Программа для подготовки к рубежному контролю № 1
по линейной алгебре

ИУ (кроме ИУ-9), РЛ, БМТ; 2019-2020 уч. год

Теоретические вопросы

(как они сформулированы в билетах рубежного контроля)

Часть А

1. Дать определение линейного (векторного) пространства.
2. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
3. Дать определение базиса и размерности линейного пространства.
4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому.
5. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.
6. Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов.
7. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.
8. Записать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
9. Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства.
10. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов.
11. Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора.
12. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
13. Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора.
14. Сформулировать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.
15. Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе.
16. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора.

17. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям.
18. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.
19. Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы.
20. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.
21. Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.
22. Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределённой квадратичной формы.
23. Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм.
24. Сформулировать закон инерции квадратичных форм.

Часть Б

1. Вывести формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.
2. Доказать неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
3. Вывести формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
4. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.
5. Доказать теорему о собственных векторах линейного оператора, отвечающих различным собственным значениям.
6. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Примеры задач

Часть А

1. Найти какой-нибудь базис и рамерность линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (7,-6,3)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-9,3)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,1,2)^T$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,10,5)^T$ пространства $\mathbb{R}^3$.

2. Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,0,0)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,0,1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1,0)^T$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ (скалярное произведение стандартное).

3. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$ квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1,x_2) = -x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$. Найти выражение $Q(y_1,y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = 5\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2$.

4. Базис $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ получается из правого ортонормированного базиса $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{k}$. Базис $\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$ получается из базиса $\mathcal{B}'$ поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{j}'$. Найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}''$.

5. Линейный оператор A, действующий на некотором двумерном пространстве, в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.

6. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 12 & -22 \\ 11 & -21 \end{pmatrix}$.

7. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $9x^2 + 24xy + 16y^2$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

8. Привести квадратичную форму $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 9x_2x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отрицательно определённой или неопределённой.

Часть Б

1. В линейном пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B} = \{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ к базису $\mathcal{B}' = \{1, t+1, (t+1)^2, (t+1)^3\}$.

2. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $3x^2 - 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz$ к каноническому виду. Указать соответствуюшее преобразование координат.

Примерный вариант билета рубежного контроля

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач; оценка 21 балл

Теория

1. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.
2. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.

Задачи

3. Вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты $(1,-2)^T$ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (3,1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1)^T$. Найти его координаты в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (3,2)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (5,4)^T$.
4. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$ квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1,x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$. Найти выражение $Q(y_1,y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$.
5. Найти матрицу линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, если A переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (8,-5)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3,2)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (-5,4)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (7,-3)^T$ соответственно.
6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма $-2x_1^2 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_4^2$ положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить задачу; оценка 5–14 баллов

Теория

7. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.

Задача

8. Привести кривую $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y = 0$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.