Лекция №5

Относительный покой (равновесие) жидких сред.

Рассмотренные выше случаи равновесного состояния жидкости относятся к случаю *абсолютного покоя*, под которым понимают покой жидкости, находящейся в сосуде, неподвижном относительно Земли, т.е. система координат жестко связана с Землей. *Частицы жидкости при таком состоянии находятся под действием только силы тяжести*.

Если на частицы рассматриваемой жидкости кроме силы тяжести будут действовать еще какие-либо другие массовые силы, например, силы инерции, обусловленные изменением скорости и направления движения сосуда с жидкостью, то возникнут силы инерции, стремящиеся сохранить всем элементарным массовым частицам жидкости их первоначальное состояние.

При наличии новых массовых сил - частицы жидкости в сосуде будут перемещаться до тех пор, пока не займут нового положения, при котором равновесие - прекращение относительного перемещения частиц в сосуде - окажется возможным. Такое состояние позволяет считать, что сосуд с жидкостью не движется, но на частицы жидкости добавочно действуют те силы, которые возникают при движении сосуда.

Под **относительным покоем** будем понимать такое состояние, при котором в жидкости отсутствуют перемещения отдельных ее частиц по отношению друг к другу и стенок сосуда. **При этом жидкость перемещается как твердое тело.** *Само движение жидкости в этом случае можно называть переносным движением.* Характерным для этого состояния будет постоянство формы объёма жидкости.

На жидкость, находящуюся в относительном покое, действуют **результирующие массовые силы** (*сила тяжести и сила инерции переносного движения*), а из **поверхностных сил** только *силы давления.*

Выбирая систему координат, жёстко связанную со стенками сосуда, приходим к статической задаче, основой для решения которой служит уравнение Эйлера.

Равновесие жидкости в сосуде, движущемся прямолинейно с постоянным ускорением.

Рассмотрим объём жидкости, находящейся в покое относительно сосуда, движущегося с ускорением $\boldsymbol{a}$ вдоль $\boldsymbol{MN}$ под углом α к горизонту (рис.1.16).

Систему координат $\boldsymbol{x0zy}$ расположим по стенкам сосуда. Ось $\boldsymbol{0y}$ нормальна плоскости рисунка.

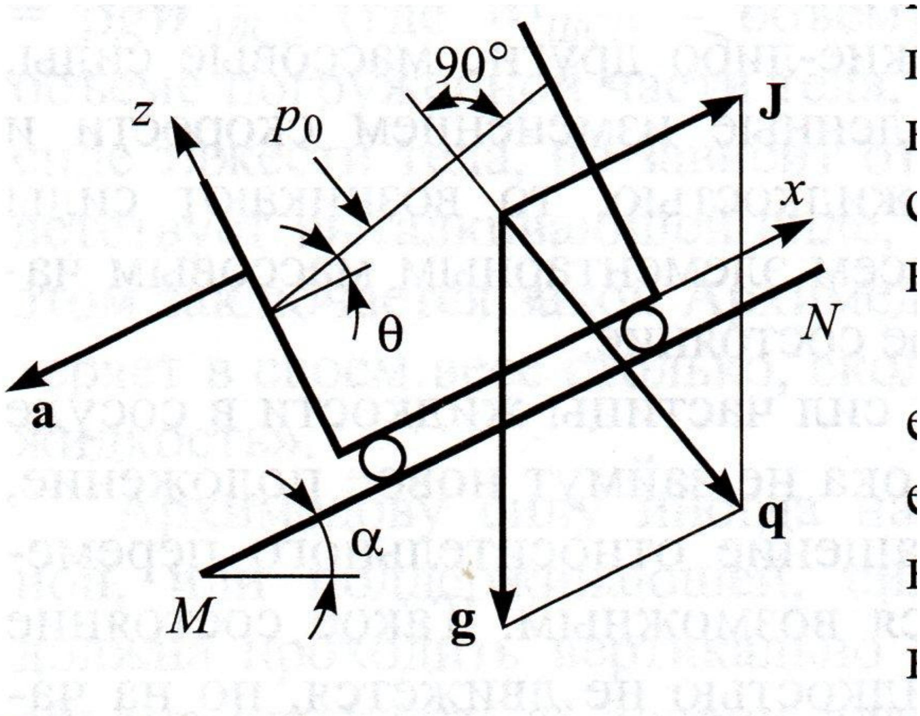


Рис. 1.16. Схема определения сил, действующих в жидкости, при прямолинейном движении сосуда с постоянным ускорением

Для любой частицы жидкости к ускорению силы тяжести $\boldsymbol{g}$ добавляется ускорение переносного движения $\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{a}$, направленное в сторону, противоположную ускорению сосуда.

