Сила давления жидкости на стенки сосуда.

Сила давления жидкости на плоскую стенку.

В общем случае действие жидкости на твёрдую поверхность сводится к сумме элементарных сил, действующих на малых площадках, составляющих эту поверхность.

Общим методом определения сил давления жидкости на стенки сосуда *является получение функции, выражающей закон распределения давления на заданной поверхности и интегрирование этой функции по площади стенки.*

Сила давления жидкости на плоскую стенку с равномерным распределением давления.

Равномерное распределение давления по осям координат может создаваться покоящимся газом.

В капельной жидкости равномерное распределение давления наблюдается при её воздействии на горизонтальные площадки в случае абсолютного покоя или при движении сосуда вертикально вверх или вниз с ускорением. В этом случае *суммируемые векторы элементарных сил составляют систему параллельных и одинаково направленных сил.*

Величина силы P при равномерном распределении давления не зависит от ориентации плоской стенки площадью S в пространстве и равна

$$P = p \cdot S.$$

Линия действия силы P проходит через центр тяжести стенки S рассматриваемого сосуда.

Сила давления жидкости на плоскую стенку с неравномерным распределением давления.

Рассмотрим общий случай определения силы давления жидкости на площадку (*плоскую стенку*) AB, расположенную в плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис.1.12.)

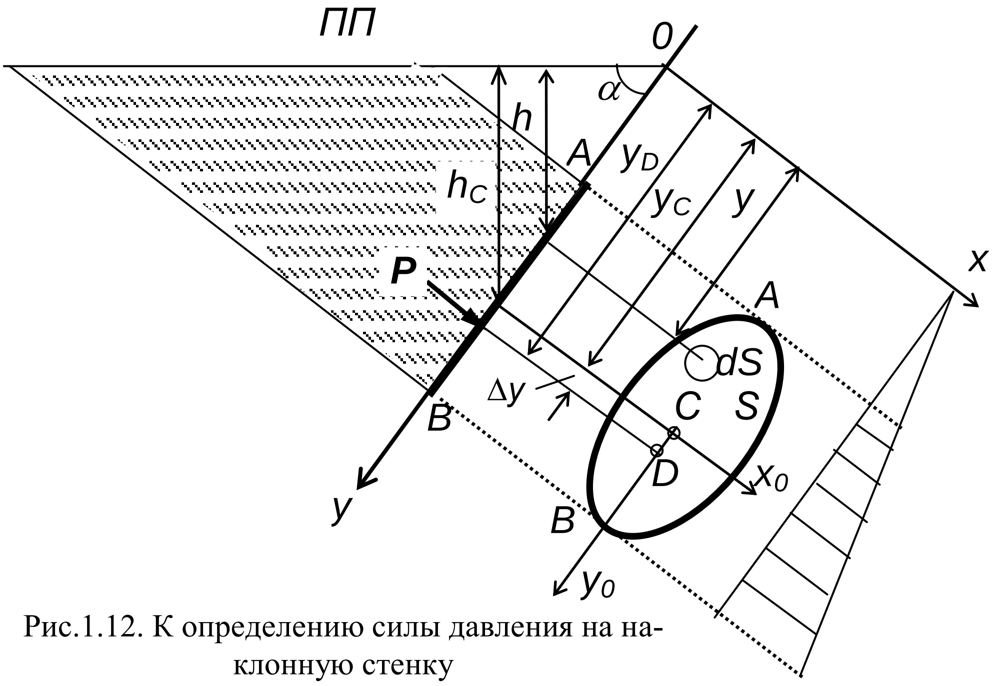

Рис.1.12. К определению силы давления на наклонную стенку

Рассмотрим сначала простейший случай, когда плоская стенка подвергается ***одностороннему давлению жидкости*** (*на не смоченную стороне стенки воздействует атмосферное давление*). СП совпадает с *ПП*.

