Общие законы и уравнения статики жидкостей.

В неподвижной жидкости выделим произвольную точку *M* (*x*,*y*,*z*), находящуюся под давлением *p* (рис.1.6).

Система координат жестко связана с сосудом, содержащим эту жидкость. Около точки выделим параллелепипед с рёбрами *dx, dy, dz*, нормальными осям координат, в котором **точка *M* - одна из вершин**.

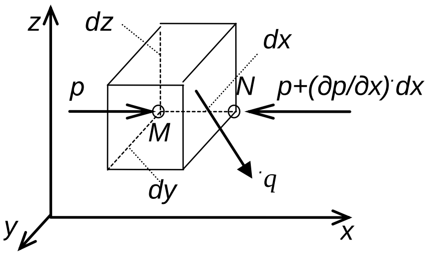


Рис.1.6. К выводу дифференциальных уравнений равновесия жидкости

Рассмотрим условия равновесия выделенного объема жидкости.

Пусть на жидкость внутри параллелепипеда действует ***равнодействующая единичная массовая сила (q)***.

Тогда составляющие массовой силы, действующие на выделенный объем *в направлении осей координат*, будут определяться *произведением массы выделенного объема и единичных составляющих q_x, q_y и q_z этой силы*.

Давление *p* - функция координат *x, y, z*. Вблизи точки *M*, как было показано ранее, по всем направлениям давление одинаково.

При переходе от точки *M* к точке *N* по оси *Ox* давление изменяется

$$\text{от } p \text{ до } [p+(\partial p/\partial x)\cdot dx],$$

где $(\partial p/\partial x)\cdot dx$ – частный дифференциал, определяющий изменение (повышение или понижение) давления при переходе от одной точки к другой на расстоянии *dx* вдоль оси *Ox*.

В проекции на ось $0x$ получаем:

$$pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz + \rho q_x dxdydz = 0.$$

Отсюда получаем: $$\partial p/\partial x = \rho\cdot q_x.$$

Аналогично находим уравнения равновесия сил и для других осей.

Окончательно получаем систему дифференциальных уравнений равновесия сил в жидкости:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho q_x;$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho q_y;$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho q_z,$$

называемых дифференциальными уравнениями равновесия жидкости (уравнения Эйлера).

Каждое из полученных уравнений в отдельности позволяет определить закон распределения гидростатического давления вдоль соответствующей оси координат; совокупность двух уравнений - закон распределения гидростатического давления в соответствующей плоскости; совокупность трех уравнений - закон распределения гидростатического давления в объеме.

Однако, для практического использования, удобнее вместо системы получить **одно эвивалентное уравнение,** не содержащее частных производных.

Для этого, умножим на *dx; dy; dz* соответственно все три уравнения и произведём сложение.

Тогда, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\left(q_x dx + q_y dy + q_z dz\right).$$

Т.к. гидростатическое давление есть функция только координат, левая часть полученного уравнения представляет собой ***полный дифференциал гидростатического давления.***

Тогда дифференциальное уравнение равновесия для жидкости, находящейся в покое, можно представить в виде:

$$dp = \rho\,(q_x \cdot dx + q_y \cdot dy + q_z \cdot dz).$$

Это уравнение выражает приращение давления ***dp*** при изменении координат ***dx, dy, dz*** в общем случае равновесия жидкости и **справедливо как для капельной жидкости, так и для газа.**

Его также называют **дифференциальным уравнением равновесия жидкости.**

Из данного уравнения легко получить уравнение ПРД, т.е. поверхности, давление во всех точках которой одинаково ***(p = const).***

При ***p = const,*** имеем ***dp = 0***, а так как плотность ***ρ*** не м.б. равна нулю, следовательно:

$$q_x \cdot dx + q_y \cdot dy + q_z \cdot dz = 0$$ – *дифференциальное уравнение ПРД или ПУ*.

Свойства ПУ:

1) *ПУ перпендикулярны массовым силам.*

Выбрав произвольное направление ***S,*** заменим уравнения Эйлера следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho q_s;$$

где $q_s = q \cos(q \wedge s)$ – проекция единичной массовой силы на направление ***S.***

Пусть направление ***S*** совпадает с ПУ. Тогда имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = 0\,.$$

Но, так так единичная массовая сила ***q*** не равна нулю, следовательно:

$$\cos(q \wedge s) = 0.$$

Вывод: *Угол между направлением q и **S*** равен 90 градусов.

