Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекция 12

Дифференциальные уравнения *n*-го порядка. Основные понятия и определения

Определение 1. Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где x – независимая переменная,

$y = y(x)$ – неизвестная (искомая) функция,

$y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – производные соответствующих порядков функции $y = y(x)$,

F – заданная функция указанных переменных.

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

называется дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно производной.

При этом функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ определена и непрерывна на некоторой области $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

Определение 2. Решением дифференциального уравнения n-го порядка называется n раз (непрерывно) дифференцируемая функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале $I \subset R$, которая, будучи подставленной в уравнение, обращает его в верное равенство при любом $x \in I$.

Определение 3. Общим решением дифференциального уравнения (2) называется функция

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{3}$$

заданная на некоторой области D $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, C_1, \ldots, C_n$ и обладающая следующими свойствами.

1. При любых фиксированных $C_1, \dots, C_n$, для которых существует хотя бы один интервал I такой, что для любого $x \in I$ точка $(x, C_1, \dots, C_n)$ лежит в области D, и функция $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ является решением дифференциального уравнения (2) на любом таком интервале.

Примечание. Иногда говорят так: при любых фиксированных $C_1, \dots, C_n$ функция $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ является решением дифференциального уравнения (2).

2. Для любой точки $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)})$ из области определения правой части дифференциального уравнения (2) найдутся числа $C_{10}, \dots, C_{n0}$ такие, что функция $y = y(x, C_{10}, \dots, C_{n0})$ определена на некотором интервале, содержащем точку x_0, и удовлетворяет начальным условиям

$$y(x_0, C_{10}, \dots, C_{n0}) = y_0,$$
$$y'(x_0, C_{10}, \dots, C_{n0}) = y_0',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n-1)}(x_0, C_{10}, \dots, C_{n0}) = y_0^{(n-1)}.$$

Определение 4. Соотношение вида

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0,$$

неявно определяющее общее решение дифференциального уравнения, называется общим интегралом этого уравнения.

Определение 5. Всякое решение дифференциального уравнения (2), получающееся из общего решения при фиксированных значениях постоянных $C_1, \dots, C_n$, называется частным решением этого уравнения.

Определение 6. Неявно заданное решение дифференциального уравнения (2), получающееся из общего интеграла при фиксированных значениях постоянных $C_1, \dots, C_n$, называется частным интегралом этого уравнения.

Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка

Теорема (Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка).

Если в дифференциальном уравнении

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные по переменным $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области G пространства переменных $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, то для любой точки $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$ из этой области G существует решение $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Любые два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают всюду, где они оба определены.

Эту теорему принимаем без доказательства.

Задача Коши для дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$

Задача нахождения решения дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

называется задачей Коши.

Из теоремы Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка следует, что при выполнении ее условий решение задачи Коши существует и единственно.

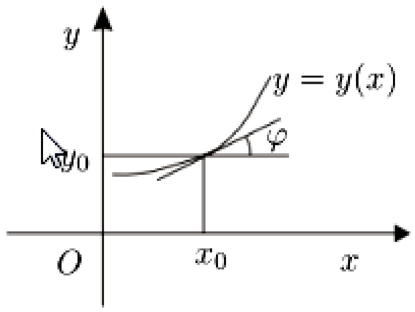
Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{4}$$

Найти решение дифференциального уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',$$

где (x_0, y_0, y_0') – некоторая точка из области определения функции $f(x, y, y')$.



Геометрически это означает, что надо найти интегральную кривую на плоскости переменных x, y, проходящую через точку (x_0, y_0) и касающуюся в этой точке прямой с заданным угловым коэффициентом $tg\,\varphi = y_0'$.

Меняя y_0', можно получить бесконечно много интегральных кривых, проходящих через указанную точку. Отсюда следует, что при выполнении условий теоремы Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка дифференциальное уравнение (4) второго порядка имеет бесконечно много решений.

Аналогичный вывод справедлив и для уравнений более высоких порядков.

Краевая задача для дифференциального уравнения n-го порядка

При решении задачи Коши для дифференциального уравнения (2) n-го порядка при известном общем решении $y = y(x, C_1, \ldots, C_n)$ находят частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, заданным в одной точке x_0.

Однако при решении некоторых задач необходимо найти частное решение, удовлетворяющее начальным значениям, заданным при различных аргументах x. Задача нахождения такого частного решения называется краевой задачей для дифференциального уравнения n-го порядка

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка.

При этом будем рассматривать решения этого дифференциального уравнения, заданные не на интервале, а на отрезке.

