КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ

Кинематика идеальной жидкости

Основные понятия.

Кинематика жидкости существенно отличается от кинематики твердого тела. Если отдельные частицы абсолютно твёрдого тела *жёстко связаны между собой,* то в движущейся жидкой среде *такие связи отсутствуют.*

Кинематика и динамика жидкости являются составными частями **гидродинамики** – раздела гидравлики, в котором изучаются законы, характеризующие движение жидкости, и способы использования этих законов при решении практических задач.

При изучении законов движения жидкости преимущественно применяется ***метод физического поля или метод Эйлера***, который позволяет рассматривать то, что происходит в разные моменты времени в данной точке пространства.

В общем, это могут быть различные физические величины, характеризующие состояние сплошной среды - ***скорость, давление, температура и т.п.*** Другими словами, объектом исследования является *поле векторных величин - местная скорость* $\mathbf{u}$. Очевидно, что местная скорость различна в разных точках пространства и изменяется с течением времени - $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x;y;z;t)$.

Скорость в данной точке пространства, занятого движущейся жидкостью, является функцией координат этой точки, а иногда и времени. Т.о., *задачей кинематики жидкости является определение скорости в любой точке жидкой среды, т.е. нахождение поля скоростей. Для движущейся жидкости векторное поле представляет собой поле скоростей, при этом векторные линии называют **линиями тока.***

Линия тока - воображаемая траектория частицы в движущейся жидкости, касательные к которой в любой ее точке совпадают с направлением векторов скорости частиц, расположенных на этой линии в данный момент времени.

*Если местная скорость явно зависит от времени ($\partial \mathbf{u}/\partial t \neq 0$), то такое движение называют **неустановившимся** или **нестационарным.*** В противном случае *($\partial \mathbf{u}/\partial t = 0$)*, движение - ***установившееся*** *или* ***стационарное.***

Установившееся движение - течение, при котором скорость и давление являются функциями координат и не зависят от времени:

$$u = u(x,y,z);\ p = p(x,y,z);\ \partial p/\partial t = 0;\ \partial u_x/\partial t = 0;\ \partial u_y/\partial t = 0;\ \partial u_z/\partial t = 0.$$

<u>Примеры установившегося течения:</u>
- истечение жидкости из сосуда, в котором поддерживается постоянный уровень;
- движение жидкости в трубопроводе, создаваемое центробежным насосом с постоянной частотой вращения вала.

<u>Неустановившееся движение</u> - течение, характеристики которого изменяются во времени в точках рассматриваемого пространства:

$$p = p\,(x,y,z,t) \text{ и } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x,y,z,t).$$

<u>Примеры неустановившегося течения</u>:
- быстрое истечение жидкости из сосуда через отверстие в дне;
- движение во всасывающей или напорной трубе поршневого насоса, поршень которого совершает возвратно-поступательное движение.

<u>В условиях установившегося течения линия тока совпадает с траекторией и не изменяет своей формы с течением времени.</u>

Если в движущейся жидкости взять элементарный замкнутый контур и через все его точки провести линии тока, то образуется трубчатая поверхность, называемая ***<u>трубкой тока.</u>***

Часть потока жидкости, заключенная внутри трубки тока, называется ***<u>элементарной струйкой.</u>*** <u>При $\Delta S \rightarrow 0$ струйка в пределе обращается в линию тока.</u>

<u>Живым (поперёчным) сечением</u>, *или просто сечением* потока, называют в общем случае поверхность в пределах рассматриваемого потока, проведённую нормально к линиям тока.

<u>Элементарная струйка обладает следующими свойствами:</u>

1) Поверхность элементарной струйки (трубки тока) *<u>непроницаема для частиц жидкости.</u>*

В любой точке боковой поверхности струйки (трубки тока) векторы скорости направлены по касательным, нормальные составляющие скорости отсутствуют. Следовательно, ни в одной точке поверхности трубки тока частица жидкости не может проникнуть вовнутрь трубки или выйти наружу. Поверхность трубки тока т.о. представляет собой непроницаемую стенку, а элементарная струйка - самостоятельный элементарный поток.

2) Вследствие малости площади живого сечения элементарной струйки *<u>скорость во всех точках этого сечения одинакова.</u>*

3) *<u>При установившемся движении форма элементарной струйки не изменяется.</u>*

Т.о., при установившемся движении применительно к элементарной струйке имеем одномерный элементарный поток жидкости:

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(L),$$

где L - линейная координата, направленная вдоль элементарной струйки.