Направление осей:

0x - пересечение стенки и ПП;
0y - вдоль стенки перпендикулярно оси ***0x***.

Для наглядности рассмотрения повернём плоскость ***x0y***, перпендикулярную плоскости рисунка, вокруг оси ***0y*** на 90º.

Одновременно построим эпюру изменения давления по наклонной стенке.

Выделим на площадке ***AB*** элементарную площадку ***dS***, расположенную на глубине ***h*** от СП и определим силу действия на эту площадку:

$$dP = pdS = \rho ghdS.$$

Систему элементарных сил ***dP***, одинаковых по направлению, но различных по величине, можно свести в данном случае к результирующей силе давления жидкости на площадку ***AB***, величина которой определяется как:

$$P = \int_S p \cdot dS = \rho g \int_S h \cdot dS = \rho g \cdot \sin\alpha \int_S y \cdot dS ,$$

где $\boldsymbol{y}$ - координата центра тяжести элементарной площадки относительно оси $\boldsymbol{0x}$. Результирующая сила давления жидкости $\boldsymbol{P}$ нормальна плоской стенке $\boldsymbol{AB}$.

Заметим, что

$\int_S y \cdot dS = y_C \cdot S$ - статический момент (из теоретической механики),

где $\boldsymbol{S}$ - площадь площадки $\boldsymbol{AB}$;

$\boldsymbol{y_C}$ - координата центра тяжести *(ЦТ)* $\boldsymbol{C}$ площадки $\boldsymbol{AB}$ относительно оси $\boldsymbol{0x}$, измеренная вдоль оси $\boldsymbol{0y}$.

В итоге получаем:

$$P = \rho g h_C S = p_C S = \rho g y_C \sin\alpha \cdot S ,$$

т.е. ***полная сила давления жидкости P на площадку AB равна произведению площади этой площадки на величину гидростатического (избыточного) давления в ЦТ площадки AB.***

Произведя некоторые преобразования можно получить следующее выражение:

$$\boldsymbol{P = \rho \cdot g \cdot h_C \cdot S = \rho (g \cdot \cos\alpha) \cdot (h_C / \cos\alpha) \cdot S = \rho \cdot (g \cdot \cos\alpha) \cdot W_{ТД},}$$

где $\boldsymbol{W_{ТД} = (h_C / \cos\alpha) \cdot S}$ - объём ***"тела давления"*** ***(ТД)*** (на рис. 1.12 заштрихован), построенного на площадке $\boldsymbol{AB}$ до ПП в направлении действия силы;

$\boldsymbol{g\cos\alpha}$ - ускорение сил тяжести в заданном направлении (перпендикулярно площадке $\boldsymbol{AB}$);

$\boldsymbol{\rho W_{ТД}}$ - масса тела давления, заполненного этой жидкостью.

Вывод: ***Сила давления P жидкости на площадку AB численно равна силе тяжести жидкости в объёме ТД в заданном направлении (в направлении действия силы P).***

Линия действия силы давления жидкости $\boldsymbol{P}$ пересекает площадку $\boldsymbol{AB}$ в некоторой точке $\boldsymbol{D}$, часто называемой ***центром давления (ЦД)***. Для определения координат этой точки ($\boldsymbol{x_D}$; $\boldsymbol{y_D}$) воспользуемся ***теоремой моментов*** (*Момент равнодействующей силы относительно оси* $\boldsymbol{Ox}$ *равен сумме моментов составляющих элементарных сил относительно этой же оси*):

$$\boldsymbol{M_x = \sum m_x} \qquad \text{или} \qquad P \cdot y_D = \int_S y \cdot dP \, ,$$

где $\boldsymbol{y_D}$ - координата прохождения через площадку $\boldsymbol{AB}$ линии действия силы давления $\boldsymbol{P}$ на площадку $\boldsymbol{AB}$.