2) *Свободная поверхность (СП) также есть ПУ.*

СП – это поверхность, по которой капельная жидкость граничит с газообразной средой.

Давление газа на поверхности жидкости распределено равномерно. Следовательно, СП – также есть ПУ.

3) *ПУ зависят только от распределения ускорения массовых сил и не зависят от рода жидкости.*

Это утверждение следует из дифференциального уравнения ПУ, где нет величин, характеризующих физические свойства жидкости.

4) *Поверхность раздела 2-х (не смешивающихся) жидкостей совпадает с ПУ.*

Основное уравнение гидростатики для несжимаемой жидкости, подверженной действию сил тяжести и давления.

Вывод уравнения.

Рассмотрим распространенный частный случай равновесия жидкости, когда на неё действует лишь одна массовая сила — **сила тяжести.**

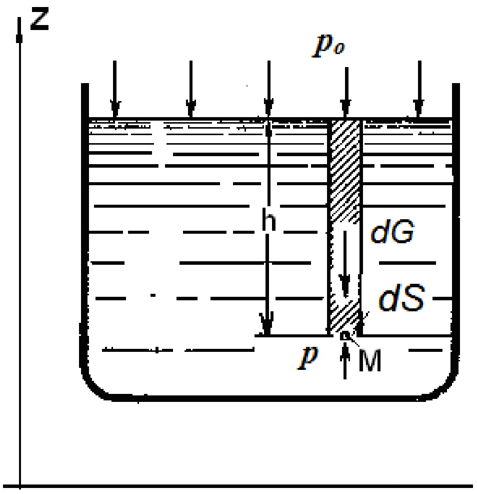
Вектор силы тяжести направлен вертикально. Значит ПУ (включая СП), направлены горизонтально.

Пусть жидкость содержится в сосуде (см. рисунок) и на её СП действует давление p_o. Найдём гидростатическое давление p в произвольно взятой точке M, расположенной на глубине h.

Выделим около точки М *элементарную горизонтальную площадку* dS и построим на ней *вертикальный цилиндрический объем высотой* h, то есть воспользуемся ***«принципом затвердения»***.

Рассмотрим условие равновесия выделенного объёма жидкости.

Давление жидкости на нижнее основание цилиндра (p) теперь будет внешним и направлено по нормали внутрь объёма, т. е. вверх.



Вывод основного уравнения гидростатики

Запишем условие равновесия выделенного объёма в проекции ***на вертикальную ось Z:***

$$pdS - p_o\,dS - dG = 0\ ,$$

где dG - сила веса жидкости в объёме dW,

или

$$pdS - p_o\,dS - \rho\cdot(h\cdot dS)\cdot g = 0\ .$$

Сократив выражение на dS и выразив p, получим **основное уравнение гидростатики:**

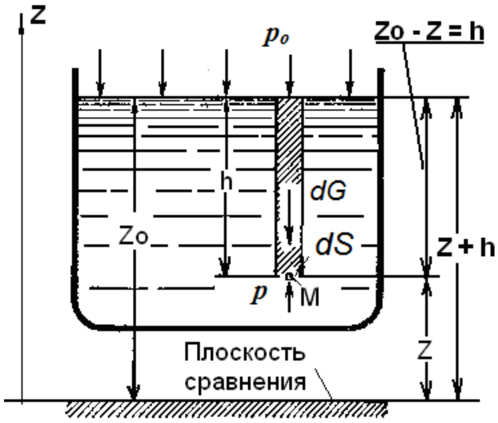
$$p = p_o \pm \rho gh, \tag{1}$$

где p_o – внешнее давление;

ρgh – весовое давление.

Используя полученное уравнение можно определить давление в любой точке покоящейся жидкости.