Потоки конечных размеров рассматривают как совокупность элементарных струек - ***струйное течение*** (модель одномерного потока). Вследствие различия скоростей *соседние струйки будут скользить одна по другой, не перемешиваясь.*

Для лучшего представления некоторых явлений вводится понятие так называемой ***идеальной жидкости***, т.е. такой воображаемой жидкости, которая совершенно лишена вязкости. *Особенность течения идеальной жидкости заключается в том, что оно* ***безвихревое.***

В реальных потоках наблюдается ***напорное течение*** - течение в закрытых руслах без СП с переменным давлением вдоль потока, и ***безнапорное течение*** - течение со свободной поверхностью и постоянным давлением (атмосферное).

Объёмный и массовый расходы.

Расходом называют количество жидкости, протекающей через какую-либо поверхность, нормальную к линиям тока, в единицу времени.

В зависимости от того, в чем измеряют количество жидкости, различают расходы:

- объёмный - Q;
- массовый - $Q_m = \rho Q$;
- весовой - $Q_g = \rho g Q$.

Расход в СИ выражается соответственно в м^3/с , кг/с и Н/с.

Для элементарный струйки количество жидкости, протекающей через живое сечение ΔS за время dt это объём:

$$\Delta W = \Delta S u dt\ .$$

С учётом определения элементарный расход, протекающий через живое сечение элементарной струйки, можно записать как:

$$\Delta Q = u \Delta S\ ,$$

что справедливо как для сжимаемой, так и для несжимаемой жидкости.

С учётом неравномерного распределения скоростей в живых сечениях струек расход потока жидкости равен суммарному расходу составляющих его элементарных струек, т.е.

$$Q = {}_S\int u \cdot dS \; .$$

Нахождение этого интеграла на практике является иногда неразрешимой задачей. Поэтому в гидравлике для практических расчётов потоков реальных размеров используют среднюю по сечению потока скорость $V_{ср}$*, которую можно определить, усредняя по сечению местные скорости* u *в соответствии с соотношением*:

$$V_{ср} = \frac{Q}{S} .,$$

где S - площадь живого сечения потока.

В основе описания динамики жидкости лежат два уравнения - ***уравнение неразрывности и уравнение движения.***

Динамика идеальной жидкости.

Уравнение неразрывности.

Уравнение неразрывности выражает закон сохранения массы. Выделим элементарный объём жидкости внутри элементарной струйки двумя живыми сечениями ***1-1*** и **2-2** (рис. 2.1), расстояние между которыми dL. В течение времени dt в этот объем втекает жидкость массой - $\rho dSudt$ и вытекает массой - $(\rho+d\rho)(dS+d(dS))(u+du)dt$.

Поскольку *движение жидкости установившееся* и её плотность пределах выделенного объёма с течением времени не изменяется, а потери жидкости через непроницаемые стенки боковой поверхности невозможно (трубка тока), то соответствующие массы равны между собой:

$$\rho dSudt = (\rho+d\rho)(dS+d(dS))(u+du)dt.$$

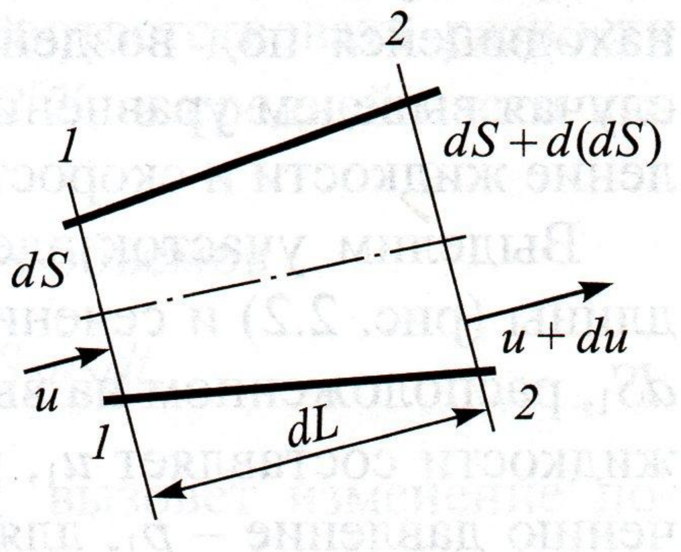

Рис. 2.1. К выводу уравнения неразрывности

Раскрывая скобки и отбрасывая величины более высокого порядка малости, получаем

$$d(\rho dSu)=0.$$

Анализ полученного выражения показывает, что для сжимаемой жидкости $(\rho \neq \mathrm{const})$ остается неизменным:

