Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекция 13

Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = f(x), \tag{1}$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ определены и непрерывны на некотором промежутке I числовой прямой.

Если функция $f(x) \equiv 0$, то дифференциальное уравнение (1) называется однородным, а если функция $f(x) \not\equiv 0$, то неоднородным.

Теорема (о существовании и единственности решения линейного уравнения n-го порядка).

Для любой точки $x_0 \in I$ и для любых чисел $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ существует решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1), определенное на всем промежутке I и удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Любые два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают всюду, где они оба определены.

Эту теорему принимаем без доказательства.

Пусть X – множество всех n раз непрерывно дифференцируемых функций на интервале I; Y – множество всех непрерывных функций на этом интервале.

Пространства X и Y являются линейными пространствами относительно операций сложения функций и умножения их на числа.

Нулем этих пространств служит функция, тождественно равная нулю на промежутке I.

Отображение $L : X \to Y$, определяемое равенством

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y,$$

является линейным оператором, т. к.

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2],\ L[\alpha y] = \alpha L[y]$$

для любых элементов y, y_1, y_2 пространства X и для любого числа $\alpha \in R$.

Определение 2. Линейный оператор

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\cdot y,$$

называется линейным дифференциальным оператором n-го порядка.

Теорема (о пространстве решений линейного однородного уравнения n-го порядка).

Совокупность всех решений линейного однородного уравнения n-го порядка образует линейное пространство.

Доказательство. Дифференциальное уравнение (1) при $f(x) \equiv 0$ можно записать в виде

$$L[y] = 0 \qquad (2)$$

Если y, y_1, y_2 – произвольные решения этого уравнения и α – действительное число, то в силу линейности оператора L имеем

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = \overline{0},\ L[\alpha y] = \alpha L[y] = \overline{0},$$

где $\overline{0}$ означает функцию, тождественно равную нулю на промежутке I.

Отсюда видно, что $y_1 + y_2$ и αy также являются решениями дифференциального уравнения (2).

Можно также проверить и другие условия из определения линейного пространства.

Таким образом, совокупность решений дифференциального уравнения (2) образует линейное пространство.

Теорема доказана.

Определение 3. Система функций

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x),$$

определенных на промежутке I, называется линейно зависимой, если существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация этих функций

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0,\ \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0.$$

Определение 4. Система функций

$$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x),$$

определенных на промежутке I, называется линейно независимой, если существует тривиальная равная нулю линейная комбинация этих функций

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0, \ \ \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Определение 5. Пусть система функций $y_1, \dots, y_n$, заданных на промежутке I, состоит из $n-1$ раз дифференцируемых функций. Определителем Вронского (вронскианом) этой системы функций называют определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема (об определителе Вронского линейно зависимой системы функций).

Если система $n-1$ раз дифференцируемых на промежутке I функций $y_1, \dots, y_n$ линейно зависима, то определитель Вронского этой системы функций тождественно равен нулю.

Доказательство. Поскольку функции $y_1, \dots, y_n$ линейно зависимы, то, согласно определению, существует нетривиальная линейная комбинация этих функций, тождественно равная нулю

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0, \ \ \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0.$$

Продифференцируем это равенство $n-1$ раз

$$\alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_n' \equiv 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0.$$

Отсюда получаем, что столбцы определителя Вронского рассматриваемой системы функций линейно зависимы, и, следовательно, этот определитель равен нулю.

Теорема доказана.

Замечание. Равенство нулю определителя Вронского является лишь необходимым, но не достаточным условием линейной зависимости функций.

Теорема (об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка).

Пусть система функций $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ является линейно независимой системой решений дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = 0, \qquad (3)$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ определены и непрерывны на промежутке I.

Тогда определитель Вронского этой системы решений не равен нулю ни в одной точке промежутка I.

Доказательство. Докажем теорему от противного.

Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in I$ определитель Вронского равен 0, т. е.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого равенства следует, что столбцы определителя $W(x_0)$ линейно зависимы, т. е. существует нетривиальный набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (т. е. хотя бы одно из чисел $\alpha_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq n$) такой, что

$$\alpha_1 y_1{}^{(j)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n{}^{(j)}(x_0) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (4)$$

(j – порядок производной)

Рассмотрим функцию $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$.