Отсюда имеем:

$$y_D = \frac{\int_S y dP}{P} = \frac{\int_S y \rho g y \sin \alpha dS}{\rho g y_C in\alpha\, S} = \frac{\int y^2 dS}{y_C S} = \frac{J_x}{y_C \quad S} ,$$

где $J_x = \int_S y^2 \cdot dS$ - момент инерции площадки $\boldsymbol{AB}$ относительно оси $\boldsymbol{0x}$.

Воспользовавшись *формулой параллельного переноса осей (из курса теоретической механики), получим:*

$$J_x = J_{x0} + y_C^2 \cdot S \, ,$$

где $\boldsymbol{J_{x0}}$ - момент инерции площадки $\boldsymbol{AB}$ относительно центральной оси $\boldsymbol{Cx_0}$, проходящей через ЦТ $\boldsymbol{C}$ площадки $\boldsymbol{AB}$, параллельной оси $\boldsymbol{0x}$.

В итоге имеем:

$$y_D = y_C + \frac{J_{x0}}{y_C \cdot S} \, ,$$

Так как знаки обоих членов правой части полученного выражения положительные, т.е. точка $\boldsymbol{D}$, через которую проходит линия действия силы давления $\boldsymbol{P}$ жидкости на площадку $\boldsymbol{AB}$, расположена ниже ЦТ $\boldsymbol{C}$ на величину:

$$\Delta y = \frac{J_{x0}}{y_C \cdot S}.$$

Чем больше угол α наклона стенки, тем больше Δy, которое достигает максимального значения при $\alpha = 90^0$ (*вертикальная стенка*).

Если ось x_0 или перпендикулярная ей центральная ось y_0, являются осями симметрии стенки, то центр давления лежит на оси y_0. Если площадка AB имеет вертикальную ось симметрии, то естественно точка D будет лежать на этой оси x_0, т.е. $x_{0D} = 0$ и $x_D = x_C$.

В противном случае для нахождения второй координаты необходимо составлять уравнения равновесия моментов сил относительно оси $0y$ для определения смещения Δx центра давления от ЦТ вдоль оси x_0.

В общем случае

$$P \cdot x_D = \int_S x \cdot dP \quad \text{и} \quad x_D = \int \frac{x}{P} dP = x_C + \frac{J_{x0y0}}{y_C S},$$

где J_{x0y0} - центробежный момент площадки AB относительно центральных осей x_0 и y_0, проходящих через ЦТ C и параллельных осям $0x$ и $0y$.

Полученные значения x_D и y_D будут координатами воображаемой точки D (*центр давления - ЦД*) пересечения линией действия силы P площадки AB.

Полученные зависимости справедливы при любом $p_{изб}$ в ЦТ площадки стенки, в том числе и при вакууме в ЦТ, т.е. h_C и y_C - отрицательные. При этом ЦД располагается выше ЦТ $(\Delta y < 0)$, а результирующая сила, воспринимаемая стенкой, направлена внутрь жидкости, ПП пересекает стенку, а эпюра распределения давления меняет знак.

При наличии над СП жидкости $p_{изб}$, одинаково передаваемого всем точкам площадки AB, результирующая сила давления на площадку определяется как

$$P = (p_{изб} + \rho \cdot g \cdot h_C) S.$$

На рис.1.13. показаны эпюры распределения давления и силы давления на стенку сосуда для ***3-х характерных положений ПП*** - (ПП1, ПП2 и ПП3).