- *массовый расход вдоль элементарной струйки*

$$\rho dSu = dQ_m = \mathrm{idem},$$

а для несжимаемой жидкости $(\rho = \mathrm{const})$:

- *объёмный расход*:

$$udS = dQ = \mathrm{idem}.$$

Распространяя полученный результат на поток, имеем для сжимаемой жидкости:

- *массовый расход*

$$Q_m = \rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2 = ... = \mathrm{const},$$

для несжимаемой жидкости:

- *объемный расход*

$$Q = V_1 S_1 = V_2 S_2 = ... = const.$$

Из последнего выражения следует, что средние скорости движения V_1 и V_2 потока несжимаемой жидкости обратно пропорциональны площадям S_1 и S_2 сечений потока:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Таким образом, ***уравнение неразрывности описывает частный случай общего закона сохранения вещества,*** а также является ***условием сплошности (неразрывности) потока жидкости.***

Струйка идеальной жидкости и уравнение Бернулли.

Рассмотрим установившееся течение струйки идеальной жидкости, находящейся под воздействием только одной силы тяжести. Для этого случая выведем уравнение движения жидкости, связывающее давление в жидкости и скорость ее движения.

Выделим участок элементарных струек потока произвольной длины сечениями ***1-1*** и ***2-2*** (рис. 2.2). В сечении ***1-1*** площадью dS_1, расположенном на высоте z_1 от плоскости сравнения, скорость жидкости составляет u_1, равномерно распределенное по всему сечению давление p_1, для сечения ***2-2*** соответственно dS_2, z_2, u_2, p_2. За бесконечно малый промежуток времени dt под воздействием внешних сил выделенный участок потока объемом ***1122*** переместится и займет объем ***1'1'2'2'***.

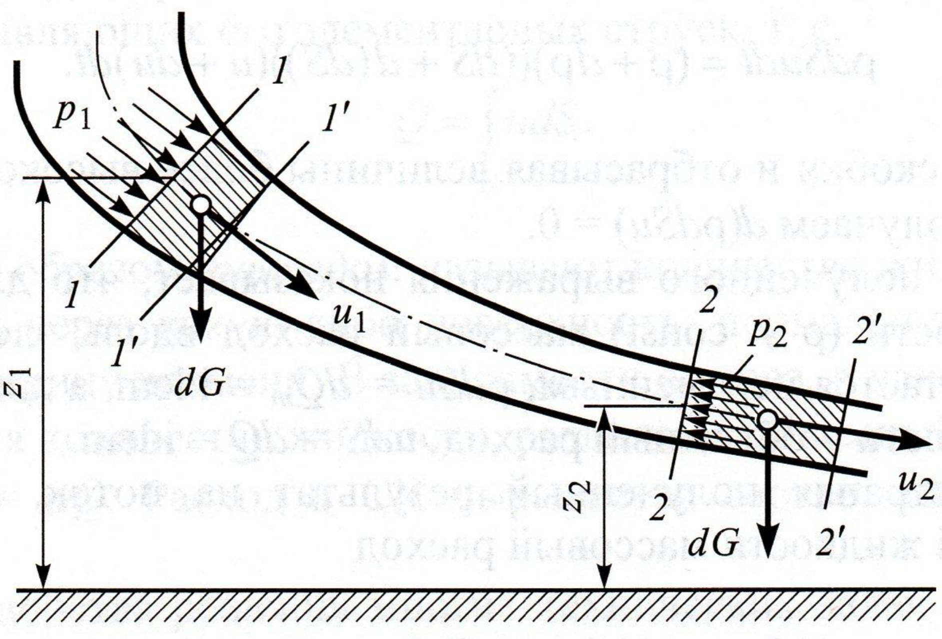

Рис. 2.2. К выводу уравнения Бернулли для струйки идеальной жидкости

Согласно теореме механики о кинетической энергии механической системы, работа внешних и внутренних сил, приложенных к телу, равна приращению кинетической энергии этого тела. Приложенные к выделенному участки силы (внешние) - силы давления и тяжести. Поскольку жидкость идеальная внутренние - силы трения - отсутствуют, поскольку жидкость идеальная.