Единичная равнодействующая массовая сила (при относительном покое):

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{j}\,.$$

Подставив в уравнение Эйлера значения единичной равнодействующей массовой силы по направлениям осей:

$$q_x = j - g \cdot \sin\alpha\,; \quad q_y = 0; \quad q_z = -g \cdot \cos\alpha\,,$$

получим:

$$dp/\rho = (j - g\cdot\sin\,\alpha)\cdot dx - g\cdot\cos\,\alpha\cdot dz\,.$$

Проинтегрировав, найдём *закон распределения давления в жидкости*

$$p = \rho\cdot(j - g\cdot\sin\,\alpha)\cdot x - \rho\cdot g\cdot\cos\,\alpha\cdot z + C$$

где C - постоянная интегрирования.

Приняв для СП жидкости $p = p_{сп} = 0$ и обозначив её пересечение с осью z через z_0 $(z = z_0)$ при $x = 0$, находим уравнение для СП:

$$z - z_0 = x\frac{j - g\sin\alpha}{g\cos\alpha} = xtg\theta\,.$$

На произвольной ПУ давление постоянно ($p = const$, следовательно $dp = 0$), тогда получаем:

$$\rho\,(j - g\cdot\sin\,\alpha)\cdot x - \rho\,g\,z\cdot\cos\,\alpha + C_1 = 0,$$

где C_1 - постоянная интегрирования, уравнения семейства ПРД $(p = const)$ - плоскостей, параллельных оси $0y$, нормальных (перпендикулярных) суммарному вектору единичной равнодействующей массовой силы q.

С учётом граничных условий $x = 0;\ z = z_0$ и $p = p_{сп}$ имеем уравнение:

$$p = p_{сп} + \rho\,(j - g\cdot\sin\,\alpha)\cdot x - \rho\,g(z_0 - z)\cos\alpha$$

описывающее **закон распределения давления по объёму жидкости**.

Анализ полученного уравнения позволяет сделать заключения:

1) Давление в жидкости меняется по всем направлениям, кроме ПРД, которые нормальны суммарному вектору равнодействующей единичной массовой силы q ;

2) Давление в жидкости изменяется линейно по любому направлению, кроме оси $0y$, которой параллельны ПРД.

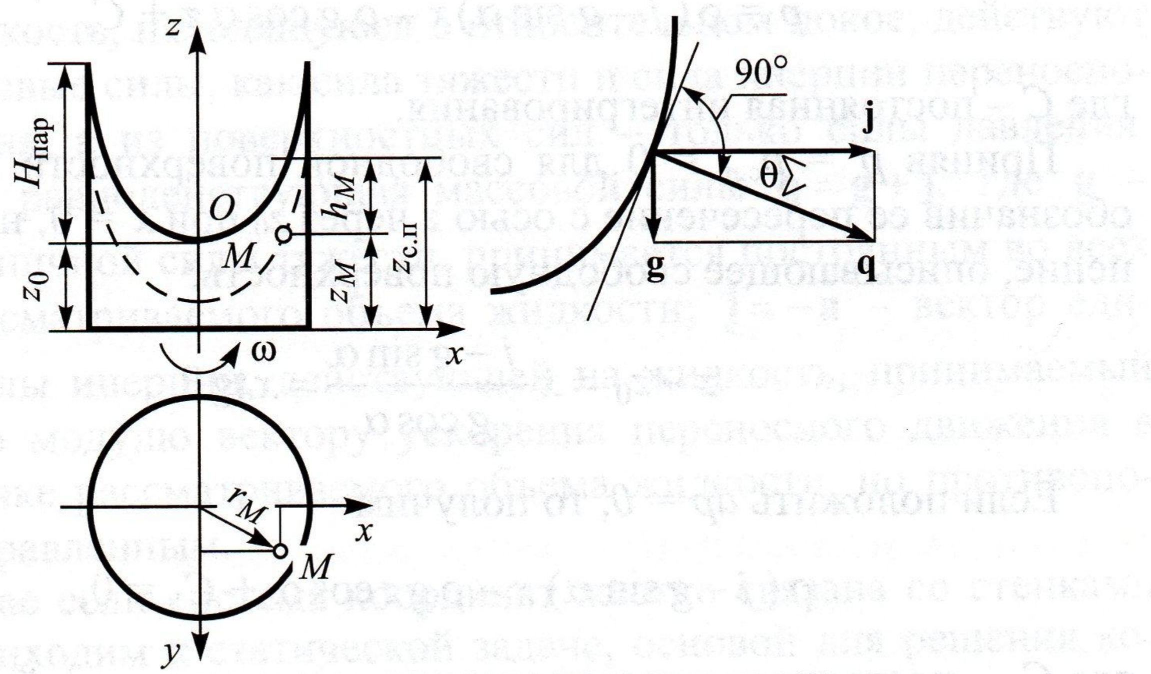
3) При движении сосуда с жидкостью только под действием силы тяжести (сила трения сосуда о плоскость отсутствует) $\boldsymbol{j = g \cdot sin\alpha}$ и $\boldsymbol{\theta = 0}$ - ***СП параллельна MN.***