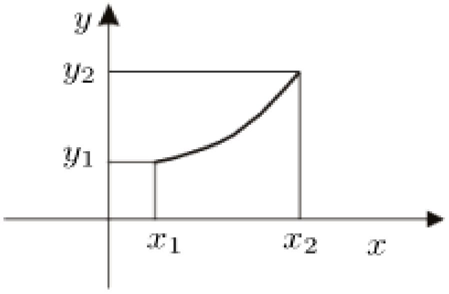
Под производными функции $y = y(x)$ в граничных точках отрезка будем понимать соответствующие односторонние производные.

Общее решение уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные, поэтому для их определения необходимы два условия.

Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка состоит в том, чтобы найти решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$, заданное на отрезке $[x_1, x_2]$ и удовлетворяющее условиям

$$y(x_1) = y_1,\; y(x_2) = y_2 .$$

Эти условия называются краевыми условиями 1-го рода.



Геометрически такая задача означает, что необходимо найти интегральную кривую, проходящую через заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Если заданы значения производных

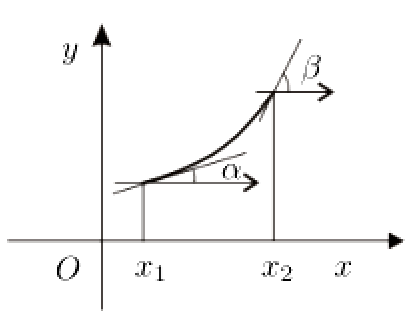
$$y'(x_1) = y_1',\; y'(x_2) = y_2',$$

то такие условия называются краевыми условиями 2-го рода.

Геометрически задача нахождения решения дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющего краевым условиям

$$y(x_1) = y_1,\; y(x_2) = y_2,$$

$$y'(x_1) = y_1',\; y'(x_2) = y_2',$$



означает, что необходимо найти интегральную кривую, проходящую через заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и имеющую в этих точках касательные с угловыми коэффициентами $tg\,\alpha = y_1'$ и $tg\,\beta = y_2'$ соответственно.

В отличие от задачи Коши, которая имеет единственное решение, краевая задача может не иметь решений или иметь несколько (и даже бесконечное множество) решений.

Для решения краевой задачи находят общее решение соответствующего дифференциального уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2, а затем (если это возможно), определяют C_1 и C_2, при которых выполняются краевые условия.

Задача. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - y' = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 1, y(1) = 0.$$

Решение.

Общим решением дифференциального уравнения является функция

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^x,$$

что можно проверить ее подстановкой в дифференциальное уравнение.

Найдем константы C_1 и C_2, используя краевые условия

$$1 = C_1 + C_2,$$

$$0 = C_1 + C_2 \cdot e.$$

В результате получаем $C_1 = \dfrac{e}{e-1}$, $C_2 = -\dfrac{1}{e-1}$.

Тогда частным решением дифференциального уравнения является функция

$$y = \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e-1} \cdot e^x.$$

Интегрирование дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка

I. Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x).$$

Для нахождения общего решения этого уравнения необходимо n его раз последовательно проинтегрировать.

При этом будем учитывать, что

$$\int y^{(k)}(x)dx = \int d\,y^{(k-1)}(x) = y^{(k-1)}(x),\ k = n, n-1, \ldots, 1\ ;$$

$$y^{(0)}(x) = y(x).$$

Примечание. При нахождении неопределенных интегралов каждый раз добавляем в правой части соответствующую константу. В результате в общем решении дифференциального уравнения будет столько констант, каков порядок этого уравнения.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' = \cos x. \tag{5}$$

Решение.

Умножим обе части уравнения (5) на $d\,x$ и проинтегрируем полученное выражение

$$y'''\,d\,x = \cos x\,d\,x\,,$$

$$\int y'''(x)dx = \int \cos x\,dx\,,$$

$$y''(x) = \sin x + c_1\,,\ c_1 = const\,. \tag{6}$$

Умножим обе части уравнения (6) на $d\,x$ и проинтегрируем полученное выражение

$$y''(x)\,d\,x = (\sin x + c_1)\,d\,x\,,$$

$$\int y''(x)dx = \int (\sin x + c_1)dx,$$

$$y'(x) = -\cos x + c_1 \cdot x + c_2\,,\ c_2 = const\,. \tag{7}$$

Умножим обе части уравнения (7) на $d\,x$ и проинтегрируем полученное выражение

$$y'(x)\,d\,x = (-\cos x + c_1 \cdot x + c_2)\,d\,x\,,$$

$$\int y'(x)dx = \int (-\cos x + c_1 \cdot x + c_2)dx,$$

$$y(x) = -\sin x + c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \cdot x + c_3\,,\ c_3 = const\,. \tag{8}$$

Функция (8) является общим решением дифференциального уравнения (5).

II. Дифференциальное уравнение вида

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

не содержащее явно функцию y.

Для решения этого дифференциального уравнения полагаем $y' = p$, $p = p(x)$.

