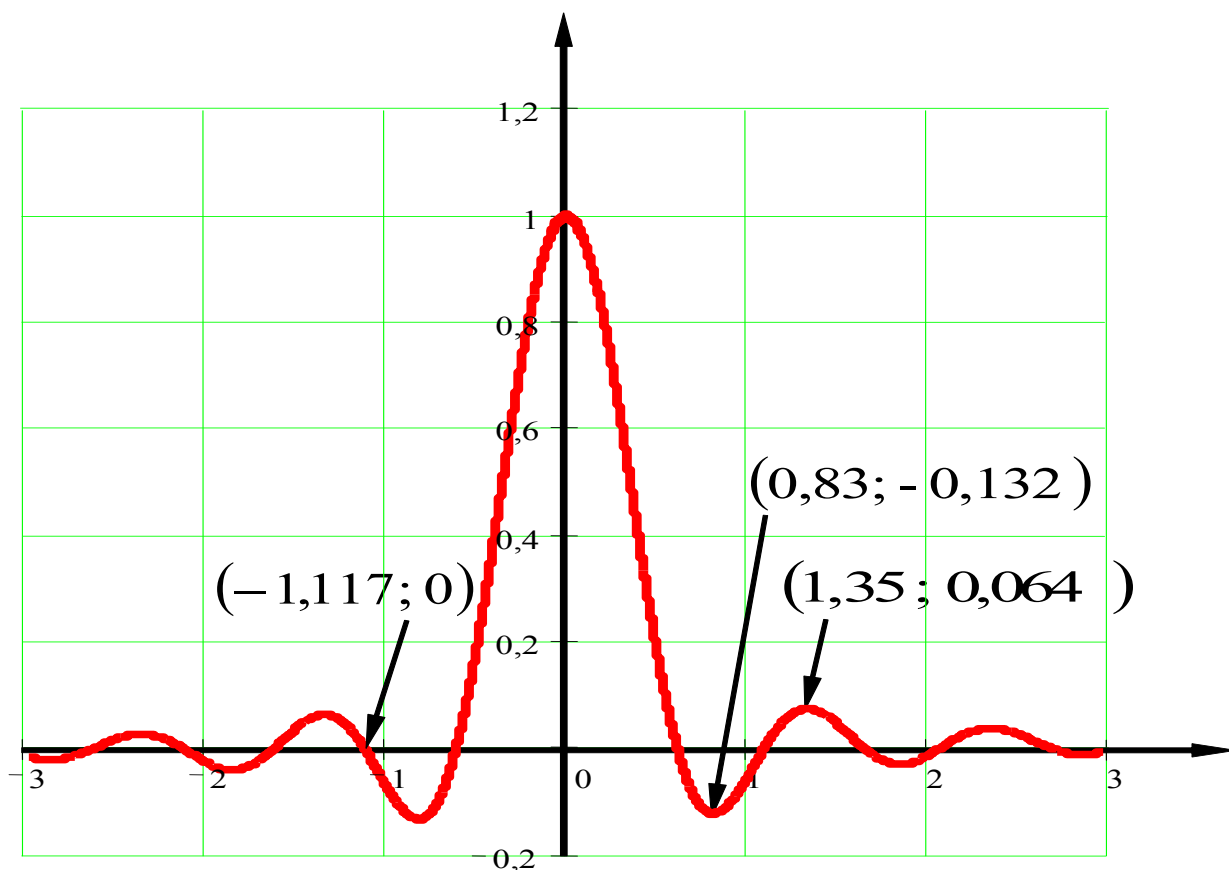
Одномерная sinc<sup>2</sup>-функция в каноническом виде

$$\text{sinc}^2(\pi\nu) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\pi\nu)}{(\pi\nu)^2}, & \nu \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \\ 1, & \nu = 0 \end{cases}$$

Рис. П.6.