Согласно теореме о пространстве решений линейного однородного уравнения, эта функция является решением дифференциального уравнения (3) (т.к. она является линейной комбинацией решений $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ этого дифференциального уравнения).

Функция, тождественно равная нулю на промежутке I, также удовлетворяет этому дифференциальному уравнению и начальным условиям (4).

Отсюда по теореме существования и единственности получаем, что $y(x) \equiv 0$, т. е. существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация функций $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, что противоречит линейной независимости этих функций.

Следовательно, определитель Вронского этой системы решений не равен нулю ни в одной точке промежутка I

Теорема доказана.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения).

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = 0, \tag{3}$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ определены и непрерывны на промежутке I.

Тогда совокупность всех решений этого уравнения есть линейное пространство размерности n.

Доказательство.

Согласно теореме о линейном пространстве решений линейного однородного уравнения совокупность X всех решений данного дифференциального уравнения образует линейное пространство.

Чтобы доказать, что размерность линейного пространства X равна n, достаточно указать в пространстве X базис из n векторов.

Для этого рассмотрим решения $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющие начальным условиям

$$y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = \ldots = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, y_2''(x_0) = \ldots = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n(x_0) = \ldots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1,$$

где x_0 – произвольная точка промежутка I.

Существование таких решений следует из теоремы *существования* и единственности. Эти решения линейно независимы, т. к. определитель Вронского в точке x_0 не равен нулю:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Если $y = y(x)$ – произвольное решение рассматриваемого дифференциального уравнения, и если

$$y(x_0) = C_1\,, y'(x_0) = C_2\,,\ \dots\,, y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,,$$

то в точке x_0 выполняются равенства

$$y^{(j)}(x_0) = C_1 y_1{}^{(j)}(x_0) + \dots + C_n y_n{}^{(j)}(x_0),\ j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Поэтому по теореме существования и *единственности*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

при любом $x \in I$.

Таким образом, функции $y_1 = y_1(x)\,, \dots\,, y_n = y_n(x)$ образуют базис в линейном пространстве X и, следовательно, размерность этого пространства равна n.

Теорема доказана.

Определение 6. Базис пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Если $y_1 = y_1(x)\,, \dots\,, y_n = y_n(x)$ – фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения, то общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где $C_1\,, \dots\,, C_n$ – произвольные постоянные.

Формула Остроградского-Лиувилля

Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0, \qquad (4)$$

где функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ определены и непрерывны на промежутке I.

Определитель Вронского решений $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1\cdot y_2' - y_1'\cdot y_2 .$$

Продифференцируем функцию $W(x)$

$$W'(x) = y_1'\cdot y_2' + y_1\cdot y_2'' - (y_1''\cdot y_2 + y_1'\cdot y_2') = y_1\cdot y_2'' - y_1''\cdot y_2 . \qquad (5)$$

Поскольку $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения дифференциального уравнения (4), то они удовлетворяют этому уравнению, т. е.

$$y_1'' + a_1(x)\cdot y_1' + a_2(x)\cdot y_1 = 0,$$

$$y_2'' + a_1(x)\cdot y_2' + a_2(x)\cdot y_2 = 0,$$

откуда

$$y_1'' = -a_1(x)\cdot y_1' - a_2(x)\cdot y_1 ,$$

$$y_2'' = -a_1(x)\cdot y_2' - a_2(x)\cdot y_2 .$$

Подставим y_1'' и y_2'' в выражение (5)

$$W'(x) = y_1\cdot(-a_1(x)\cdot y_2' - a_2(x)\cdot y_2) - y_2\cdot(-a_1(x)\cdot y_1' - a_2(x)\cdot y_1) =$$

$$= -a_1(x)\cdot y_1\cdot y_2' - a_2(x)\cdot y_1\cdot y_2 + a_1(x)\cdot y_2\cdot y_1' + a_2(x)\cdot y_2\cdot y_1 =$$

$$= -a_1(x)\cdot y_1\cdot y_2' + a_1(x)\cdot y_2\cdot y_1' = -a_1(x)\cdot(y_1\cdot y_2' - y_2\cdot y_1') =$$

$$= -a_1(x)\cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -a_1(x)\cdot W(x).$$