В результате получаем дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка

$$F(x, p, p', p'', \dots, p^{(n-1)}) = 0,$$

относительно новой неизвестной функции $p = p(x)$. Решив его (если это возможно), найдем функцию $p = p(x)$, а затем и функцию $y = y(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$F(x, y', y'') = 0,$$

не содержащее явно функцию y.

Для решения этого дифференциального уравнения полагаем $y' = p$, $p = p(x)$, $y'' = p'$.

Тогда получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$F(x, p, p') = 0.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2 y'' = (y')^2. \tag{9}$$

Решение.

Дифференциальное уравнение (9) не содержит явно функцию y, поэтому полагаем $y' = p$, $p = p(x)$, $y'' = p'$.

Получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$x^2 p' = p^2 \text{ или } x^2 \frac{dp}{dx} = p^2 \text{ или } x^2 dp = p^2 dx.$$

Разделим обе части уравнения на $x^2 \cdot p^2 \neq 0$ и проинтегрируем полученное уравнение

$$\frac{1}{p^2} dp = \frac{1}{x^2} dx,$$

$$\int \frac{1}{p^2} dp = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} - c_1 , c_1 = const.$$

Откуда $p = \dfrac{x}{c_1 x + 1}$.

Поскольку $p = y'$, то получаем дифференциальное уравнение

$y' = \dfrac{x}{c_1 x + 1}$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{c_1 x + 1}$ или $dy = \dfrac{x}{c_1 x + 1}\, dx$.

Проинтегрировав обе части полученного уравнения

$$\int dy = \int \frac{x}{c_1 x + 1}\, dx ,$$

получаем общее решение дифференциального уравнения (9)

$$y = \frac{1}{c_1} \cdot x - \frac{1}{c_1^2} \cdot \ln | c_1 \cdot x + 1 | + c_2 , c_2 = const.$$

«Потерянные» решения дифференциального уравнения (9) находим и из условий:

1) $p = 0$ или $y' = 0$, откуда $y = c,\ c = const$;

2) $p = x$ или $y' = x$, откуда $y = \dfrac{x^2}{2} + c_3 , c_3 = const.$

III. Дифференциальное уравнение вида

$$F(y , y', y'', \ldots , y^{(n)}) = 0 ,$$

не содержащее явно аргумент x.

Для решения этого дифференциального уравнения полагаем $y' = p$, $p = p(y)$.

Тогда

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dp(y)}{dx} =$$

$= \backslash$ дифференцируем сложную функцию $p (y) \backslash = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} =$

$$= \backslash \frac{dy}{dx} = p,\ p = p (y) \backslash = p \cdot \frac{dp}{dy} .$$

$$y''' = p\cdot\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\cdot\frac{d^2p}{dy^2}$$

и т.д.

В результате получаем дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка относительно новой неизвестной функции $p = p(y)$. Решив его, найдем функцию $p = p(y)$, а затем и функцию $y = y(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$F(y, y', y'') = 0,$$

не содержащее явно аргумент x.

Для решения этого дифференциального уравнения полагаем $y' = p$, $p = p(y)$, $y'' = p\cdot\dfrac{dp}{dy}$.

Тогда получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$F(x, p, p\cdot\frac{dp}{dy}.) = 0.$$

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y y'' = (y')^2, \tag{10}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1, y'(0) = 2.$

Решение.

Дифференциальное уравнение (10) не содержит явно аргумент x, поэтому полагаем $y' = p$, $p = p(y)$, $y'' = p\cdot\dfrac{dp}{dy}$.

Получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$y\ p\cdot\frac{dp}{dy} = p^2 \text{ или } y\frac{dp}{dy} = p \text{ или } \frac{1}{p}\,dp = \frac{1}{y}\,dy.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения

$$\int\frac{1}{p}\,dp = \int\frac{1}{y}\,dy$$

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln c,\ c = const, \text{ откуда } p = c\cdot y.$$

Поскольку $p = y'$, то получаем дифференциальное уравнение

$$y' = c \cdot y \text{ или } \frac{dy}{dx} = c \cdot y. \qquad (11)$$

Откуда $\frac{1}{y}\, dy = c\, dx$.

Проинтегрировав обе части полученного уравнения, получаем общее решение дифференциального уравнения (10)

$$\ln|y| = c \cdot x + \ln c_1,\ c_1 = const,$$

$$y = c_1 \cdot e^{cx}. \qquad (12)$$

Чтобы найти частное решение, найдем константы c и c_1, подставив начальное условие $y(0) = 1, y'(0) = 2$ в (11) и (12)

$$2 = c \cdot 1,$$

$$1 = c_1 \cdot e^{c0},$$

откуда $c = 2,\ c_1 = 1$.

Тогда частное решение дифференциального уравнения (10), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1, y'(0) = 2$, имеет вид

$$y = e^{2x}.$$