## Канонический типовой besinc-сигнал

$\text{besinc}(2\pi\nu)$



$\nu$

Одномерная besinc-функция

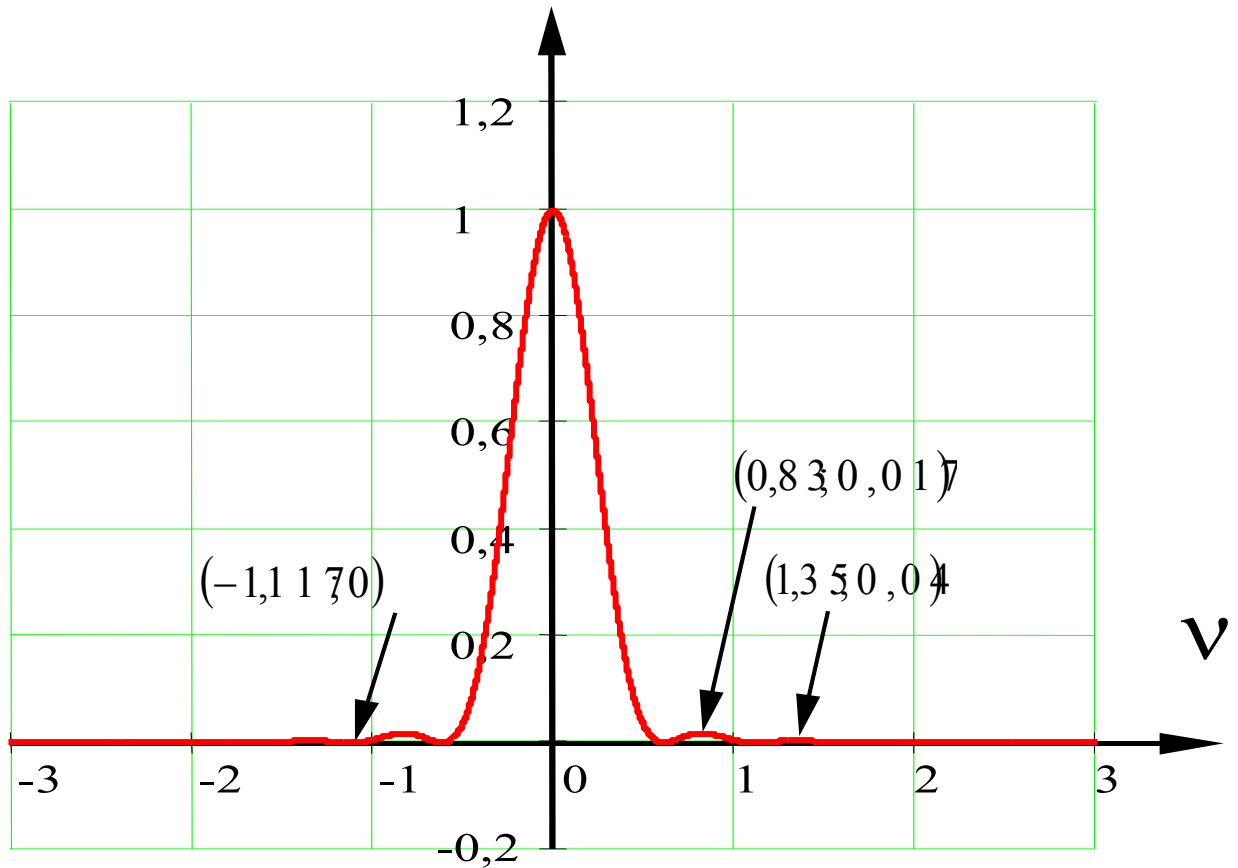
в каноническом виде

$$\text{besinc}(2\pi\nu) = \frac{2J_1(2\pi\nu)}{2\pi\nu}$$

Рис. П.7.