4) При опускании ***(свободном падении)*** сосуда с жидкостью - $\boldsymbol{j = -g;}$ $\boldsymbol{\alpha = 90^o;}$ $\boldsymbol{q_x = 0;}$ $\boldsymbol{q_y = 0;}$ $\boldsymbol{q_z = 0}$ - дифференциальное уравнение примет вид - $\boldsymbol{dp=0;}$ откуда имеем $\boldsymbol{p_1=p_2=p_0}$ - ***во всем сосуде давление одинаково и не зависит от высоты СП.***

Равновесие жидкости в цилиндрическом сосуде, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси.

Имеем сосуд с жидкостью, вращающийся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси (рис.1.17).

По истечении некоторого времени после начала вращения будет достигнуто *состояние относительного покоя частиц жидкости относительно стенок сосуда*. Траектория любой частицы жидкости представляет собой окружность с центром на оси вращения.



ис. 1.17. Схема действия сил при вращении сосуда с жидкостью вокруг ртикальной оси

Для любой частицы жидкости к ускорению силы тяжести g добавляется ускорение переносного движения $j = w^2 r$, равное по модулю и противоположное по направлению центростремительному ускорению,

где w - угловая скорость вращения;

r -радиус расположения вращаемой частицы.

Единичная массовая сила - $q = g + j$. Поле массовых сил q неоднородно.

Подставив значения единичной массовой силы по направлениям осей:

$q_x = \omega^2 r \cos(x \wedge r) = \omega^2 r \dfrac{x}{r} = \omega^2 x$. Аналогично получаем: $q_y = \omega^2 \cdot y;\ q_z = -g.$

Подставляя эти значения в уравнение Эйлера, получим:

$$dp = \rho \cdot \omega^2 \cdot (x \cdot dx + y \cdot dy) - \rho \cdot g\, dz \quad \text{или} \quad dp = \rho \cdot d(x^2 + y^2) \cdot \omega^2 / 2 - \rho \cdot g \cdot dz.$$

Проинтегрировав данное выражение, получаем:

$$p = \rho\,(x^2 + y^2)\omega^2/2 - \rho\, g\, z + C \quad \text{или} \quad p = \rho r^2 \omega^2/2 - \rho \cdot g\, z + C,$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

Полученное уравнение описывает ***закон распределения давления по объему***.

Полагая $p = \mathrm{const}$, получаем семейство параболических ПРД:

$$\rho r^2 \cdot \omega^2/2 - \rho \cdot g z + (C_1 - p) = 0, \qquad \text{где } C_1 - p = \mathrm{const}.$$

Подставив граничные условия и определив C_1, можно получить свой соответствующий каждому значению давления параболоид с осью вращения z со смещением ершины по оси z.

ПРД не пересекаются между собой, иначе бы на линии пересечения этих поверхностей существовал бы ряд точек, давление в которых в одно и то же время имеет два разных значения, что невозможно.

ПРД конгруэнтны (это тот случай, когда можно совместить поверхности одну с другой, изменив только положение в пространстве, в рассматриваемом варианте - переместив по координате z).

