Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекция 14

Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f(x), \qquad (1)$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ определены и непрерывны на некотором промежутке I числовой прямой.

Если функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ являются постоянными, т. е. $a_i(x) = a_i$, $a_i = const,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ то линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка (1) будет линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 2. Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\cdot y' + a_n\cdot y = f(x), \qquad (2)$$

где $a_i = const,\ i = 1, 2, \ldots, n,$

функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке I числовой прямой.

Если функция $f(x) \equiv 0$, то дифференциальное уравнение (2) называется линейным однородным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами, а если функция $f(x) \not\equiv 0$, то неоднородным.

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\cdot y' + a_n\cdot y = 0, \qquad (3)$$

где $a_i = const,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Будем искать частные решения дифференциального уравнения (3) в виде

$$y = e^{kx}, \text{ где } k = const.$$

Тогда

$$y' = k \cdot e^{kx}, \ \ldots, \ y^{(n-1)} = k^{n-1} \cdot e^{kx}, y^{(n)} = k^{n} \cdot e^{kx}.$$

Подставим функцию $y = e^{kx}$ и ее производные в дифференциальное уравнение (3). В результате получим

$$k^{n} \cdot e^{kx} + a_1 \cdot k^{n-1} \cdot e^{kx} + \ldots + a_{n-1} \cdot k \cdot e^{kx} + a_n \cdot e^{kx} = 0,$$

$$e^{kx} \cdot (k^{n} + a_1 \cdot k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot k + a_n) = 0. \quad (4)$$

Поскольку $e^{kx} \neq 0$ при любом x, то из уравнения (4) следует, что

$$k^{n} + a_1 \cdot k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot k + a_n = 0.$$

Определение 3. Уравнение

$$k^{n} + a_1 \cdot k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot k + a_n = 0$$

называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (3).

Примечания.

1. Пусть k – комплексное число: $k = \alpha + i\beta$, x – действительное число. Тогда, используя уравнение Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, будем иметь

$$e^{kx} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Найдем производную функции $y = e^{kx}$

$$y' = (e^{kx})' = (e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i\sin\beta x))' =$$

$$= \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x} \cdot (-\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x} \cdot ((\alpha + i\beta)\cos\beta x + (i\alpha - \beta)\sin\beta x) =$$

$$= \backslash \ i\alpha - \beta = i\alpha + i^2\beta = i(\alpha + i\beta) \backslash = (\alpha + i\beta)\, e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$

$$= k \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} = k \cdot e^{kx}.$$

По индукции можно получить, что $y^{(n)} = k^{n} \cdot e^{kx}$.

2. Если функция $y(x) = u(x) + i\,v(x)$ является решением дифференциального уравнения (3), то ее действительная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ также будут решениями этого дифференциального уравнения (при действительных коэффициентах $a_1, \ldots, a_n$).

Таким образом, если $k = \alpha + i\beta \neq 0$ – комплексный корень характеристического уравнения, то функция $y = e^{kx} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i\sin\beta x)$ является решением дифференциального уравнения (3). Тогда и функции $u(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ и $v(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$ также будут решениями этого дифференциального уравнения.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0. \qquad (5)$$

где a_1 и a_2 – действительные числа.

Дифференциальному уравнению (5) соответствует характеристическое уравнение

$$k^2 + a_1 \cdot k + a_2 = 0, \qquad (6)$$

корнями которого являются числа k_1 и k_2.

В зависимости от корней характеристического уравнения *общее решение* дифференциального уравнения (5) имеет следующий вид.

1. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (6) действительные и различные, т. е. $k_1 \neq k_2$.

Рассмотрим решения дифференциального уравнения, соответствующие корням k_1 и k_2: $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$.

Проверим, являются ли эти решения линейно независимыми. Для этого найдем определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2\, e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} - k_1\, e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} =$$

$$= e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} \cdot (k_2 - k_1) \neq 0 \ \text{ (т. к. } k_1 \neq k_2\text{)}.$$

Поскольку $W(x) \neq 0$, то согласно *теореме* об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка, решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ являются линейно независимыми и образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (5).