## Канонический типовой $\text{besinc}^2$ -сигнал

$$\text{besinc}^2(2\pi\nu)$$

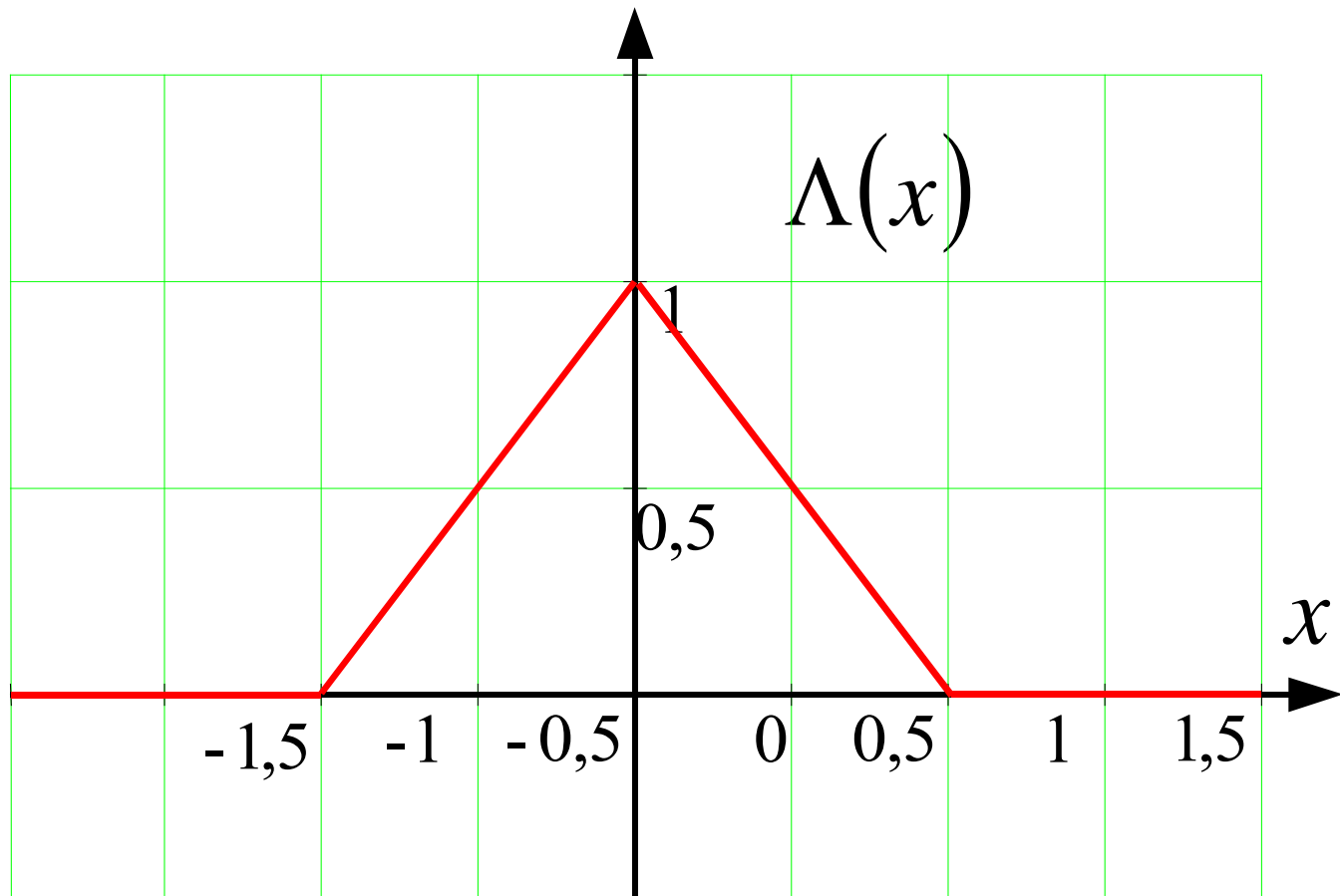


Одномерная  $\text{besinc}^2$ -функция  
в каноническом виде

$$\text{besinc}^2(2\pi\nu) = \left( \frac{2J_1(2\pi\nu)}{2\pi\nu} \right)^2$$

Рис. П.8.

## Канонический 1-м типовой $\Lambda$ -сигнал



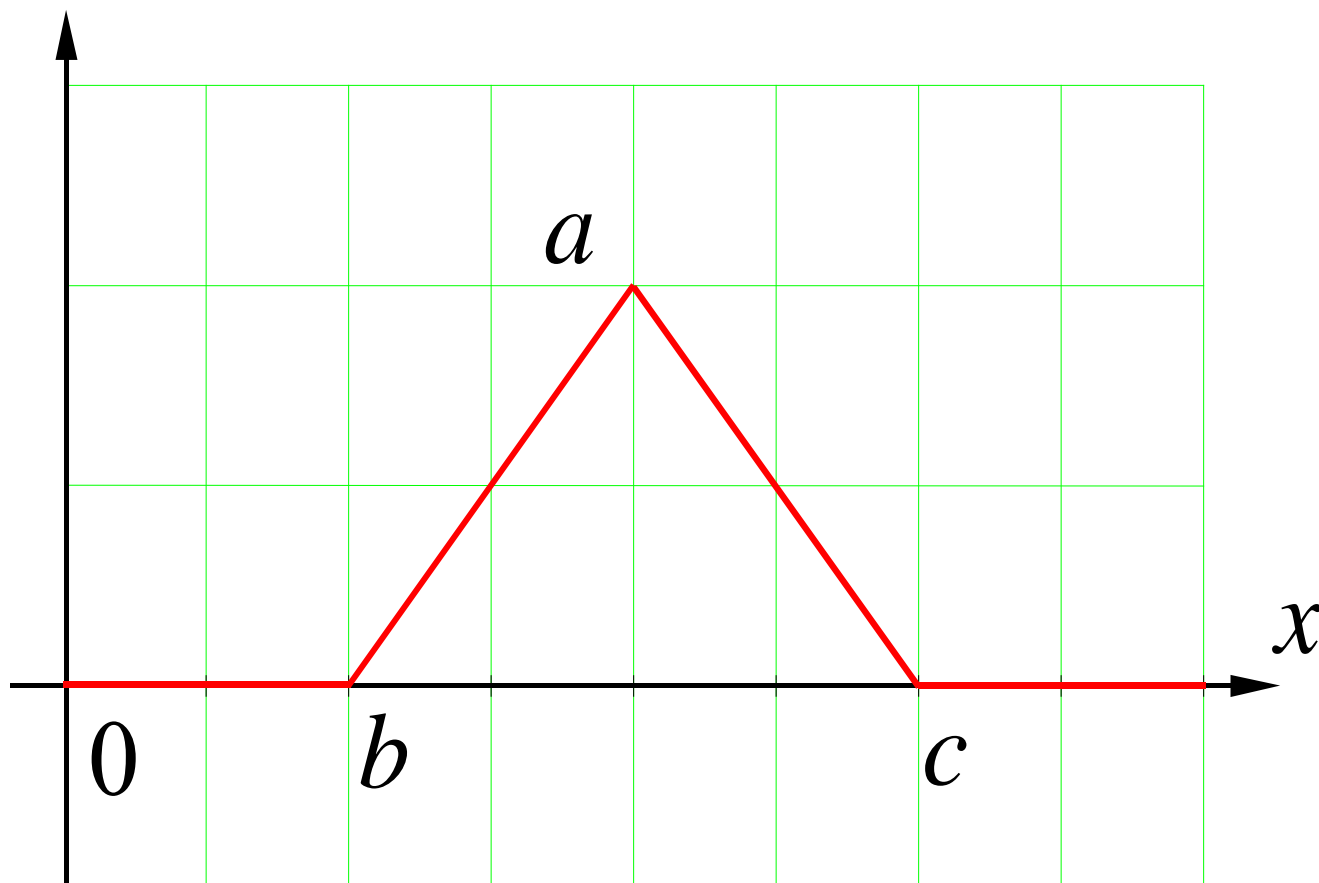
Одномерная  $\Lambda$ -функция в каноническом виде

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 < x \leq 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R}^1 \setminus (-1; 1] \end{cases}$$

Рис. П.9.

