Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекция 10

Обыкновенные дифференциальные уравнения.
Основные понятия и определения

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

В общем виде дифференциальное уравнение можно записать так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

или

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Если неизвестная функция $y = y(x)$ является функцией одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Если неизвестная функция является функцией нескольких независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*.

Мы будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Определение 2. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной неизвестной функции, входящей в уравнение.

Так, например, уравнение

$$y' + 2xy^2 - 5 = 0$$

является дифференциальным уравнение первого порядка, а уравнение

$$y'' - 3y' + 4x^3y^2 - 1 = 0$$

является дифференциальным уравнение второго порядка.

Определение 3. Решением или интегралом обыкновенного дифференциального уравнения (1) называется функция $y = y(x)$, определенная и n раз непрерывно дифференцируемая на некотором интервале $I \subset R$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в верное равенство при любом $x \in I$.

График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения часто называют интегрированием дифференциального уравнения.

В общем виде дифференциальное уравнение первого порядка можно записать так

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

где x – независимая переменная,

$y = y(x)$ – неизвестная функция,

$y' = y'(x)$ – производная этой функции,

F – заданная функция трех переменных.

Дифференциальным уравнением, разрешенным относительно производной, называется уравнение вида

$$y' = f(x, y). \tag{3}$$

Рассмотрим *задачу, приводящую к решению дифференциального уравнения*. Тело массой m падает под действием силы тяжести mg (g – ускорение свободного падения) и силы сопротивления $F_{тр} = -kv$, пропорциональной скорости v;, где k – коэффициент сопротивления. Найти зависимость скорости движения тела от времени t.

Решение.

Используя второй закон Ньютона, составим уравнение, описывающее движение тела

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Полученное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной $\frac{dv}{dt}$, механическим смыслом которой является ускорение движения рассматриваемого тела.

Решением этого дифференциального уравнения, что можно проверить подстановкой, является совокупность функций

$$v(t) = \frac{mg}{k} + C\, e^{-\frac{kt}{m}},$$

где C – произвольная постоянная.

Если в момент времени $t = 0$ тело начинает падение с начальной скоростью $v(0) = v_0$, то $C = v_0 - \frac{mg}{k}$ и тогда

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

или

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) + v_0\, e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Кроме того, это дифференциальное уравнение имеет решение $v(t) = \frac{mg}{k}$, к которому стремятся все решения при $t \to \propto$, независимо от значения $t > 0.$

Введем *некоторые понятия*, относящиеся к функциям двух переменных.

Определение 4. Окрестностью точки на плоскости называется открытый круг (т. е. круг без точек ограничивающей его окружности) положительного радиуса с центром в этой точке.

Определение 5. Множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую ее окрестность.

Определение 6. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве.

Определение 7. Множество называется областью, если оно одновременно открыто и связно.

Примеры.

1) Круг $K = \{ (x, y) : x^2 + y^2 < 1 \}$ радиуса 1 с центром в начале координат (без точек ограничивающей его окружности) является открытым и связным множеством, поэтому является областью.

2) Круг $\overline{K} = \{ (x, y): x^2 + y^2 \le 1 \}$ радиуса 1 с центром в начале координат (с точками ограничивающей его окружности) является связным, но не является открытым множеством, поэтому не является областью.

3) Объединение двух непересекающихся кругов не является связным множеством и, следовательно, не является областью.

Пусть правая часть дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ определена на некоторой области G плоскости переменных x и y, а функция

$$y = y(x, C) \tag{4}$$

определена на области D плоскости переменных x, C.