При этом общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1\, e^{k_1 x} + C_2\, e^{k_2 x},\ \ C_1,\, C_2 = const..$$

2. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (6) действительные и равные, т. е. $k_1 = k_2$.

Обозначим $k = k_1 = k_2$. Тогда корень k характеристического уравнения имеет кратность 2 (*примечание:* кратность – это количество повторений).

Рассмотрим решения дифференциального уравнения (5)

$$y_1 = e^{kx} \text{ и } y_2 = x\, e^{kx}.$$

В начале проверим, является ли функция $y_2 = x\, e^{kx}$ решением дифференциального уравнения (5).

Имеем $y_2' = e^{kx} + k\, x\, e^{kx}$,

$$y_2'' = k\, e^{kx} + k\, e^{kx} + k^2\, x\, e^{kx} = e^{kx} \cdot (\, 2\, k + k^2\, x\,).$$

Подставим функцию $y_2 = x\, e^{kx}$ и ее производные в дифференциальное уравнение (5)

$$e^{kx} \cdot (\, 2\, k + k^2\, x\,) + a_1 \cdot (\, e^{kx} + k\, x\, e^{kx}\,) + a_2 \cdot x\, e^{kx} = 0\,,$$

$$e^{kx} \cdot (\, 2\, k + k^2\, x + a_1 \cdot (\, 1 + k\, x\,) + a_2 \cdot x\,) = 0\,,$$

$$e^{kx} \cdot (\, 2\, k + a_1 + x \cdot (\, k^2 + a_1 \cdot k + a_2\,)) = 0\,, \tag{7}$$

Согласно характеристическому уравнению

$$k^2 + a_1 \cdot k + a_2 = 0.$$

Найдем производную по k: $2\, k + a_1 = 0.$

Тогда выражение в скобках в равенстве (7) равно 0. Получаем верное равенство. Это подтверждает то, что функция $y_2 = x\, e^{kx}$ является решением дифференциального уравнения (5).

Проверим, являются ли решения $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = x\, e^{kx}$ линейно независимыми. Для этого найдем определитель Вронского

$$W(\, x\,) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & x\, e^{kx} \\ k\, e^{kx} & e^{kx} + k x e^{kx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2kx} + k\, x\, e^{2kx} - k\, x\, e^{2kx} = e^{2kx} \neq 0\,.$$

Поскольку $W(x) \neq 0$, то согласно *теореме* об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка, решения $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = x\,e^{kx}$ являются линейно независимыми и образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (5). При этом общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x\,e^{kx},$$

$$C_1,\ C_2 = const.$$

3. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (6) комплексные сопряженные корни $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta,\ \beta \neq 0.$

Примечание. Комплексные сопряженные числа – это комплексные числа, отличающиеся знаком перед мнимой частью.

Рассмотрим решения дифференциального уравнения (5), соответствующие корням k_1 и k_2: $y_1 = e^{\alpha x}\cdot \cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\cdot \sin\beta x$.

Проверим, являются ли эти решения линейно независимыми. Для этого найдем определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ -e^{\alpha x}\sin\beta x & e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\alpha x}\cdot(\cos^2\beta x + \sin^2\beta x) = e^{\alpha x} \neq 0.$$

Поскольку $W(x) \neq 0$, то согласно *теореме* об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка, решения $y_1 = e^{\alpha x}\cdot \cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\cdot \sin\beta x$ являются линейно независимыми и образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (5).

При этом общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\cdot(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x),$$

$$C_1,\ C_2 = const.$$

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0, \qquad (8)$$

где $a_i = const,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Алгоритм нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

1. Составляем характеристическое уравнение дифференциального уравнения (8)

$$k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot k + a_n = 0. \qquad (9)$$

2. Находим корни характеристического уравнения (9): $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

3. По характеру корней характеристического уравнения (9) записываем частные линейно независимые решения в соответствии со следующими правилами.