Избыточное давление в ЦТ C площадки-крышки соответственно:

$$p_{Cизб1} > 0; \quad p_{Cизб2} = 0 \quad \text{и} \quad p_{Cизб3} < 0.$$

В случае, когда ПП ($p_{Cизб2}=0$) проходит через ЦТ площадки, эпюры распределения

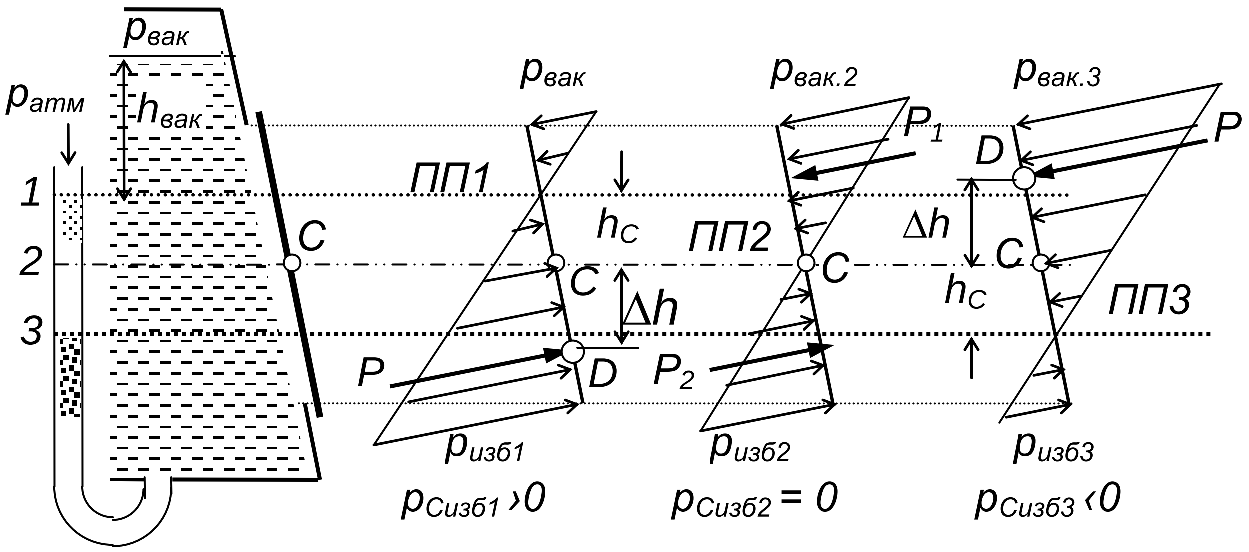

Рис.1.13. Силы давления и положение пьезометрической поверхности

давления соответствуют 2-м равным и противоположно направленным силам давления $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{P_2}$, *результирующая которых равна нулю*, и воздействие сил давления жидкости на стенку сводится к появлению *моментa от этой пары сил*.

В других случаях сила давления жидкости на стенки определяется как:

$$\boldsymbol{P = \rho \cdot g \cdot h_C S},$$

где $\boldsymbol{h_C}$ - глубина погружения ЦТ площадки от ПП.

При одностороннем воздействии давления жидкости на стенку полное силовое воздействие можно представить в виде силы P, линия действия которой проходит через ЦТ площадки, и момента пары сил:

$$\boldsymbol{M = P \cdot \Delta y = \rho \cdot g \cdot J_{x0} \cdot \sin\alpha},$$

не зависящего от величины $\boldsymbol{p_{изб}}$ в ЦТ.

В общем случае, иногда полное силовое воздействие жидкости на плоскую стенку сосуда представляют как сумму сил избыточного давления $\boldsymbol{P_{BH}}$ и силы тяжести ТД $\boldsymbol{P_{BC}}$:

$$P = P_{BH} + P_{BC} = p_{изб} \cdot S + \rho g \cdot \cos\alpha \cdot W = p_{изб} \cdot S + \rho g \cdot h_C \cdot S.$$

Силы давления жидкости на криволинейную стенку с неравномерным распределением давления.

Рассмотрим общий случай определения силы давления жидкости на площадку ***AB*** криволинейной поверхности некоторого объёма (рис.1.14), над СП которого имеется избыточное давление $p_{изб}$.