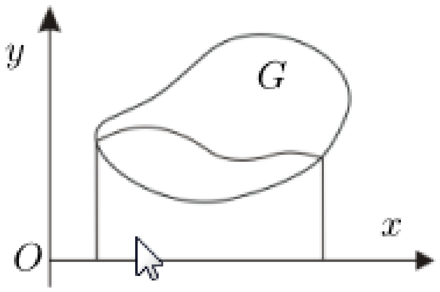

Рисунок 1

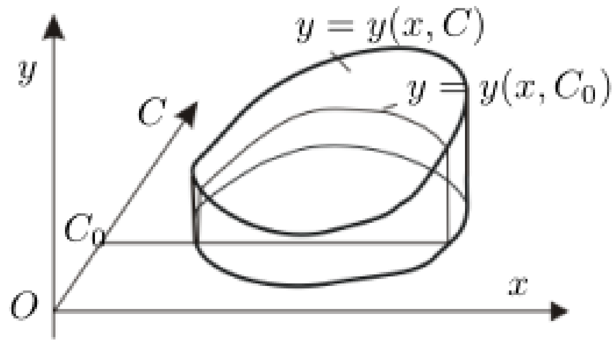

Рисунок 2

Определение 8. Функция

$$y = y(x, C)$$

называется общим решением дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y),$$

если выполнены следующие условия.

1. При любом фиксированном C функция $y = y(x, C)$ является решением данного дифференциального уравнения.

2. Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется значение $C = C_0$ такое, что $y_0 = y(x_0, C_0)$.

Замечание к пункту 1 определения 8.

1. При некоторых значениях C может и не существовать таких x, при которых $(x, C) \in D$. Эти значения C следует исключить из рассмотрения.

2. Если значения x, при которых $(x, C) \in D$ существуют, то областью определения функции $y = y(x, C)$ при фиксированном C может быть объединение нескольких (или даже бесконечного числа) непересекающихся интервалов. В этом случае общим решением дифференциального уравнения являются решения, заданные на отдельных интервалах, входящих в указанную область определения.

Если при решении дифференциального уравнения получается соотношения вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{5}$$

из которого невозможно выразить функцию y, то общее решение оставляют в неявном виде.

Определение 9. Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение дифференциального уравнения, называют его общим интегралом.

Определение 10. Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = y(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = y(x, C)$ при фиксированном значении произвольной постоянной $C = C_0$.

Определение 11. Неявно заданное решение дифференциального уравнения $\Phi(x, y, C_0) = 0$, получаемое из общего интеграла $\Phi(x, y, C) = 0$ при фиксированном значении произвольной постоянной $C = C_0$, называют частным интегралом.

С геометрической точки зрения общий интеграл дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C. Эти кривые называются интегральными кривыми данного дифференциального уравнения.

Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку плоскости.

Пример. Покажем, что функция $y = \frac{x^2}{2} + C$ является общим решением дифференциального уравнения $y' = x$ при любом фиксированном C ($C = const$).

Для проверки этого подставим функцию $y = \frac{x^2}{2} + C$ в дифференциальное уравнение $y' = x$

$$\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x, \text{ откуда } \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$$

В результате получаем верное равенство $x = x$.

Таким образом, функция $y = \frac{x^2}{2} + C$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = x$, т. е. является его общим решением.

Если задана произвольная точка (x_0, y_0), то для нахождения соответствующего значения C_0 подставим эту точку и $C = C_0$ в общее решение

$$y_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0,$$

откуда $C_0 = y_0 - \frac{x_0^2}{2}$.

Тогда частное решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

Задача Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$,

Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит области определения функции $f(x, y)$ (правой части дифференциального уравнения).

Необходимо найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Это условие называется начальным условием, а x_0 и y_0 – начальными значениями.

Геометрически задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0).

Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка

Введем понятие частной производной. Пусть функция $f(x, y)$ определена в области G на плоскости переменных x, y.

Частной производной этой функции в точке $(x, y) \in G$ по переменной y называется предел, если он существует

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, при вычисления частной производной функции $f(x, y)$ в точке (x, y) по переменной y следует зафиксировать x и продифференцировать получившуюся функцию одной переменной y.

Теорема (Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка).

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ на некоторой области G плоскости переменных x, y. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ существует решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Любые два решения этого уравнения, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию, совпадают всюду, где они оба определены.

Эту *теорему* принимаем без доказательства.

Таким образом, при выполнении условий сформулированной теоремы решение соответствующей задачи Коши существует и единственно. Геометрически утверждение теоремы означает, что через каждую точку области, в которой задана правая часть уравнения, проходит только одна интегральная кривая этого уравнения.