Работа сил давления в сечении ***1-1*** будет положительной, так как направление действия силы совпадает с направлением движения жидкости в струйке, и равной произведению силы $p_1 dS_1$ на путь $u_1 dt$. Работа сил давления в сечении ***2-2*** будет отрицательной, так как направление силы противоположно направлению движения, и равной произведению $p_2 dS_2 u_2 dt$.

Силы давления, действующие на внешнюю оболочку выделенного участка потока, не совершают работу, поскольку они направлены по нормали к этой поверхности и к движению жидкости в струйке. При перемещении выделенного объема энергия положения (потенциальная энергия) не будет соответствовать разности энергий положения объёмов $111'1'$ и $222'2'$, а в средней части выделенного объёма не изменится.

С учётом весовых расходов выбранных объёмов

$$dG = \rho_1 g\, dS_1 u_1 dt = \rho_2 g\, dS_2 u_2 dt.$$

Работа сил тяжести, равная $(z_1 - z_2)dG$, вызовет изменение потенциальной энергии участка струйки.

Приращение кинетической энергии определяется разностью кинетических энергий объёмов $111'1'$ и $222'2'$ при силе тяжести dG каждого и равно $(u_2^2 - u_1^2)dG/(2g)$.

Окончательно имеем:

$$p_1 dS_1 u_1 dt - p_2 dS_2 u_2 dt + (z_1 - z_2)dG = (u_2^2 - u_1^2)\frac{dG}{2g}.$$

Проведя преобразования и группировку по индексам, получим выражение:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g},$$

получившее название ***уравнение Бернулли для струйки идеальной несжимаемой жидкости.***

Под напором, представляющим собой линейную величину, понимают высоту, на которую жидкость способна подняться под действием или высоты центра тяжести сечения струйки жидкости, или статического давления, и или внешней кинетической энергии. Единицами напора являются единицы длины.

Сумму трех напоров назовем полным напором.

Каждый член уравнения имеет линейную размерность и называется:

$\boldsymbol{z}$ - нивелирная высота, или геометрический напор;

$\boldsymbol{p/(\rho g)}$ - пьезометрическая высота, или пьезометрический напор;

$\boldsymbol{u^2/(2g)}$ - скоростная высота, или скоростной напор;

$\boldsymbol{z + p/(\rho g) + u^2/(2g) = H}$ - полный напор.

Так как сечения выбраны произвольно, следовательно, для любого другого сечения этой же струйки идеальной жидкости полный напор также определяется выражением

$$z + p/(\rho g) + u^2/(2g) = H = \mathrm{const} \text{ (вдоль струйки).}$$

Таким образом, ***полный напор в сечении струйки идеальной движущейся жидкости, равный сумме трех высот: нивелирной, пьезометрической и скоростной, есть величина постоянная вдоль струйки.***

Приведенный выше вывод уравнения опубликован Даниилом Бернулли в книге "Гидродинамика" (1738 год).