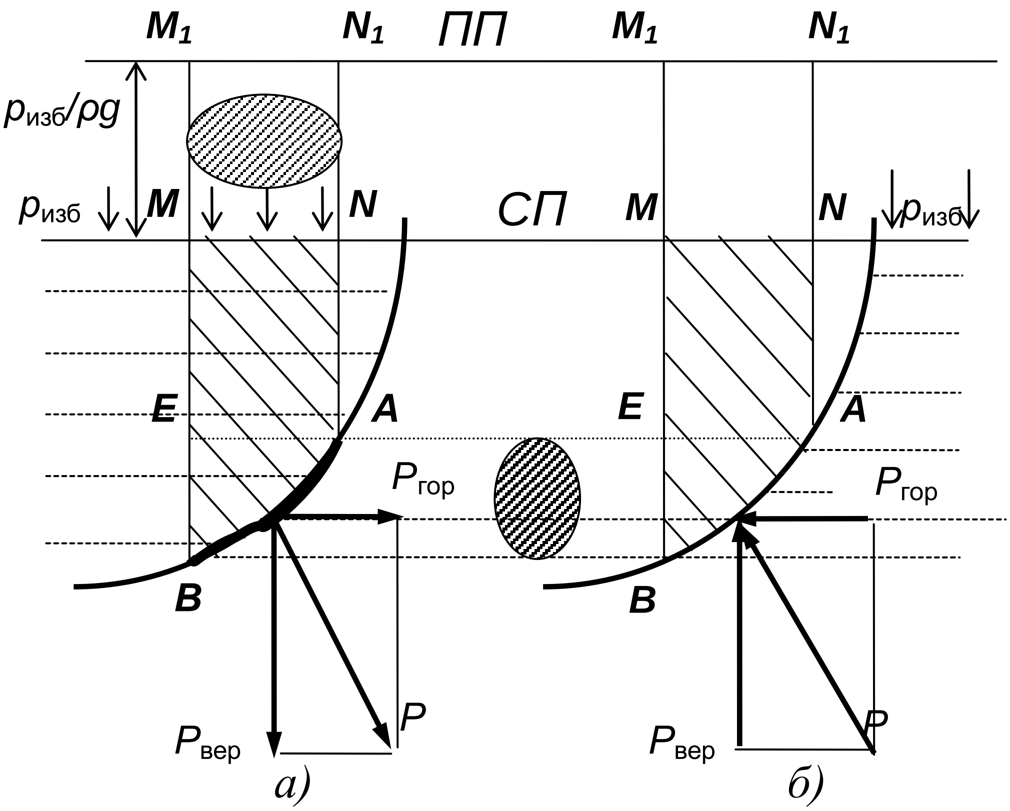

Рис.1.14. Схема определения силы давления на криволинейную стенку: *а* - жидкость сверху; *б* - жидкость снизу

Решение можно свести к решению задачи определения силы давления жидкости на криволинейную стенку, заменив внешнее избыточное давление *действием столба эквивалентного слоя жидкости.*

Элементарные силы давления, направленные по нормали к элементарным площадкам криволинейной поверхности, переменной кривизны, составляют в общем случае систему, которая сводится к определению *полной силы давления*, называемой ***главным вектором*** и ***главным моментом*** сил давления.

Однако в технике имеет место множество случаев использования всех видов поверхностей, где суммарное воздействие жидкости на поверхность *определяется только главным вектором сил давления* (*когда линии действия элементарных сил пересекаются в одной точке - сферическая поверхность*).

Решение задачи, в общем виде, сводится к определению ***главного вектора сил давления*** по величине и направлению путем вычисления его проекций на оси координат ***x, y*** и ***z***. Модуль главного вектора сил равен:

$$|\mathbf{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \; ,$$

а его *направление* определяется через косинусы направляющих углов (углы, образуемые между направлением вектора давления с осями координат):

$$\cos(P \wedge x) = P_x / P; \; \cos(P \wedge y) = P_y / P; \; \cos(P \wedge z) = P_z / P.$$

На практике чаще всего встречаются криволинейные стенки симметричные относительно вертикальной оси (цилиндрические, сферические, конические), поэтому ***рассмотрим плоскую задачу с двумя осями координат.***

Пусть плоскость рисунка 1.14 является плоскостью симметрии для площадки ***AB***.

