Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекция 11

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \tag{1}$$

где функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны на интервалах I_1 и I_2 соответственно, причем $g(y) \neq 0$ при любом $y \in I_2$.

Пусть функция $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения (1).

Умножим обе части уравнения (1) на $\dfrac{1}{g(y)}\, dx$.

Тогда, учитывая, что по определению дифференциала функции

$$\frac{dy}{dx}\, dx = y'dx = dy,$$

получаем следующее уравнение

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx, \tag{2}$$

в котором выражения в левой и правой частях зависят от разных переменных.

Определение. Дифференциальное уравнение (2) называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*.

Преобразование дифференциального уравнения (1) к виду (2) называют разделением переменных.

Уравнение (2) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, неопределенные интегралы от которых будут отличаться постоянным слагаемым.

Интегрируя левую часть дифференциального уравнения (2) по y, а правую часть по x, находим соответствующие первообразные и записываем общий интеграл уравнения в виде

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + c, \ c = const.$$

В этом равенстве интегралы означают какие-либо фиксированные первообразные (а не всю их совокупность).

Может оказаться, что в дифференциальном уравнении (1) функция $g(y)$ равна нулю в некоторых точках $y_1, y_2, \ldots$ интервала I_2. В этом случае функции $y \equiv y_1, y \equiv y_2, \ldots$ являются решениями уравнения (1), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Про эти решения говорят, что они «теряются» при разделении переменных, т. е. при делении обеих частей дифференциального уравнения (1) на функцию $g(y)$.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^2 y \frac{dy}{dx} + 1 = y.$$

В результате преобразования имеем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{y-1}{y}.$$

В этом случае $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, g(y) = \dfrac{y-1}{y}$.

Предположим, что $g(y) \neq 0$. Тогда, разделив переменные, получим

$$\frac{y}{y-1} dy = \frac{1}{x^2} dx.$$

Проинтегрируем левую часть дифференциального уравнения по y, а правую по x

$$\int \frac{y}{y-1} dy = \int \frac{1}{x^2} dx.$$

Тогда получаем

$$y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + c, \ c = const$$

или

$$y + \ln|y - 1| + \frac{1}{x} = c. \tag{3}$$

Это решение определено на всей числовой прямой R, кроме точки $x = 0$. Для любой точки (x_0, y_0) области $D = R \setminus (0, 1)$ существует единственное значение

$$c_0 = y_0 + \ln|y_0 - 1| + \frac{1}{x_0},$$

удовлетворяющее частному решению данного дифференциального уравнения при начальном условии $y(x_0) = y_0$.

Поэтому выражение (3) задает общий интеграл данного дифференциального уравнения в области D.

Однако этому дифференциальному уравнению удовлетворяет и решение $y(x) = 1$, обращающее в нуль функцию $g(y) = \dfrac{y-1}{y}$. Это решение было «потеряно» при разделении переменных в предположении, что $g(y) \neq 0$.

Чтобы получить все решения рассматриваемого дифференциального уравнения, необходимо к решениям, описываемым выражением (3), присоединить решение $y(x) \equiv 1$.

Замечание. Пусть функция $g(y)$, входящая в дифференциальное уравнение (1), имеет корень $y = a$, т. е. $g(a) = 0$. Тогда, очевидно, функция $y = a$ является решением уравнения (1). Однако при решения задачи Коши, т. е. нахождения частного решение дифференциального уравнения при начальном условии $y(x_0) = y_0$, необходимо проводить анализ этого случая, т .к. на прямой $y = a$ может нарушиться условие единственности.

Например, дифференциальное уравнение $y' = 2\sqrt{y}$ имеет общее решение $y = (x + c)^2$ и решение $y = 0$, которое не получается из общего решения. При начальном условии $y(x_0) = y_0$ на прямой $y = 0$ нарушается условие единственности решения задачи Коши.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка иногда записывают в виде

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{4}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – функции, определенные и непрерывные в некоторой области D.

Про дифференциальное уравнение (4) говорят, что оно записано через дифференциалы или в симметрической форме.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)\cdot M_2(y)\,dx + N_1(x)\cdot N_2(y)\,dy = 0, \tag{5}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Предположим, что $N_1(x) \neq 0$ и $M_2(y) \neq 0$.

Дифференциальное уравнение (5) можно привести к дифференциальному уравнению с разделенными переменными, разделив обе его части на выражение $N_1(x)\cdot M_2(y)$

$$\frac{M_1(x)\cdot M_2(y)}{N_1(x)\cdot M_2(y)}\,dx + \frac{N_1(x)\cdot N_2(y)}{N_1(x)\cdot M_2(y)}\,dy = 0$$

или

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx.$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

Пример 1. Функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ – однородная функция первого измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda \cdot f(x,y)$.