А. Каждому действительному корню k_i кратности 1 соответствует частное решение $y = e^{k_i x}$.

Б. Каждому действительному корню k_i кратности r соответствует r линейно независимых частных решений: $y_i = e^{k_i x},\ y_2 = x\, e^{k_i x}, \ldots,\ y_r = x^{r-1}\, e^{k_i x}$.

В. Каждой паре комплексных сопряженных корней кратности 1

$$k_i = \alpha + i\beta \text{ и } k_{i+1} = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$$

соответствуют два частных решения

$$y_i = e^{\alpha x} \cos\beta x \text{ и } y_{i+1} = e^{\alpha x} \sin\beta x.$$

Г. Каждой паре комплексных сопряженных корней кратности r

$$k_i = \alpha + i\beta \text{ и } k_{i+1} = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$$

соответствуют $2r$ частных решений

$$y_i = e^{\alpha x} \cos\beta x, \qquad y_{i+1} = e^{\alpha x} \sin\beta x,$$

$$y_{i+2} = x \cdot e^{\alpha x} \cos\beta x, \qquad y_{i+3} = x \cdot e^{\alpha x} \sin\beta x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{i+2r-2} = x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \cos\beta x, \quad y_{i+2r-1} = x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \sin\beta x.$$

Примечание. Частных решений линейного однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами (8) должно быть столько, какова степень характеристического уравнения (9) (т. е. столько, каков порядок данного дифференциального уравнения).

4. Составляем общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (8), используя найденные n линейно независимых частных решений $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$
$$C_1, C_2, \ldots, C_n = const.$$

Пример 1. Если корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения (9) действительные и различные, т. е. $k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n$, то общее решение дифференциального уравнения (8) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x},$$
$$C_1, C_2, \ldots, C_n = const.$$

Пример 2. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0.$$

где a_1 и a_2 – действительные числа.

Если корнями характеристического уравнения

$$k^2 + a_1 \cdot k + a_2 = 0$$

дифференциального уравнения являются комплексные сопряженные корни $k_i = \alpha + i\beta$ и $k_{i+1} = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x),$$
$$C_1, C_2 = const.$$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 4y' = 0. \qquad (10)$$

Решение.

Дифференциальное уравнение (10) является линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами (однородное, т. к. функция в правой части тождественно равна нулю, а с постоянными коэффициентами, т. к. функции перед производными постоянные).

Составим характеристическое уравнение дифференциального уравнения (10).

Производной y''' соответствует k^3, производной y' соответствует k^1. В результате получаем

$$k^3 + 4k = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$k(k^2 + 4) = 0,$$

$$k_1 = 0,\ k_2 = 2i,\ k_3 = -2i.$$

Корень $k_1 = 0$ характеристического уравнения – действительный. Ему в общем решении дифференциального уравнения (10) будет соответствовать функция $y_1 = e^{k_1 x}$, т. е. $y_1 = e^{0x} = 1$.

Корни характеристического уравнения $k_2 = 2i$ и $k_3 = -2i$ – комплексные сопряженные. Их можно записать в виде $k_2 = 2i = 0 + i2$ $(k_2 = \alpha + i\beta)$ и $k_3 = -2i = 0 - i2$ $(k_2 = \alpha - i\beta)$. Отсюда получаем, что $\alpha = 0, \beta = 2$.

Этой паре комплексных сопряженных корней $k_2 = 2i$ и $k_3 = -2i$ характеристического уравнения в общем решении дифференциального уравнения (10) будут соответствовать функции $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ и $y_3 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$, а именно $y_2 = e^{0x} \cdot \cos 2x$, откуда $y_2 = \cos 2x$, и $y_3 = e^{0x} \cdot \sin 2x$, откуда $y_3 = \sin 2x$.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (10) имеет вид

$$y = C_1 1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

или $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x,\ C_1, C_2, C_3 = const.$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=f(x), \qquad (11)$$

где функции $a_1(x),\ldots,a_n(x), f(x)$ определены и непрерывны на некотором промежутке I числовой прямой, $f(x)\not\equiv 0$.