Возможны два варианта нагружения:
- жидкость расположена сверху (рис.1.14, ***схема «а»***) ;
- жидкость расположена снизу (рис.1.14, ***схема «б»***).

Избыточное давление $p_{изб}$ заменено эквивалентным слоем жидкости $p_{изб}/\rho g$.

Рассмотрим сначала схему «а».

Разложим силу давления жидкости на площадку ***AB*** на составляющие - вертикальную $P_{вер}$ и горизонтальную $P_{гор}$.

Выделим объём жидкости ***ABMN***, ограниченный СП, площадкой ***AB*** и вертикальными поверхностями по отношению к СП, проведёнными по границе площадке ***AB***, и рассмотрим *условия его равновесия в вертикальном и горизонтальном направлениях.*

Вертикальная составляющая силы действия жидкости на площадку *AB* определяется как:

$$P_{вер} = p_{изб} S_{MN} + G_{ABMN},$$

где S_{MN} - площадь горизонтальной проекции площадки ***AB***;
G_{ABMN} - сила тяжести жидкости в объ`ме ***ABMN***.

Преобразуем это уравнение:

$$P_{вер} = p_{изб}S_{MN} + G_{ABMN} = p_{изб}S_{MN} + \rho g W_{ABMN} =$$

$$=\rho g[(p_{изб}/\rho g)S_{MN}+W_{ABMN}]=\rho g W_{ABM1N1}.$$

Тело ABM_1N_1, находящееся между площадкой AB, ПП и вертикальной цилиндрической поверхностью, проектирующей AB на ПП, называется **телом давления**, а W_{ABM1N1} - **объём тела давления**.

Таким образом, сила $P_{вер}$ численно равна силе тяжести тела давления, построенного на данной площадке AB.

Горизонтальная составляющая силы давления жидкости на площадку AB определяется по правилам нахождения силы давления на плоскую стенку:

$$P_{гор} = p_C S_{BE},$$

где S_{BE} - вертикальная проекция площадки AB.

Окончательно получаем:

$$P = \sqrt{P_{ГОР}^2 + P_{ВЕР}^2}\ .$$

Линия действия $P_{вер}$ на криволинейную площадку AB проходит через ЦТ ТД ABM_1N_1, а линия действия $P_{гор}$ - через ЦД вертикальной проекции площадки AB.

Схема «б».

В том случае, когда жидкость расположена относительно площадки AB снизу (рис.1.14, ***схема «б»***), давление во всех точках стенки AB соответствует давлению во всех точках площадки AB на рис.1.14, ***схема «а»***, а силы $P_{вер}$ и $P_{гор}$ определяются теми же формулами, но с обратным знаком.

Т.о., можно сформулировать правило:

Если тело давления построено на «смоченной» поверхности, то сила давления направлена вниз, и если на «несмоченной» поверхности - вверх.

При двухстороннем воздействии жидкости на стенку сначала определяют горизонтальные и вертикальные составляющие **с каждой стороны** стенки в предположении одностороннего воздействия жидкости, а затем суммарные горизонтальную и вертикальную составляющие от воздействия обеих жидкостей.

Задачи по определению силы давления жидкости на криволинейные стенки можно решать и **методом сечений,** при котором рассматривают равновесие объёма жидкости, заключённого между стенкой и плоским сечением, проведённым через её граничный контур ***(введение к главе 3 Сборника задач).***

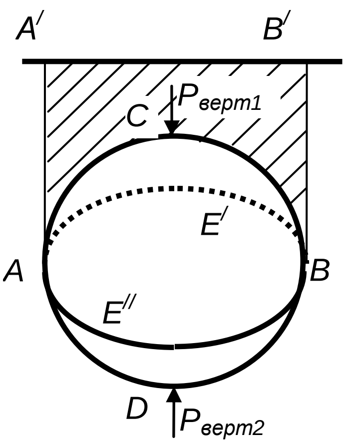

Рис.1.15. Плавание тел

Плавание тел. Поместим полностью в жидкость тело $\boldsymbol{ABCD}$ (рис.1.15).