Пример 2. Функция $f(x,y) = xy - y^2$ – однородная функция второго измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)\cdot(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 (xy - y^2) = \lambda^2 f(x,y)$.

Пример 3. Функция $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ – однородная функция нулевого измерения, так как

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)\cdot(\lambda y)}=\frac{\lambda^2(x^2-y)^2}{\lambda^2(xy)}=\frac{x^2-y^2}{xy}=f(x,y).$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

называется *однородным* относительно *x* и *y*, если функция $f(x,y)$ является однородной функцией нулевого измерения относительно x и y.

Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{6}$$

в котором функция $f(x,y)$ является однородной функцией нулевого измерения относительно x и y, т. е. $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$.

Положив в этом тождестве $\lambda=\dfrac{1}{x}$, получим

$$f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)=f\Big(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y\Big)=f\Big(1,\frac{y}{x}\Big),$$

т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов.

Тогда дифференциальное уравнение (6) примет вид

$$\frac{dy}{dx}=f\Big(1,\frac{y}{x}\Big). \tag{7}$$

Сделаем подстановку $u=\dfrac{y}{x}$, т. е. $y=x\cdot u$.

Откуда $y'=u+u'x$ или $\dfrac{dy}{dx}=u+\dfrac{du}{dx}\cdot x$.

Подставляя $u = \frac{y}{x}$ и выражение производной в уравнение (7), будем иметь

$$u + \frac{du}{dx} \cdot x = f(1, u). \tag{8}$$

Дифференциальное уравнение (8) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} \cdot x = f(1, u) - u \text{ или } \frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получаем

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c,\ c = const.$$

Подставляя после интегрирования вместо u отношение $\frac{y}{x}$, находим общее решение дифференциального уравнения (6).

Замечание. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

будет однородным в том и только в том случае, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения. Это вытекает из того, что отношение двух однородных функций одного и того же измерения является однородной функцией нулевого измерения.

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Решение.

Проверим, является ли функция $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ однородной функцией нулевого измерения.

Поскольку $f(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \frac{\lambda y}{\lambda x} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = f(x, y)$, то функция $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ является однородной функцией нулевого измерения.

Полагаем $u = \dfrac{y}{x}$ или $y = x \cdot u$. Откуда $y' = u + u'x$ или $\dfrac{dy}{dx} = u + \dfrac{du}{dx} \cdot x$.

Подставляя $u = \dfrac{y}{x}$ и выражение производной в дифференциальное уравнение, будем иметь

$$u + \frac{du}{dx} \cdot x = e^{u} + u \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} \cdot x = e^{u}.$$

Разделив переменные, получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$e^{-u} du = \frac{1}{x}\, dx.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int e^{-u} du = \int \frac{dx}{x} \,,$$

получаем

$$-e^{-u} = ln\,|\,x\,| + c\,,\ c = const.$$

Вместо константы c можно взять константу $ln\,|\,c\,|$.

Тогда

$$-e^{-u} = ln\,|\,x\,| + ln\,|\,c\,|,$$

$$e^{-u} = -\,(\,ln\,|\,x\,| + ln\,|\,c\,|\,),$$

$$e^{-u} = ln\left|\frac{1}{cx}\right|,$$

$$u = -\,ln\,(\,ln\left|\frac{1}{cx}\right|\,).$$

Сделаем обратную замену переменной $u = \dfrac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = -\,ln\,(\,ln\left|\frac{1}{cx}\right|\,).$$

В результате получаем общее решение рассматриваем дифференциального уравнения

$$y = -\,x \cdot ln\,(\,ln\left|\frac{1}{cx}\right|\,).$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Определение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \tag{9}$$

где функции $P(x)$ и $Q(x)$ определены и непрерывны на некотором интервале I.

Замечание. Функции $P(x)$ и $Q(x)$ могут быть постоянными.

Если $Q(x) = 0$. то дифференциальное уравнение (9) называется однородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка, а если $Q(x) \neq 0$. то дифференциальное уравнение (9) называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка

Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка

1. *Метод вариации постоянной* (или *метод Лагранжа*).

Вначале найдем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y' + P(x) \cdot y = 0 \text{ или } \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0. \tag{10}$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Разделив переменные, получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\frac{1}{y}\, dy = -P(x)\, dx.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-P(x))\, dx,$$

получаем

$$ln\,|y| = -\int P(x)dx + a,\ \ a = const.$$

Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $P(x)$ на интервале I, т. е. $\int P(x)dx = F(x)$.