Теорема (о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения).

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка (11) можно записать в виде

$$y(x)=y_0(x)+C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x), \qquad (12)$$

где $y_0(x)$ – частное решение дифференциального уравнения (11);

$y_1(x),\ldots,y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного дифференциального уравнения;

$C_1,\ldots,C_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство.

Дифференциальное уравнение (11) можно с помощью дифференциального оператора записать в виде $L[y]=f(x)$,

а соответствующее однородное дифференциальное уравнение – в виде

$$L[y]=0.$$

Применим дифференциальный оператор L к функции (12)

$$L[y]=L[y_0+C_1y_1+\ldots+C_ny_n]=L[y_0]+C_1L[y_1]+\ldots+C_nL[y_n]=$$

$=$ \ т. к. y_0 является решением дифференциального уравнения (11), то $L[y_0]=f(x)$, а т. к. $y_1,\ldots,y_n$ – решения соответствующего однородного дифференциального уравнения, то $L[y_1]=0,\ldots,L[y_n]=0$ \ $=f(x)$.

Получили, что при любых $C_1,\ldots,C_n$ функция $y=y(x)$, определяемая равенством (12), является решением дифференциального уравнения (11).

Проверим то, что при соответствующем подборе констант $C_1,\ldots,C_n$ можно получить решение, удовлетворяющее любым начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Для определения констант $C_1, \dots, C_n$ составим систему уравнений

$$y_0(x_0) + C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0,$$

$$y_0'(x_0) + C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0',$$

……………………………………………………….

$$y_0^{(n-1)}(x_0) + C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Поскольку функции $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ составляют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (11), то согласно *теореме* об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка определитель этой системы не равен нулю, т. е.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому требуемый набор констант $C_1, \dots, C_n$ существует.

Таким образом, оба условия, входящие в определение общего решения, проверены.

Теорема доказана.

Примечание. Как следует из *теоремы* о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения, общее решение $y_{неодн}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка (11) состоит из суммы общего решения $y_{одн}$ соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и частного решения y_0, т. е.

$$y_{неодн} = y_{одн} + y_0.$$

Теорема (о наложении частных решений дифференциального уравнения).

Пусть имеются два линейных неоднородных дифференциальных уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_2(x)$$

или $L[y] = f_1(x)$ и $L[y] = f_2(x)$.

Пусть функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются решениями этих дифференциальных уравнений.

Тогда сумма функций $y_1(x) + y_2(x)$ будет решением дифференциального уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Доказательство.

Поскольку $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x)$, то сумма функций $y_1(x) + y_2(x)$ будет решением дифференциального уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$

Теорема доказана.

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x), \qquad (13)$$

где $a_i = const,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ f(x) \neq 0$.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot k + a_n = 0. \qquad (14)$$

Его корнями являются числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Общим решением дифференциального уравнения (13) является функция

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (15)$$

где $y_0(x)$ – частное решение дифференциального уравнения (13);

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного дифференциального уравнения;

$C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Вид частного решения $y_0 = y_0(x)$ зависит от вида функции $f(x)$ в правой части дифференциального уравнения (13).

I. Пусть функция $f(x)$ в правой части дифференциального уравнения (13) имеет вид

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, α – действительное число.

1. Если число α не совпадает с корнем характеристического уравнения (14), то частное решение будем искать в виде

$$y_0 = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же n-й степени, что и многочлен $P_n(x)$, но записанный в общем виде (с неопределенными коэффициентами).