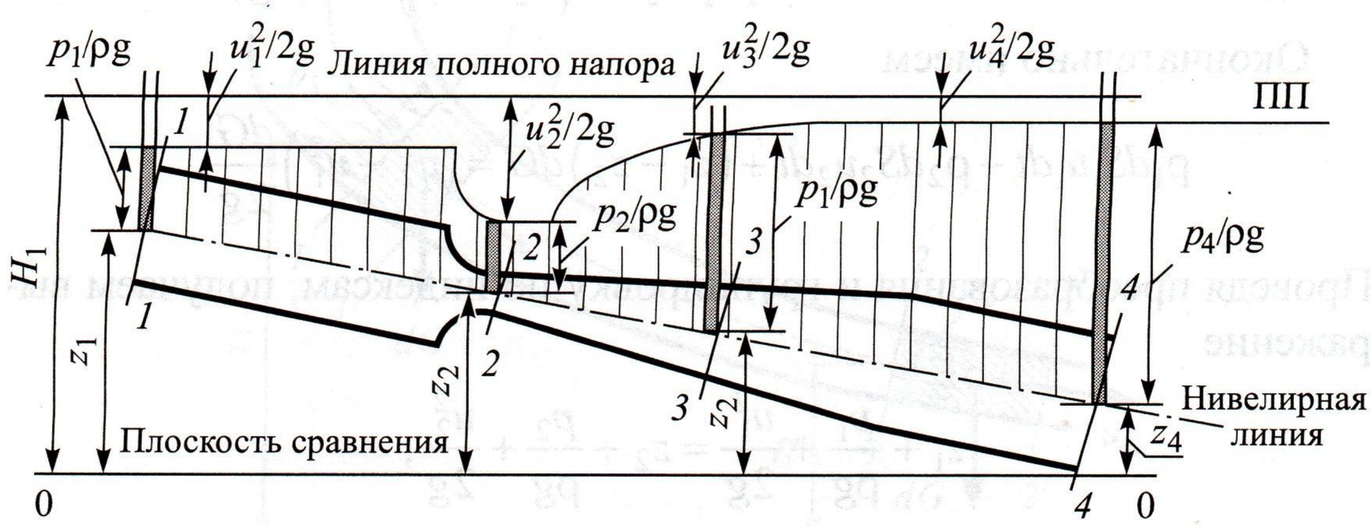

Рис. 2.3. Изменение напоров вдоль элементарной струйки идеальной жидкости

На рис.2.3 показано изменение трех высот, определяемых следующими линиями: нивелирная - линия расположения оси струйки; пьезометрической - линия расположения уровней свободных поверхностей (поверхностей атмосферного давления) в пьезометрах; полного напора - линия на высоте $\boldsymbol{H}$ от плоскости сравнения.

Из уравнения Бернулли с учетом уравнения неразрывности следует, что при уменьшении площади поперечного сечения струйки (сужение струйки) скорость движения жидкости увеличивается, а давление снижается. В сечении ***2-2*** может даже образоваться вакуум, т.е. абсолютное давление в этом сечении может стать ниже атмосферного.

Рассмотрим уравнение Бернулли с энергетической точки зрения.

Условимся называть удельной энергией жидкости энергию, отнесенную к единице силы тяжести, т.е. $\boldsymbol{e = E/G}$, и имеющую ту же размерность, что и члены уравнения Бернулли.

Каждый член уравнения выражает свою форму удельной механической энергии:

$\boldsymbol{z}$ - удельная потенциальная энергия положения (частица жидкости, обладающая силой тяжести $\Delta \boldsymbol{G}$, находящаяся на высоте $\boldsymbol{z}$, имеет потенциальную энергию положения $\Delta \boldsymbol{Gz}$, а на единицу силы тяжести будет приходиться энергия $\Delta \boldsymbol{Gz}/\Delta \boldsymbol{G} = \boldsymbol{z}$);

$\boldsymbol{p/(\rho g)}$ - удельная потенциальная энергия давления движущейся жидкости (при давлении $\boldsymbol{p}$ частица жидкости обладает способностью подняться на высоту $\boldsymbol{p/(\rho g)}$ и тем самым приобрести потенциальную энергию $\Delta \boldsymbol{Gp/(\rho g)}$, а на единицу силы тяжести будет приходиться энергия

$$\frac{\Delta G p / \rho g}{\Delta G} = \frac{p}{\rho g};$$

$\boldsymbol{z + p/(\rho g)}$ - удельная потенциальная энергия движущейся жидкости; (гидростатический напор);

$\boldsymbol{u^2/(2g)}$ - удельная кинетическая энергия движущейся жидкости (частица жидкости, обладающая силой тяжести $\Delta \boldsymbol{G}$, обладает кинетической энергией $\Delta \boldsymbol{G}\, \boldsymbol{u^2/(2g)}$, а на единицу силы тяжести будет приходиться энергия $\dfrac{\Delta G u^2 / 2g}{\Delta G} = \dfrac{u^2}{2g}$;

$H = z + p/(\rho g) + u^2/(2g)$ - полная удельная энергия движущейся жидкости.

<u>Энергетический смысл уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной движущейся жидкости заключается в постоянстве вдоль струйки полной удельной энергии и выражает закон сохранения механической энергии движущейся идеальной несжимаемой жидкости.</u>

Памятуя о том, что энергия - общая мера различных форм движения материи ("гидравлической формы движения" нет!), следует считать, что поток движущейся жидкости обладает механической энергией с составляющими: ***<u>кинетической</u>***, определяемой массой и скоростью движения, и ***<u>потенциальной</u>***, зависящей от взаимного расположения частиц и их положения во внешнем силовом поле.

Для количественной характеристики качественно различных форм движения и соответствующих им взаимодействий введены различные виды энергии: механическая (составные - кинетическая и потенциальная), электрическая, магнитная, ядерная и др., с единицей энергии - джоуль. В замкнутой системе выполняется закон сохранения энергии. В процессе движения идеальной жидкости одна форма энергии может превращаться в другую, однако полная энергия при этом остается без изменения.