## Обобщённый 1-м типовой $\Lambda$ -сигнал

$$a\Lambda\left(\frac{x - (c + b)/2}{c - b}\right)$$



Одномерная  $\Lambda$ -функция в обобщённом виде

$$a\Lambda\left(\frac{x - (c + b)/2}{(c - b)/2}\right) = \begin{cases} a\left(1 - \left|\frac{x - (c + b)/2}{(c - b)/2}\right|\right), & b < x \leq c \\ 0, & x \in (-\infty; b] \cup (c; +\infty) \end{cases}$$

**Рис. П.10.**

# Канонический 3-м $\Lambda(x,y)$ -типовой сигнал

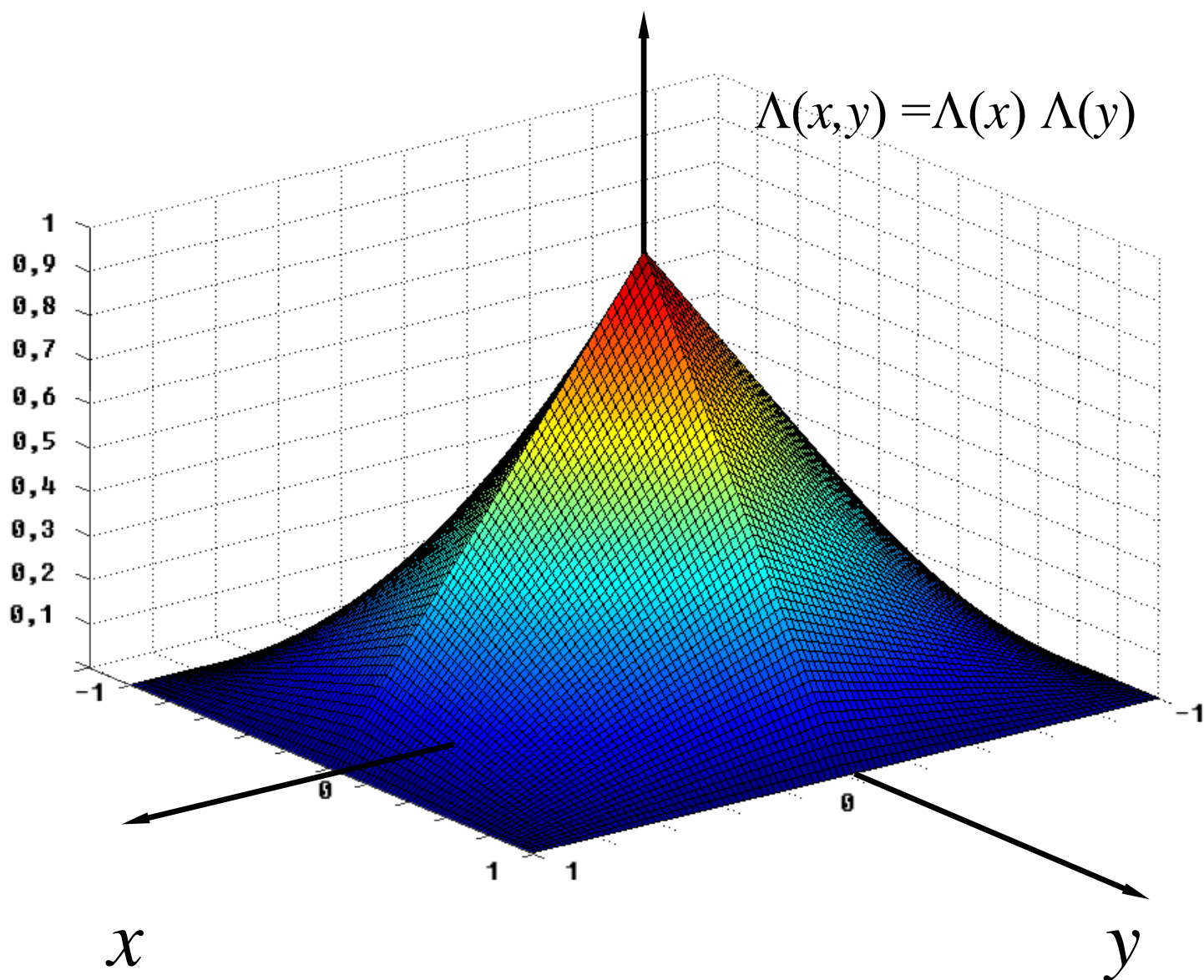
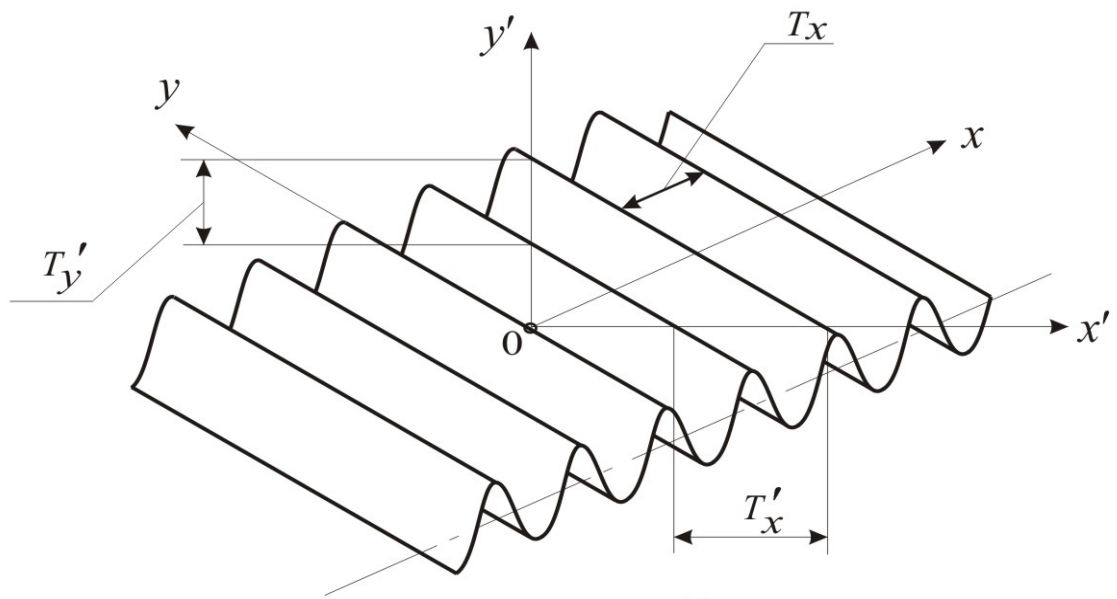