Например, многочлен 0-й степени $Q_0(x) = A$,

многочлен 1-й степени $Q_1(x) = Ax + B$,

многочлен 2-й степени $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$,

A, B, C – неопределенные коэффициенты.

2. Если число α совпадает с корнем характеристического уравнения (14) кратности r, то частное решение будем искать в виде

$$y_0 = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же n-й степени, что и многочлен $P_n(x)$, но записанный в общем виде (с неопределенными коэффициентами).

Пример 4. Найти вид частного решения дифференциального уравнения

$$y''' + 4y' = x^2 \cdot e^x. \tag{16}$$

Решение.

Решение соответствующего однородного дифференциального уравнения было получено в *примере 3.*

Корнями характеристического уравнения

$$k^3 + 4k = 0$$

этого однородного дифференциального уравнения являются числа

$$k_1 = 0, \; k_2 = 2i, \; k_3 = -2i.$$

Функция в правой части дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$f(x) = x^2 \cdot e^x,$$

где $P_n(x) = x^2$ – многочлен 2-й степени ($n = 2$), $\alpha = 1$.

Поскольку $\alpha = 1$ не совпадает с корнем характеристического уравнения $(\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2, \alpha \neq k_3)$, то частное решение будем искать в виде

$$y_0 = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \text{ где } n = 2, \alpha = 1.$$

В результате частное решение дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$y_0 = (A x^2 + B x + C) \cdot e^x,$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты

II. Пусть функция $f(x)$ в правой части дифференциального уравнения (13) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos\beta x + S_m(x) \cdot \sin\beta x),$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени,

$S_m(x)$ – многочлен m-й степени,

α, β – действительные числа.

1. Если число $\alpha + i\beta$ не совпадает с корнем характеристического уравнения (14), то частное решение будем искать в виде

$$y_0 = e^{\alpha x} \cdot (Q_N(x) \cdot \cos\beta x + R_N(x) \cdot \sin\beta x),$$

где $Q_N(x)$ и $R_N(x)$ – многочлен N-й степени, где $N = max\{n, m\}$ (т. е. это – многочлены степени, большей из степеней многочленов $P_n(x)$ и $S_m(x)$), записанные в общем виде (с неопределенными коэффициентами).

Примечание. Если в функцию $f(x)$ явно не входит функция $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, то это значит, что многочлен перед этой функции равен 0 и является многочленом степени 0. При этом обе функции $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ записывают в частном решении с соответствующим правилу многочленами (не нулевыми).

2. Если число $\alpha + i\beta$ совпадает с корнем характеристического уравнения (14) кратности r, то частное решение будем искать в виде

$$y_0 = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (Q_N(x) \cdot \cos\beta x + R_N(x) \cdot \sin\beta x),$$

где $Q_N(x)$ и $R_N(x)$ – многочлен N-й степени, где $N = max\{n, m\}$, записанные в общем виде (с неопределенными коэффициентами).

Пример 5. Найти вид частного решения дифференциального уравнения

$$y''' + 4y' = x \cdot \cos 2x. \qquad (17)$$

Решение.

Решение соответствующего однородного дифференциального уравнения было получено в *примере 3.*

Корнями характеристического уравнения

$$k^3 + 4k = 0.$$

этого однородного дифференциального уравнения являются числа

$$k_1 = 0, \; k_2 = 2i, \; k_3 = -2i.$$

Функция в правой части дифференциального уравнения (17) имеет вид

$$f(x) = x \cdot \cos 2x,$$

которую можно записать, как указано в пункте II

$$f(x) = e^{0x} \cdot (x \cdot \cos 2x + 0 \sin 2x),$$

где $P_n(x) = x$ – многочлен 1-й степени ($n = 1$),

$S_m(x) = 0$ – многочлен 0-й степени ($m = 0$),

$\alpha = 0, \; \beta = 2$. т. е. $\alpha + i\beta = 0 + i\,2 = 2i$

Поскольку $N = max\{n, m\} = max\{1, 0\} = 1,$ то в частном решении дифференциального уравнения (17) $Q_N(x)$ и $R_N(x)$ – многочлены 1-й степени.