Величина p_o является одинаковой для всех точек объёма жидкости, поэтому, учитывая основное уравнение гидростатики, можно сказать, что **давление, приложенное к внешней поверхности жидкости, передаётся во все точки этой жидкости и по всем направлениям одинаково.**



Вывод основного уравнения гидростатики
Z - геометрический напор,
Zo-Z - пьезометрический напор,
Z + h - гидростатический напор

Возьмём на произвольной высоте относительно сосуда горизонтальную плоскость, которую назовём ***плоскость сравнения*** (см. рисунок), от которой вертикально вверх будем отсчитывать координаты.

Обозначив через **z** координату точки **M**, через $\mathbf{z_0}$ — координату свободной поверхности жидкости и заменив в уравнении (1) $\boldsymbol{h}$ на $(\mathbf{z_0} — \mathbf{z})$, получим:

$$p = p_o + h\rho g = p_o + (z_0 — z)\rho g = p_o + z_0\rho g - z\rho g .$$

Преобразовав и разделив уравнение на ρg, получим другую форму записи основного уравнения гидростатики: $z + p/(\rho g) = z_0 + p_o/(\rho g)$. (2)

Так как точка М взята произвольно, можно утверждать, что для всего рассматриваемого неподвижного объёма жидкости - $z + p/(\rho g) = const.$

Определения:

1. **Координата Z** (точки М относительно произвольной плоскости сравнения) **называется геометрическим напором.**
2. **Величина** $\mathbf{h = p/(\rho g) = (z_0 — z)}$ **называется пьезометрическим напором.**
3. **Сумма** $\mathbf{z + h = z + p/(\rho g)}$ **называется гидростатическим напором.**

Физический смысл полученного уравнения состоит в том, что **полный гидростатический напор равен удельной потенциальной энергии покоящейся жидкости.**

Под удельной энергией подразумевается энергия, отнесенная к единице силы тяжести. Численное значение потенциальной энергии некоторой частицы равно той работе, которую могут совершить силы, действующие на частицу при перемещении из данного положения в такое, при котором потенциальная энергия равна нулю.

Уравнение полного гидростатического напора справедливо для любых точек однородной жидкости, находящейся в равновесии.

Для удобства дальнейшего рассмотрения введём следующие понятия:

- СП (Свободная поверхность) - поверхность раздела жидкой и газообразной среды.

- ПП (Пьезометрическая поверхность) - поверхность с давлением, соответствующим атмосферному.

Пьезометрическая высота. Пьезометрическая высота - высота, равная $p_{изб}/(\rho g)$, представляет собой высоту столба данной жидкости и соответствует давлению $p_{изб}$. Пьезометрическую высоту $h_{пM}$, соответствующую избыточному давлению в т.M (рис.1.8), можно наблюдать по пьезометру, который представляет собой прозрачную трубку, один конец которой присоединен к баку. а другой открыт в атмосферу:

$$p_{абсM}=p_{атм}+\rho g h_{пM} .$$

Если давление в баке превышает атмосферное $p_б > p_{атм}$, то пьезометрическая поверхность (*ПП*) располагается выше свободной поверхности (СП).

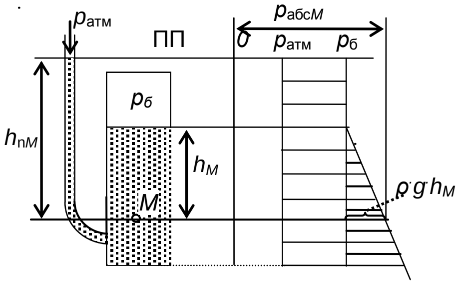


Рис.1.8. Пьезометр, присоединенный к баку, и эпюра распределения давления в ба-

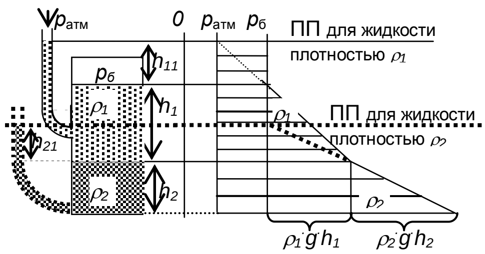


Рис.1.9. Пьезометр, присоединенный к баку, и эпюра распределения давления для двух жидкостей

На рис.1.9 изображена эпюра распределения давления от двух несмешивающихся жидкостей, находящих в баке, где $\boldsymbol{h_{11}=p_б/\rho_1 g}$ и $\boldsymbol{h_{21}=(p_б+\rho_1 g h_1)/\rho_2 g}$.