Все горизонтальные силы, действующие на тело, *должны взаимно уравновешиваться*, так как каждой горизонтальной силе давления, действующей на поверхность тела в произвольно выбранном направлении, всегда будет соответствовать другая сила, действующая на тело с противоположной стороны и равная первой. При этом для их определения используют одни и те же вертикальные проекции площадей тела и координаты ЦТ этих проекций площадей.

Ограничим объём жидкости цилиндрической поверхностью, перпендикулярной СП жидкости и касающейся тела.

Образованная линия касания - *контур* $\boldsymbol{AE^{/}BE^{//}}$ - делит поверхность тела на 2 криволинейные поверхности: $\boldsymbol{ACBE^{/}E^{//}}$ и $\boldsymbol{ADBE^{/}E^{//}}$.

Построенные на этих поверхностях ТД дают силы, действующие на помещенное в жидкость тело.

Вертикальная составляющая $\boldsymbol{P_{верт1}}$ силы избыточного давления направлена вниз и численно равна силе тяжести жидкости в объёме $\boldsymbol{AA^{/}B^{/}BE^{//}CE^{/}A}$ (на рис. 1.15 ***заштриховано***).

Вертикальная составляющая $\boldsymbol{P_{верт2}}$ силы избыточного давления направлена вверх и численно равна силе тяжести жидкости в объёме $\boldsymbol{DAE^{/}BE^{//}A^{/}B^{/}}$.

Суммарная сила давления жидкости на тело

$$P_A = P_{верт2} - P_{верт1} = \rho g W_{ABCD},$$ где W_{ABCD} - объём тела,

численно равна силе тяжести жидкости в объёме тела, направлена вверх противоположно силе тяжести тела, не зависит от глубины *погружения тела и называется выталкивающей или архимедовой силой.*

Закон Архимеда:

Тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная этим телом жидкость.

Иногда архимедову силу называют гидростатической подъемной или поддерживающей силой.

Линия действия такой силы должна проходить вертикально через центр тяжести вытесненного объёма жидкости. В теории плавания объектов ЦТ вытесненного объема жидкости носит название ***центра водоизмещения***. При частичном погружении необходимо учитывать только ту часть объёма тела, которая погружена в жидкость, а не весь объём тела.

На погруженное в жидкость тело, находящееся в равновесии действуют сила тяжести $\boldsymbol{G}$, направленная вниз, и суммарная сила воздействия жидкости на тело $\boldsymbol{P_A}$, направленная вверх.

Возможные варианты соотношения сил с результатом их действия на тело:

1) при $\boldsymbol{G > P_A}$ - тело тонет (*отрицательная плавучесть*);

2) при $\boldsymbol{G < P_A}$ - тело всплывает и плавает на поверхности жидкости (*положительная плавучесть*);

3) при $\boldsymbol{G = P_A}$ - тело плавает погруженным в жидкость полностью (*нулевая плавучесть*).

Согласно законам механики для равновесия тела должны выполняться два условия:

1) сумма проекций всех сил на каждую ось координат должна быть равна нулю;

2) сумма моментов всех действующих сил относительно осей координат должна быть равна нулю.

Из сил, действующих на погруженное тело и создающих момент, остаются только вертикальные силы – *сила тяжести и суммарная сила воздействия жидкости на тело*. Следовательно, *для равновесия тела необходимо, чтобы точки приложения этих сил - центры тяжести и водоизмещения - были расположены на одной вертикали, и для устойчивого равновесия центр тяжести располагался бы ниже центра водоизмещения.*