Т. к. $\alpha + i\beta = 2i$ совпадает с корнем $k_2 = 2i$ характеристического уравнения кратности $r = 1$, то частное решение будем искать в виде

$$y_0 = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (Q_N(x) \cdot \cos\beta x + R_N(x) \cdot \sin\beta x),$$

где $N = 2, \alpha = 0, \beta = 2, r = 1.$

В результате частное решение дифференциального уравнения (17) имеет вид

$$y_0 = x^1 \cdot e^{0x} \cdot ((Ax + B) \cdot \cos 2x + (Cx + D) \cdot \sin 2x)$$

или

$$y_0 = x \cdot ((Ax + B) \cdot \cos 2x + (Cx + D) \cdot \sin 2x).$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов в частном решении линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида можно использовать *метод неопределенных коэффициентов*.

Этот метод заключается в следующем.

Поскольку частное решение $y_0 = y_0(x)$ является решением рассматриваемого линейного неоднородного дифференциального уравнения, то оно удовлетворяет этому уравнению.

После подстановки частного решения $y_0 = y_0(x)$ и его производных в рассматриваемое линейное неоднородное дифференциальное уравнение приравнивают коэффициенты при одинаковых функциях и переменных с одинаковыми степенями в правой и левой частях полученного уравнения.

Решая систему уравнений, находят неопределенные коэффициенты в частном решении $y_0 = y_0(x)$.

Затем записывают общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка в виде

$$y(x) = y_{одн}(x) + y_0(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y_0(x),$$

где $y_0 = y_0(x)$ – частное решение дифференциального уравнения

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного дифференциального уравнения;

$C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 4y' = x^2 \cdot e^x. \tag{18}$$

Решение.

В *примере 3* было получено общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y_{одн} = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x, \quad C_1, C_2, C_3 = const,$$

а в *примере 4* вид частного решения

$$y_0 = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x.$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты.

Найдем коэффициенты A, B, C методом *неопределенных коэффициентов*.

Производные частного решения $y_0 = (A x^2 + B x + C) \cdot e^x$ первого, второго и третьего порядков имеют вид

$y_0' = (2 A x + B) \cdot e^x + (A x^2 + B x + C) \cdot e^x ,$

$$y_0'' = 2 A \cdot e^x + (2 A x + B) \cdot e^x + (2 A x + B) \cdot e^x + (A x^2 + B x + C) \cdot e^x =$$
$$= 2 A \cdot e^x + 2 \cdot (2 A x + B) \cdot e^x + (A x^2 + B x + C) \cdot e^x ,$$

$$y_0''' = 2 A \cdot e^x + 4 A \cdot e^x + 2 \cdot (2 A x + B) \cdot e^x + (2 A x + B) \cdot e^x +$$
$$+ (A x^2 + B x + C) \cdot e^x = 6 A \cdot e^x + 3 \cdot (2 A x + B) \cdot e^x + (A x^2 + B x + C) \cdot e^x ,$$

Подставим частное решение $y_0 = (A x^2 + B x + C) \cdot e^x$ и его производные в дифференциальное уравнение (18)

$$6 A \cdot e^x + 3 \cdot (2 A x + B) \cdot e^x + (A x^2 + B x + C) \cdot e^x +$$
$$+ 4 \cdot ((2 A x + B) \cdot e^x + (A x^2 + B x + C) \cdot e^x) = x^2 \cdot e^x ,$$

$$(5 A x^2 + (14 A + 5 B) + 6 A + 7 B + 5 C) \cdot e^x = x^2 \cdot e^x .$$

Приравняем коэффициенты при переменных x с одинаковыми степенями в правой и левой частях полученного уравнения

$x^2 :\ 5 A = 1 ,$

$x :\ 14 A + 5 B = 0 ,$

$x^0 :\ 6 A + 7 B + 5 C = 0$ (x^0 означает свободный член).