Введя граничные условия r_0, z_0 *и* p_0, имеем полное уравнение распределения давления в жидкости, вращающей вокруг вертикальной оси:

$$p = p_0 + \rho(r^2 - r_0^2)\cdot\omega^2/2 - \rho g\cdot(z - z_0),$$

<u>*с помощью которого можно определять давление в любой точке объёма.*</u>

<u>***Проведем некоторые исследования:***</u>

1) Уравнение параболоида СП ($p = p_0$) и расположением вершины с координатами $z = z_0$ и $r_0 = 0$ имеет вид:

$$z = z_0 + \omega^2 \cdot r^2 / 2g\ .$$

Отсюда можно заключить - <u>***форма ПРД не зависит от плотности жидкости.***</u>

2) При $r_0 = r = 0$ имеем $p = p_0 - \rho g\,(z - z_0) = p_0 - \rho gh,$ т.е. изменение давления во вращающемся сосуде с жидкостью происходит в глубину по вертикали.

3) Для т. $M\,(z_M, r_M)$ и приняв $r_0 = 0,$ имеем

$$p_M = p_0 + \rho\cdot r_M^{2}\cdot\omega^2/2 - \rho g\cdot(z_M - z_0).$$

Проведя преобразования вида:

$$(p_M - p_0)/\rho\cdot g = h_M \quad \text{и} \quad r_M^{\,2}\cdot\omega^2/2g + z_0 = z_{\text{сп}}\,,$$

получим $h_M = z_{\text{сп}} - z_M$, т.е. глубину погружения точки необходимо исчислять от СП, устанавливающейся при вращении сосуда, на радиусе расположения точки *М*.

4) При определении положения СП в решении практических задач следует руководствоваться такими соображениями:

- объем жидкости в сосуде задаётся до начала движения сосуда, а жидкость, как правило, не вытекает;

- объём <u>*несжимаемой жидкости*</u> не изменится при переходе в состояние относительного покоя, но конечно изменится форма её объёма; <u>*ПРД естественно примут форму параболоидов вращения.*</u>

Равенство первоначального и полученного при вращении объёмов, выраженное аналитически, позволяет окончательно определить положение, например, СП , для которой ***p = 0.***

Для проведения аналитических выкладок следует вспомнить, как выражаются:

- высота параболоида - $H_{ПАР} = \dfrac{\omega^2 D^2}{8g} = \dfrac{\omega^2 R^2}{2g}$;

- объём параболоида - $W_{ПАР} = \dfrac{\pi D^2 H_{ПАР}}{8} = \dfrac{\pi\omega^2 D^4}{64g} = \dfrac{\pi\omega^2 R^4}{4g}$.

Общим методом определения сил давления жидкости на стенки сосуда является получение функции, выражающей закон распределения давления на заданной поверхности и интегрирование этой функции по площади стенки.

Сила, действующая на крышку вращающегося вокруг вертикальной оси сосуда с размерами D x H (рис. 1.18), внутри которого находится жидкость под избыточным давлением, определяется по выражению:

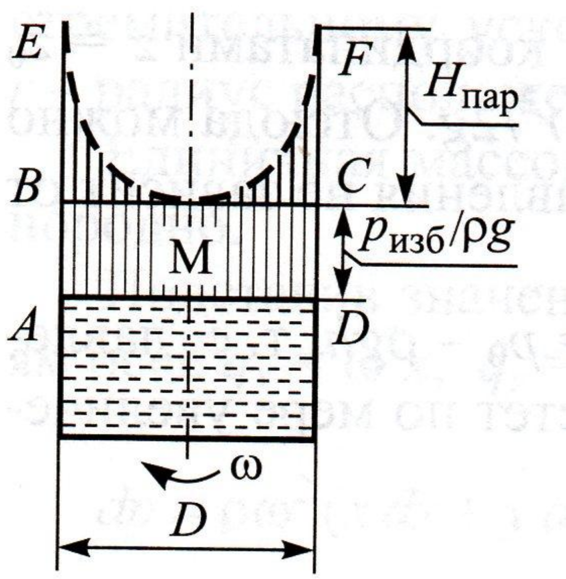


Рис. 1.18. К определению сил, действующих на крышку сосуда

$$P_{BEPT} = \int \left(p_{изб} + p_{вр} \right) dS = \rho g \left(W_{ABCD} + W_{BEFC} \right)$$

где $\boldsymbol{p_{изб} = p_M}$ - избыточное давление жидкости внутри сосуда до вращения;

$\boldsymbol{p_{вр}}$ - давление на крышке **AD** от вращения сосуда;

$\boldsymbol{W_{ABCD}}$ - объем ТД при учете действия избыточного давления;

$\boldsymbol{W_{BEFC}}$ - объем ТД, возникшего при вращении сосуда с жидкостью.