Рис. П.11.

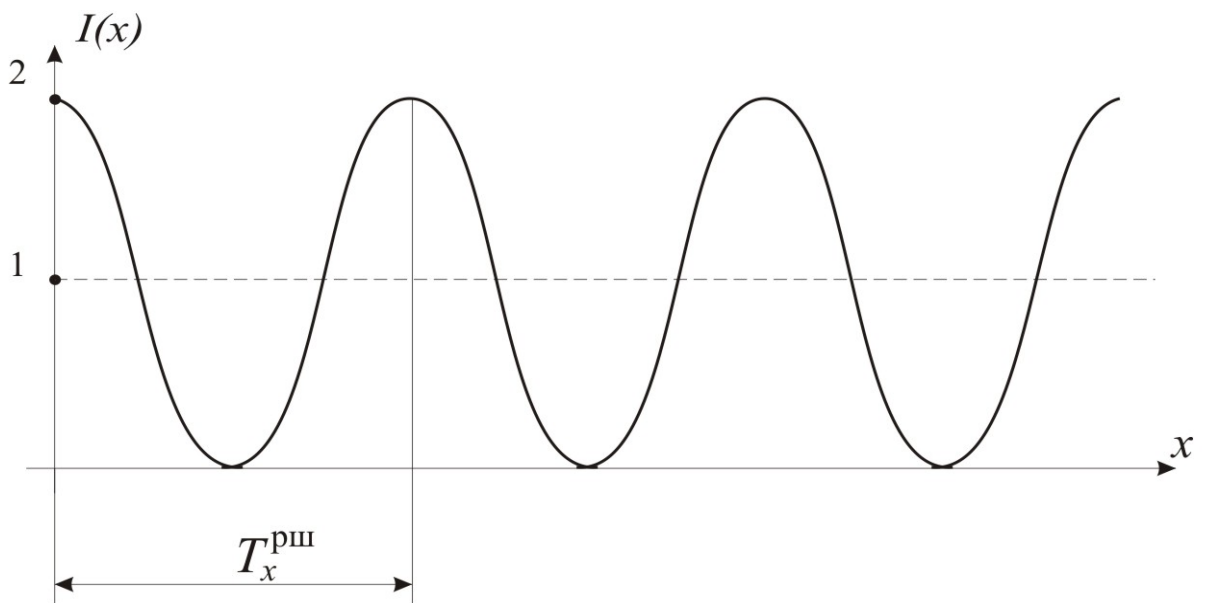
**Трёхмерная ГМТМ интенсивностной пространственно-частотной косинусоидальной решётки**



**Рис. П.12.**

**Сечение интенсивностной двумерной пространственно-частотной косинусоидальной решётки, приведенной на рис. 12, плоскостью  $ZOX$ , или  $IOX$ :**