Из полученных уравнений находим

$$A = \frac{1}{5} ,\ B = -\frac{14}{25} ,\ C = \frac{68}{125} .$$

Тогда частное решение дифференциального уравнения (18) имеет вид

$$y_0 = \left(\frac{1}{5} x^2 - \frac{14}{25} x + \frac{68}{125} \right) \cdot e^x ,$$

В результате получаем общее решение дифференциального уравнения (18)

$$y(x) = y_{одн}(x) + y_0(x) =$$
$$= C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \left(\frac{1}{5} x^2 - \frac{14}{25} x + \frac{68}{125} \right) \cdot e^x .$$

Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка методом Лагранжа (вариации постоянных)

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f(x), \qquad (19)$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ определены и непрерывны на некотором промежутке I числовой прямой, $f(x) \not\equiv 0$.

Пусть $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = 0.$$

и его общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (20)$$

где $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Заменим константы $C_1, \ldots, C_n$ в общем решении (20) функциями от x

$$C_1 = C_1(x), \ldots, C_n = C_n(x)$$

и будем искать решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка в виде

$$y = C_1(x)\cdot y_1(x) + \ldots + C_n(x)\cdot y_n(x). \qquad (21)$$

Для нахождения функций $C_1 = C_1(x), \ldots, C_n = C_n(x)$ составим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)\cdot y_1 + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n = 0,\\
&C_1'(x)\cdot y_1' + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (22)\\
&C_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)} = 0,\\
&C_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned}$$

Поскольку функции $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ составляют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (19), то согласно *теореме* об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка определитель этой системы не равен нулю, т. е.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому функции $C_1 = C_1(x), \dots, C_n = C_n(x)$ с точностью до произвольных постоянных определяются из системы уравнений (22) однозначно.

Подставив полученные функции $C_1 = C_1(x), \dots, C_n = C_n(x)$ в функцию (21), получим общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (19).

Докажем это утверждение для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f(x). \tag{23}$$

где функции $a_1(x), a_2(x), f(x)$ определены и непрерывны на некотором промежутке I числовой прямой, $f(x) \not\equiv 0.$

Пусть $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = 0 \tag{24}$$

и его общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{25}$$

где $C_1, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Заменим константы C_1, C_2 в общем решении (25) функциями от x

$$C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$$

и будем искать решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка в виде

$$y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x).. \tag{26}$$

Для нахождения функций $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ составим систему дифференциальных уравнений

$$C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0, \tag{27}$$

$$C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = f(x). \tag{28}$$

Поскольку функция $y = C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\cdot y_2(x)$ является решением дифференциального уравнения (23), то она удовлетворяет ему.

Найдем производные первого и второго порядков этой функции

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) =$$
$$= \backslash \text{ с учетом выражения (27)} \backslash = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x),$$

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) =$$
$$= \backslash \text{ с учетом выражения (28)} \backslash = f(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставим функцию $y = C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\cdot y_2(x)$ и ее производные в дифференциальное уравнение (23)

$$y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = f(x):$$

$$f(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) +$$
$$+ a_1(x)\cdot(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) +$$
$$+ a_2(x)\cdot(C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\cdot y_2(x)) = f(x),$$

$$f(x) + C_1(x)\cdot(y_1''(x) + a_1(x)\cdot y_1'(x) + a_2(x)\cdot y_1(x)) +$$
$$+ C_2(x)\cdot(y_2''(x) + a_1(x)\cdot y_2'(x) + a_2(x)\cdot y_2(x)) = f(x). \tag{29}$$

Поскольку функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются частными решениями дифференциального уравнения (24), то они ему удовлетворяют, т. е.

$$y_1''(x) + a_1(x)\cdot y_1'(x) + a_2(x)\cdot y_1(x) = 0,$$

$$y_2''(x) + a_1(x)\cdot y_2'(x) + a_2(x)\cdot y_2(x) = 0.$$

Учитывая это в выражении (29), получаем

$$f(x) + C_1(x)\cdot 0 + C_2(x)\cdot 0 = f(x),$$

$f(x) = f(x)$, верно.

