Примерный вариант билета рубежного контроля

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 21 балл

Теория

1. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.
2. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.

Задачи

3. Вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты $(1, -2)^T$ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (3, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1)^T$. Найти его координаты в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (3, 2)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (5, 4)^T$.
4. В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ пространства $\mathbb{R}^2$ квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$. Найти выражение $Q(y_1, y_2)$ этой квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$.
5. Найти матрицу линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, если A переводит векторы $\boldsymbol{a}_1 = (8, -5)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3, 2)^T$ в векторы $\boldsymbol{b}_1 = (-5, 4)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (7, -3)^T$ соответственно.
6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма $-2x_1^2 + 2x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 - 2x_4^2$ положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 5–14 баллов

Теория

7. Доказать инвариантность характеристического уравнения линейного оператора и инвариантность следа матрицы.

Задача

8. Привести кривую $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y = 0$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат. Построить кривую в исходной системе координат.