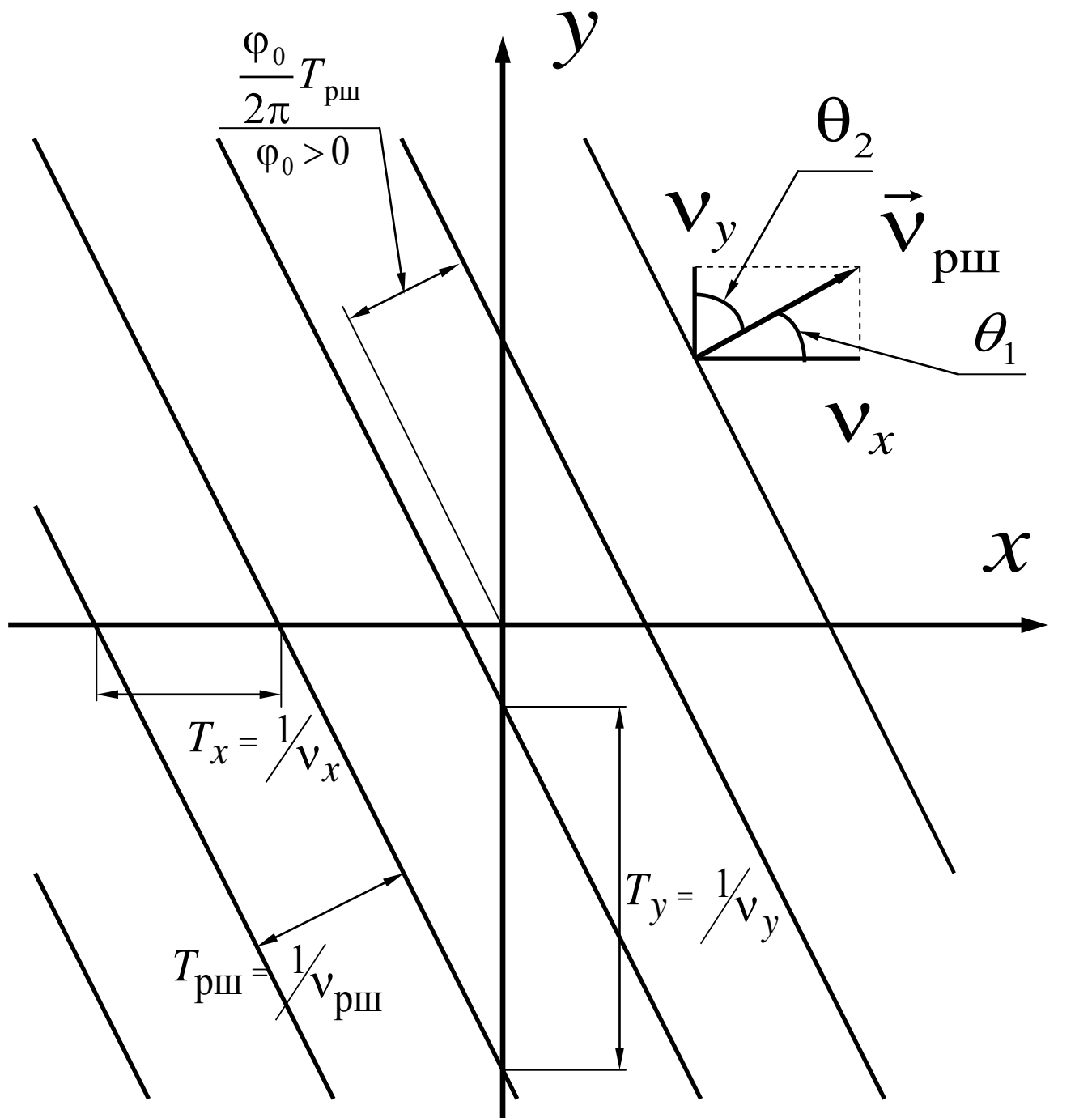
$$I(x) = 1 + \cos(2\pi v_x^{\text{рш}} x), \quad (v_x^{\text{рш}} = 1/T_x^{\text{рш}})$$



**Рис. П.13.**

# Двумерная ГМТМ cos-решётки

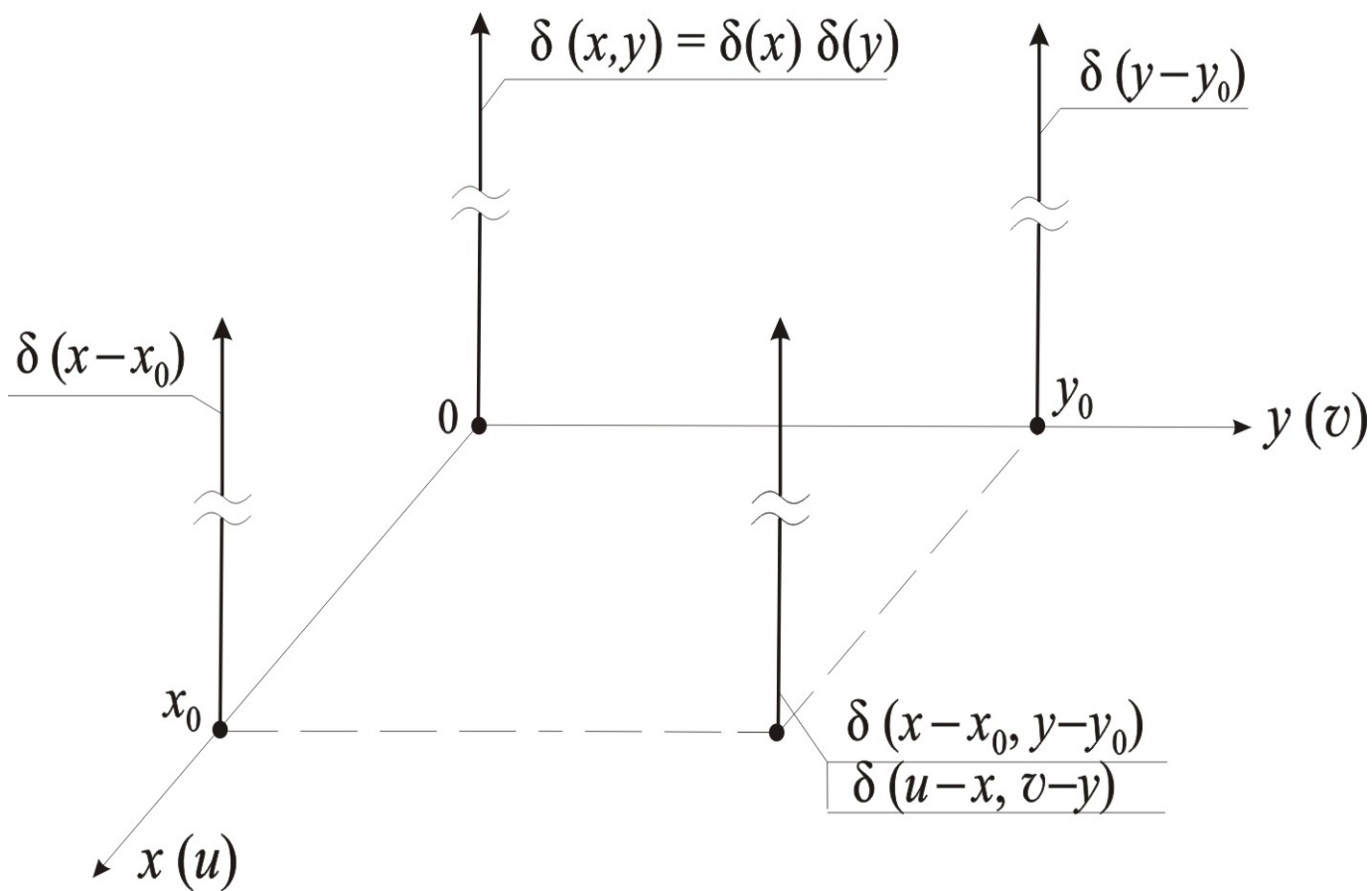
(ВИД СВЕРХУ)