Таким образом, утверждение доказано.

Примечание. Метод Лагранжа можно использовать для нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f(x)$$

и в случае, если функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ являются постоянными.

Метод неопределенных коэффициентов используют только, если функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ являются постоянными.

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x\cdot y'' + y' = x^2. \tag{30}$$

Решение.

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$x\cdot y'' + y' = 0$$

имеет вид

$$y_{одн} = C_1 \ln x + C_2\,,\ \ C_1\,, C_2 = const. \tag{31}$$

(найдите решение самостоятельно)

Отсюда получаем $y_1 = \ln x,\ y_2 = 1.$

Заменим константы C_1, C_2 в общем решении (31) функциями от x

$$C_1 = C_1(x),\ C_2 = C_2(x)$$

и будем искать решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (30) в виде

$$y = C_1(x)\cdot \ln x + C_2(x). \tag{32}$$

Для нахождения функций $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ составим систему дифференциальных уравнений

$$C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0\,,$$
$$C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = f(x)\,.$$

Получаем

$$C_1'(x)\cdot \ln x + C_2'(x) = 0\,,$$

$$C_1'(x)\cdot \frac{1}{x} + C_2'(x)\cdot 0 = x^2\,.$$

Из второго уравнения получаем

$$\frac{d\,C_1(x)}{dx} = x^3\ ,\ \ d\,C_1(\,x\,) = x^3\,dx\ ,$$

$$\int d\,C_1(\,x\,) = \int x^3 dx\,,$$

$$C_1(\,x\,) = \frac{x^4}{4} + C_3\ ,\ \ C_3 = const.$$

Подставим $C_1{}'(\,x\,) = x^3$ в первое уравнение системы

$$x^3\ \ ln\,x\ + C_2{}'(\,x\,) = 0\,,$$

откуда

$$C_2{}'(\,x\,) = \,-x^3\cdot ln\,x\ ,\ \ \frac{d\,C_2(\,x\,)}{dx} = -\,x^3\cdot ln\,x\ ,$$

$$d\,C_2(\,x\,) = -\,x^3\cdot ln\,x\,dx\ ,$$

$$\int d\,C_2(\,x\,) = \int(-x^3\,ln\,x)\,dx\,,$$

$$C_2(\,x\,) = -\int x^3\,ln\,x\ dx\ =$$

= \ интегрируем по частям: $u = ln\,x\,,\,du = \dfrac{1}{x}\ dx.\ dv = x^3dx\,,\,v = \dfrac{x^4}{4}$ \ =

$$= -\,\frac{x^4}{4}\cdot ln\,x + \frac{1}{4}\int x^4\,\frac{1}{x}\,dx\ = -\,\frac{x^4}{4}\cdot ln\,x + \frac{1}{16}\,x^4 + C_4\ ,\ \ C_4 = const.$$

Подставим $C_1(\,x\,) = \dfrac{x^4}{4} + C_3$ и $C_2(\,x\,) = -\,\dfrac{x^4}{4}\cdot ln\,x + \dfrac{1}{16}\,x^4 + C_4$ в функцию (32)

$$y = C_1(\,x\,)\cdot ln\,x + C_2(\,x\,) = (\,\frac{x^4}{4} + C_3\,)\cdot ln\,x - \frac{x^4}{4}\cdot ln\,x + \frac{1}{16}\,x^4 + C_4 =$$

$$= C_3\cdot ln\,x + C_4 + \frac{1}{16}\,x^4.$$

В результате получаем общее решение дифференциального уравнения (30)

$$y = C_3\cdot ln\,x + C_4 + \frac{1}{16}\,x^4\,.$$