Тогда

$$ln\,|y| = -F(x) + a$$

и общее решение дифференциального уравнения (10) будет иметь вид

$$y = e^{-F(x)+a} \text{ или } y = e^{a}\cdot e^{-F(x)} \text{ или } y = C\cdot e^{-F(x)}, \text{ где } C = e^{a}.$$

Заменим постоянную C, входящую в общее решение, функцией $C(x)$

$$y = C(x)\cdot e^{-F(x)} \qquad (11)$$

и подставим эту функцию в исходное дифференциальное уравнение (9)

$$(C(x)\cdot e^{-F(x)})' + P(x)\cdot C(x)\cdot e^{-F(x)} = Q(x),$$

$$C'(x)\cdot e^{-F(x)} - C(x)\cdot e^{-F(x)}F'(x) + P(x)\cdot C(x)\cdot e^{-F(x)} = Q(x).$$

Учитывая, что $F'(x) = P(x)$, получаем

$$C'(x)\cdot e^{-F(x)} - C(x)\cdot e^{-F(x)}P(x) + P(x)\cdot C(x)\cdot e^{-F(x)} = Q(x),$$

$$C'(x)\cdot e^{-F(x)} = Q(x),$$

$$C'(x) = Q(x)\cdot e^{F(x)} \text{ или } \frac{dC(x)}{dx} = Q(x)\cdot e^{F(x)}.$$

Разделив переменные, получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$dC(x) = Q(x)\cdot e^{F(x)}dx.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int dC(x) = \int Q(x)\cdot e^{F(x)}dx,$$

получаем

$$C(x) = \int Q(x)\cdot e^{F(x)}dx + c_1,\ \ c_1 = const,$$

где интеграл в правой части означает какую-либо фиксированную первообразную соответствующей функции (а не всю совокупность этих первообразных).

Подставим $C(x)$ в выражение (11). В результате получаем общее решение линейного дифференциального уравнения (9)

$$y = \left(\int Q(x) \cdot e^{F(x)} dx + c_1 \right) \cdot e^{-F(x)}, \tag{12}$$

где $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $P(x)$ на интервале I.

2. *Метод Бернулли*.

Будем искать решение линейного дифференциального уравнения (9) в виде произведения двух функций, зависящих от x

$$y = u \cdot v, \tag{13}$$

где $u = u(x),\ v = v(x)$.

Одну из этих функций можно выбрать произвольной, тогда другая определяется на основании уравнения (9).

Найдем производную функции $y = u \cdot v$

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставим выражение (13) функции y и полученное выражение производной в уравнение (9)

$$u'v + uv' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x).$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые (или первое и третье слагаемые) левой части уравнения и вынесем общий множитель за скобку

$$u'v + u \cdot (v' + P(x) \cdot v) = Q(x). \tag{14}$$

Поскольку одну из функций $u = u(x)$ или $v = v(x)$ можно найти произвольно, то выберем функцию $v = v(x)$ такой, чтобы

$$v' + P(x) \cdot v = 0 \ \text{ или } \ \frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v = 0. \tag{15}$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении, находим

$$\frac{dv}{dx} = -P(x) \cdot v,$$

$$\frac{1}{v}\, dv = -P(x)\, dx.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int \frac{dv}{v} = \int (-P(x))dx,$$

получаем

$$ln|v| = -\int P(x)dx + c_1, \; c_1 = const.$$

Поскольку функцию $v = v(x)$ выбираем произвольно и достаточно какого-нибудь отличного от нуля решения уравнения (15), то возьмем $c_1 = 0$.

Тогда за функцию $v = v(x)$ возьмем

$$v = e^{-F(x)}, \tag{16}$$

где $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $P(x)$ на интервале I, т. е. $\int P(x)dx = F(x)$.

Очевидно, что $v(x) \neq 0$ для любого $x \in I$.

Подставляя найденное значение $v = v(x)$ в уравнение (14), получаем (учитывая, что $v' + P(x) \cdot v = 0$ в соответствии с (15))

$$u'v = Q(x),$$

$$u' \cdot e^{-F(x)} = Q(x),$$

$$u' = Q(x) \cdot e^{F(x)}$$

или $$\frac{du}{dx} = Q(x) \cdot e^{F(x)}.$$

Разделив переменные, получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$du = Q(x) \cdot e^{F(x)} dx.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int du = \int Q(x) \cdot e^{F(x)} dx,$$

получаем

$$u = \int Q(x) \cdot e^{F(x)} dx + c, \; c = const, \tag{17}$$

где интеграл в правой части означает какую-либо фиксированную первообразную соответствующей функции (а не всю совокупность этих первообразных).