$$\cos\left(2\pi\vec{v}_{rsh}\vec{r} - \varphi_0\right) = \cos\left(2\pi(v_x x + v_y y) - \varphi_0\right)$$

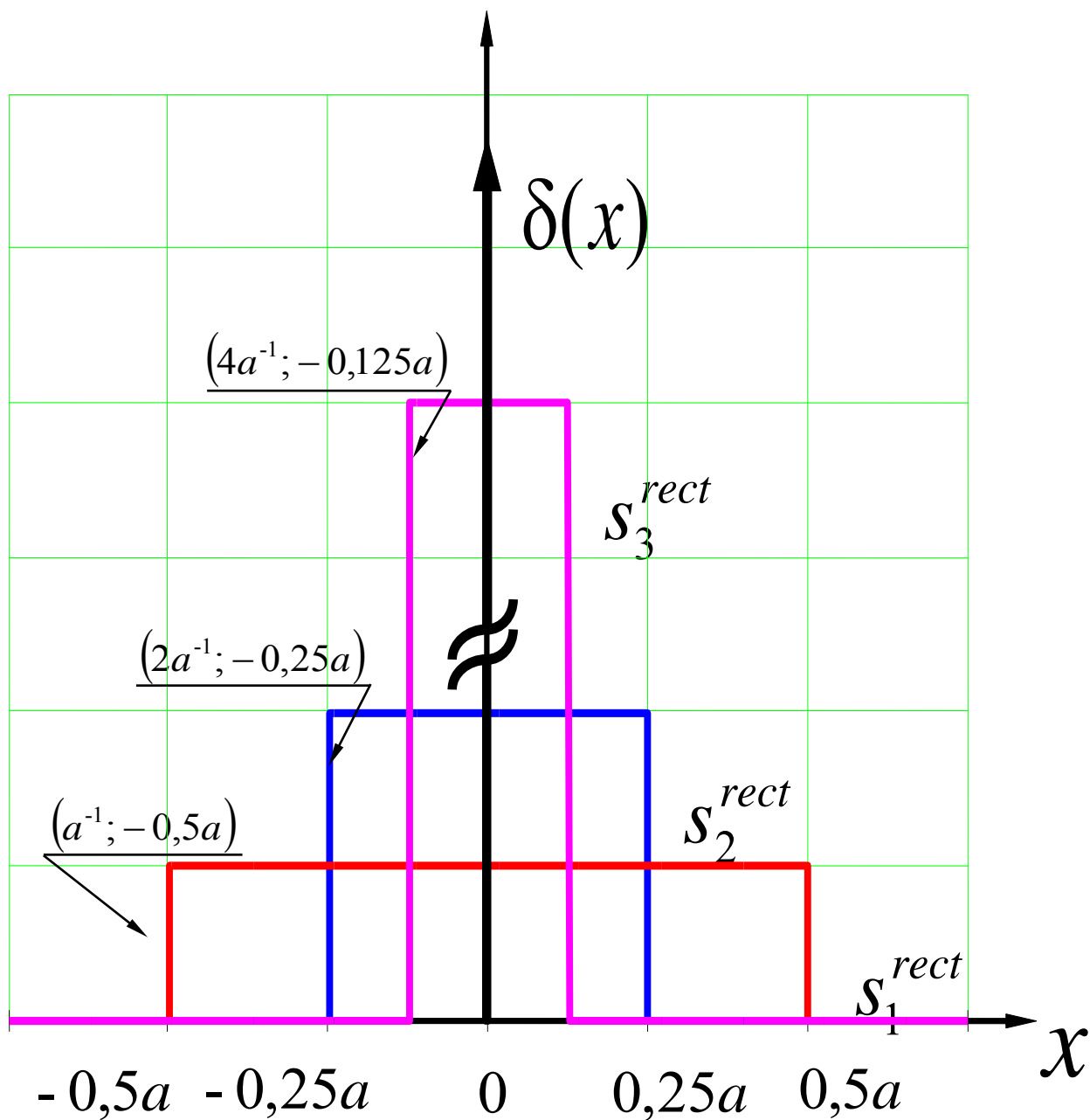
$$T_{rsh} = \frac{1}{v_{rsh}} \quad v_x = \frac{\sin(\theta_1)}{\lambda}$$

Рис. П.14.