*Т.о. сила, действующая на крышку вращающегося сосуда, численно равна **весу "тела давления"**, построенного между крышкой и ПП.*

Вращение жидкости в цилиндрическом сосуде вокруг горизонтальной оси.

При вращении жидкости вокруг горизонтальной оси (рис.1.19) часто наблюдается неравномерное распределение жидкости на стенках сосуда.

Равномерность распределения происходит при высоких частотах вращения, т.е. когда центробежные силы, действующие на частицы жидкости, значительно превышают силы тяжести этих частиц, $\boldsymbol{r\omega^2 >> g}$.

Для получения закона изменения давления внутри объёма жидкости, вращающегося вокруг горизонтальной оси, *рассмотрим равновесие элементарного объёма* с площадью основания $\boldsymbol{dS}$ в направлении оси вращения на радиусе $\boldsymbol{r}$ и высотой $\boldsymbol{dr}$.

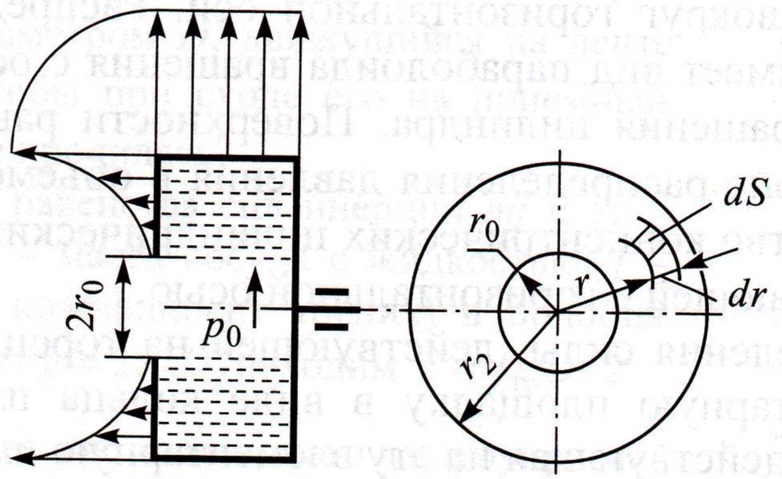


Рис. 1.19. Схема действия сил в жидкости при вращении сосуда вокруг горизонтальной оси

На выделенный элемент жидкости в радиальном направлении действуют *силы давления и центробежная сила.*

Обозначив действующее в центре основания dS на радиусе r выделенного объема давление через p, а в центре верхнего основания (на радиусе $r + dr$) через $p + dp$, запишем уравнение равновесия выделенного объёма:

$$pdS - (p + dp)dS + \rho\,\omega^2 r dr dS = 0,$$

или

$$dp = \rho\omega^2 r dr.$$

После преобразований и интегрирования последнего имеем:

$$p = \rho\omega^2 r^2/2 + C.$$

С учётом граничных условий $r = r_0$ и $p = p_0$ получаем уравнение:

$$p = p_0 + \rho\frac{\omega^2}{2}\left(r^2 - r_0^2\right),$$

определяющее **закон распределения давления в объёме жидкости, вращающейся вокруг горизонтальной оси.**

Распределение давления по торцу имеет *вид параболоида вращения с осью, совпадающей с осью вращения цилиндра.*

ПРД представляют собой семейство концентрических цилиндрических поверхностей с осью, совпадающей с осью сосуда.

Для определения усилия, действующего на торец цилиндра, выделим элементарную площадку в виде кольца площадью $dS = 2\pi r\, dr$. Усилие, действующее на эту элементарную площадку, равно

$$dP = p \cdot dS = [p_0 + \rho \cdot \omega^2 \cdot (r^2 - r_0^2)/2] \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr.$$

Полное усилие на торец сосуда:

$$P = 2\pi \cdot \int_{r_0}^{r_2} p \cdot r \cdot dr = 2\pi \int_{r_0}^{r_2} [p_0 + \rho \cdot \omega^2 \cdot (r^2 - r_0^2)/2] \cdot r \cdot dr.$$