Подставляя выражение (17) для $u = u(x)$ и выражение (16) для $v = v(x)$ в формулу (13), получаем общее решение линейного дифференциального уравнения (9)

$$y = \left(\int Q(x) \cdot e^{F(x)} dx + c \right) \cdot e^{-F(x)},$$

где $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $P(x)$ на интервале I.

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}. \tag{18}$$

Решение.

1. Найдем решение дифференциального уравнения *методом вариации постоянной* (или *методом Лагранжа)*.

Вначале найдем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y' + y \cdot \cos x = 0 \text{ или } \frac{dy}{dx} + y \cdot \cos x = 0.$$

Разделив переменные, получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\frac{1}{y}\, dy = -\cos x\, dx.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x\, dx,$$

получаем

$$\ln|y| = -\sin x + \ln C, \;\; \ln C = const.$$

$$y = C \cdot e^{-\sin x}.$$

Заменим постоянную C, входящую в общее решение, функцией $C(x)$

$$y = C(x) \cdot e^{-\sin x} \tag{19}$$

и подставим эту функцию в рассматриваемое дифференциальное уравнение (18)

$$(C(x) \cdot e^{-\sin x})' + C(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x},$$

$$C'(x) \cdot e^{-\sin x} + C(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot (-\cos x) + C(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}.$$

Отсюда получаем

$$C'(x)\cdot e^{-\sin x}=e^{-\sin x},$$

$$C'(x)=1 \quad \text{или} \quad \frac{d\,C(x)}{dx}=1\,.$$

Разделив переменные, получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$d\,C(x)=dx.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int d\,C(x)=\int dx$$

получаем

$$C(x)=x+c_1,\ \ c_1=const.$$

Подставим $C(x)$ в выражение (19). В результате получаем общее решение рассматриваемого линейного дифференциального уравнения (18)

$$y=(x+c_1)\cdot e^{-\sin x}.$$

2. Найдем решение дифференциального уравнения (18) *методом Бернулли.*

Будем искать решение линейного дифференциального уравнения (18) в виде произведения двух функций, зависящих от x

$$y=u\cdot v, \tag{20}$$

где $u=u(x),\, v=v(x)$.

Найдем производную функции $y=u\cdot v$

$$y'=u'v+u\,v'.$$

Подставим выражение (20) функции y и полученное выражение производной в уравнение (18)

$$u'v+u\,v'+u\cdot v\cdot\cos x=e^{-\sin x}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые левой части уравнения и вынесем общий множитель за скобку

$$u'v+u\cdot(v'+v\cdot\cos x)=e^{-\sin x}. \tag{21}$$

Поскольку одну из функций $u = u(x)$ или $v = v(x)$ можно найти произвольно, то выберем функцию $v = v(x)$ такой, чтобы

$$v' + v \cdot \cos x = 0 \text{ или } \frac{dv}{dx} + v \cdot \cos x = 0. \qquad (22)$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении, находим

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \cos x,$$

$$\frac{1}{v}\, dv = -\cos x\, dx.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x\, dx,$$

получаем

$$\ln|v| = -\sin x + c_1,\ c_1 = const.$$

Поскольку функцию $v = v(x)$ выбираем произвольно, то возьмем $c_1 = 0$.

Тогда за функцию $v = v(x)$ возьмем

$$v = e^{-\sin x}. \qquad (23)$$

Подставляя найденное значение $v = v(x)$ в уравнение (21), получаем (учитывая, что $v' + v \cdot \cos x = 0$ в соответствии с (22))

$$u' e^{-\sin x} = e^{-\sin x},$$

$$u' = 1 \text{ или } \frac{du}{dx} = 1.$$

Разделив переменные, получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$du = dx.$$

Проинтегрировав это уравнение

$$\int du = \int dx$$

получаем

$$u = x + c,\ c = const. \qquad (24)$$

Подставляя выражение (24) для $u = u(x)$ и выражение (23) для $v = v(x)$ в формулу (20), получаем общее решение рассматриваемого линейного дифференциального уравнения (18)

$$y = (x + c_1) \cdot e^{-\sin x}.$$

Определение. Уравнением Бернулли называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha},$$

где $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ (в случае, если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, то получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида;

функции $P(x)$ и $Q(x)$ определены и непрерывны на некотором интервале I.

Методы решения уравнения Бернулли совпадают с методами решения линейного дифференциального уравнение первого порядка.