**Рис. П.15.**  
**Трёхмерная ГМТМ двумерной  $\delta$ -функции**

Двумерная ГМТМ  $\delta$ -образной  
rect-последовательности



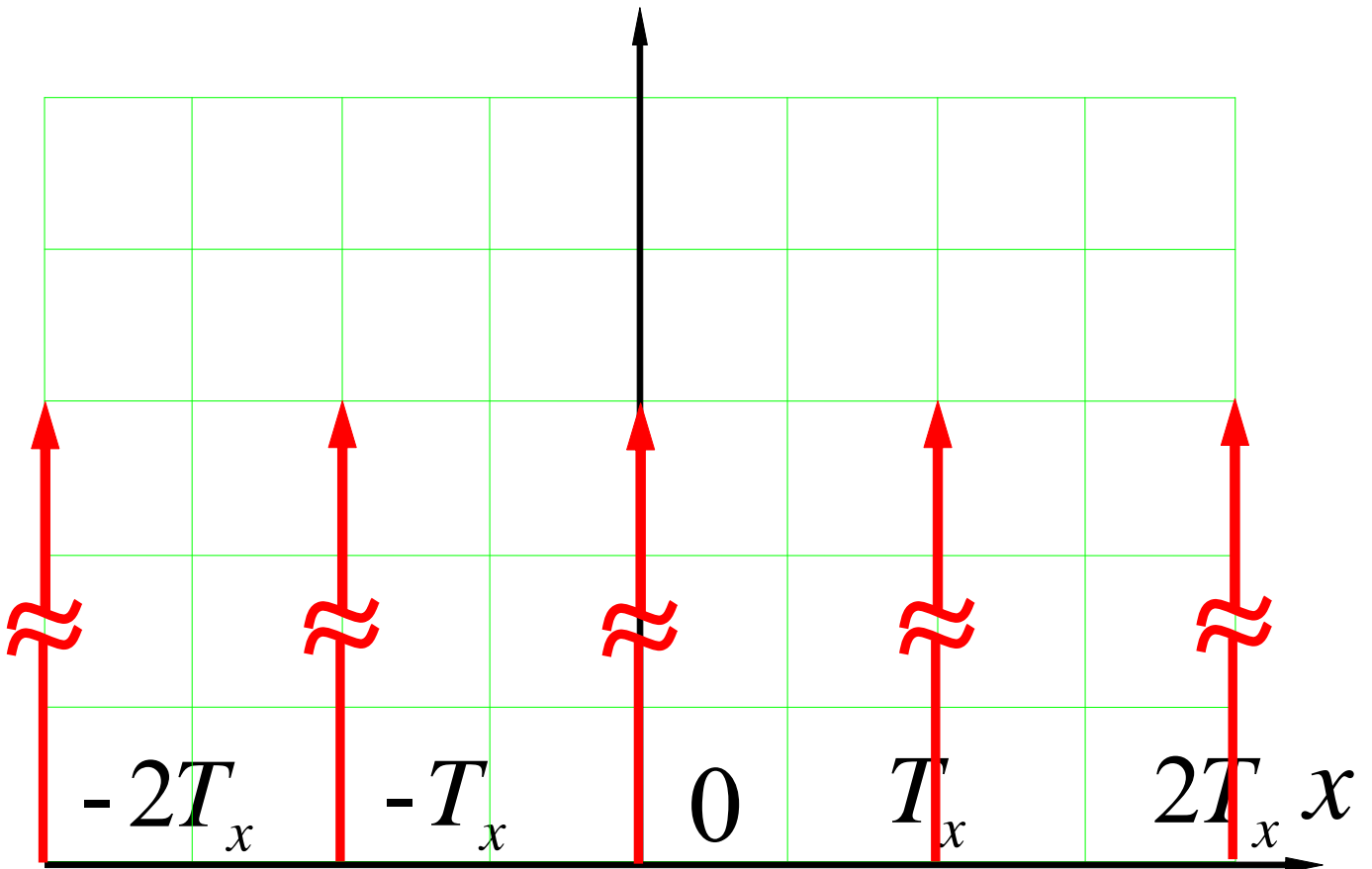
$$\delta(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{\text{rect}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{ab} \text{rect} \left( \frac{x}{a/n}; \frac{y}{b/n} \right)$$

Рис. П.16.

Двумерная ГМТМ обобщенного 1-м типового comb-сигнала

$$\frac{1}{T_x} \text{comb} \left( \frac{1}{T_x} x \right)$$



Одномерная comb-функция в обобщенном виде

$$\frac{1}{T_x} \text{comb} \left( \frac{x}{T_x} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nT_x)$$

Рис. П.17.