Как следует из рисунка, эпюра давления жидкости на стенку получается сложением эпюр от каждой жидкости.

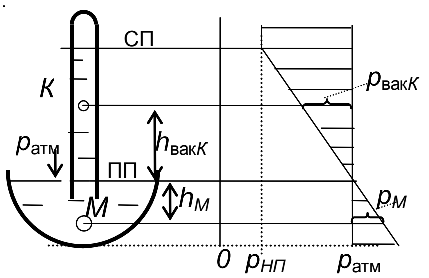


Рис.1.10. Трубка Торичелли

Вакуумметрическая высота. Понятие вакуума и его связь с избыточным и абсолютным давлениями разъяснены в подразделе «Шкала давления». В приборе "трубка Торричелли" пьезометрическая поверхность *ПП* в чашке располагается ниже свободной поверхности *СП* в трубке (рис.1.10), и давление на пьезометрической (свободной) поверхности чашки равно

$$\boldsymbol{p_{атм} = p_к + \rho g h_{вакK}} ;$$

давление вакуума в точке К $\boldsymbol{p_{вакK} = \rho g h_{вакK}}$ (избыточное отрицательное давление).

Абсолютное давление в точке М равно - $\boldsymbol{p_{абсM} = p_{атм} + \rho g h_M}$.

Приборы для измерения давления.

Все приборы, используемые для измерения давления в жидкости, по сути, являются дифференциальными, так как они измеряют **не абсолютное давление, а разность между измеряемым давлением в точке *1* и давлением в точке *2*, принимаемым за начало отсчета**.

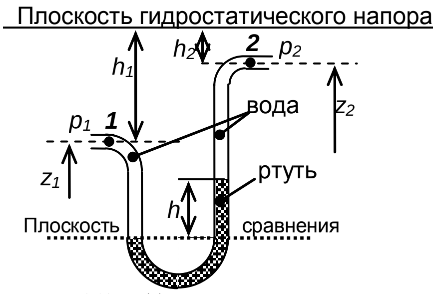


Рис.1.11. Дифферециальный жидкостной манометр

Как правило, на практике за начало отсчёта принимают атмосферное давление.

Измеряют давление с помощью **пьезометра**, состоящего из вертикальной стеклянной трубки и называемого жидкостным манометром.

Однако, в настоящее время на практике жидкостные приборы используются редко.

Но в условиях задач встречаются регулярно в качестве приборов для наглядного представления граничных условий.

Пример - дифференциальный жидкостной манометр (рис.1.11), который служит для измерения разности статических напоров в точках 1 и 2, т.е.

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho_{H_2O} g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho_{H_2O} g}\right) = \frac{\rho_{pm} - \rho_{H_2O}}{\rho_{H_2O}} h$$

где $\boldsymbol{\rho_{рт}}$ и $\boldsymbol{\rho_{H2O}}$ - плотности соответственно ртути и воды;

$\boldsymbol{z_1}$ и $\boldsymbol{z_2}$ - координаты положения точек *1* и *2* подключения измерительных линий дифференциального жидкостного манометра относительно плоскости сравнения.

Однако, когда давления превышают 0,02МПа (*высокий столб жидкости, прочностные свойства стекла и т.п.*) применяются друге приборы.

В практике гидравлических измерений все приборы можно классифицировать:

а) *по характеру измеряемой величины:*
- манометры ($\boldsymbol{p_{изб}}$);
- вакуумметры ($\boldsymbol{p_в}$);
- мановакуумметры ($\boldsymbol{p_{изб}}, \boldsymbol{p_в}$);
- барометры ($\boldsymbol{p_{ат}}$);
- дифференциальные манометры (для измерения разности давлений в 2-х точках; $\Delta \boldsymbol{p}$).

б) *по принципу действия:*
- жидкостные (измеряют относительно небольшие давления; от 1 до 3 атм);
- пружинные;
- поршневые (очень точные; служат для тарировки технических приборов);
- электрические манометры (комбинированного типа – включают в себя датчики давления и вторичную аппаратуру).