Таким образом,

$$W'(x) = -a_1(x)\cdot W(x)$$

$$\text{или } W'(x) + a_1(x)\cdot W(x) = 0.$$

Следовательно, определитель Вронского $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' + a_1(x)\cdot y = 0. \qquad (5)$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его решение.

$$y' = -a_1(x)\cdot y,$$

$$\frac{dy}{dx} = -a_1(x)\cdot y,$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -a_1(x)\,dy,$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int a_1(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int a_1(x)dx + \ln C,\ C = const,$$

$$y(x) = C\,e^{-\int a_1(x)dx}.$$

При условии, что $y(x_0) = W(x_0)$, где $x_0 \in I$, имеем

$$y(x) = W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}.$$

Из теоремы существования и *единственности* для дифференциального уравнения (5) получаем, что для всех $x \in I$ выполняется равенство

$$W(x) = W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}. \qquad (6)$$

Равенство (6) называется формулой Остроградского-Лиувилля.

Формула Остроградского-Лиувилля справедлива и для линейного однородного уравнения *n*-го порядка.

Если функции $y_1 = y_1(x)$, ... ,$y_n = y_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\cdot y = 0,$$

то

$$W(x) = W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt},$$

где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

а x_0 – произвольная точка промежутка I, на котором заданы коэффициенты $a_1(x), \dots, a_n(x)$ дифференциального уравнения.

Понижение порядка однородного линейного дифференциального уравнения при известном частном решении

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = 0, \tag{7}$$

где функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ определены и непрерывны на промежутке I.

Общее решение дифференциального уравнения (7) будет иметь вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ – фундаментальная система решений этого уравнения,

$C_1, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пусть известно частное решение $y_2 = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (7).

Необходимо найти частное решение $y_1 = y_1(x)$ этого уравнения, а затем общее решение дифференциального уравнения (7).

Способ 1.

Будем искать частное решение $y_1 = y_1(x)$ этого уравнения в виде $y_1 = z \cdot \varphi(x)$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Найдем производные первого и второго порядков функции $y_1 = z \cdot \varphi(x)$

$$y_1' = z' \cdot \varphi(x) + z \cdot \varphi'(x),$$

$$y_1'' = z'' \cdot \varphi(x) + z' \cdot \varphi'(x) + z' \cdot \varphi'(x) + z \cdot \varphi''(x) =$$

$$= z'' \cdot \varphi(x) + 2z' \cdot \varphi'(x) + z \cdot \varphi''(x).$$

Функция $y_1 = z \cdot \varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения (7), поэтому она удовлетворяет этому уравнению.

Подставим $y_1 = z \cdot \varphi(x)$ и ее производные y_1' и y_1'' в дифференциальное уравнение (7)

$$z'' \cdot \varphi(x) + 2z' \cdot \varphi'(x) + z \cdot \varphi''(x) + a_1(x) \cdot (z' \cdot \varphi(x) + z \cdot \varphi'(x)) +$$
$$+ a_2(x) \cdot z \cdot \varphi(x) = 0,$$
$$z \cdot (\varphi''(x) + a_1(x) \cdot \varphi'(x) + a_2(x) \cdot \varphi(x)) + z'' \cdot \varphi(x) + 2z' \cdot \varphi'(x) +$$
$$+ a_1(x) \cdot z' \cdot \varphi(x) = 0.$$

Коэффициент при z здесь равен нулю

$$\varphi''(x) + a_1(x) \cdot \varphi'(x) + a_2(x) \cdot \varphi(x) = 0,$$

т. к. функция $\varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения (7), и следовательно, удовлетворяет этому уравнению.

Тогда функцию $z = z(x)$ находим из дифференциального уравнения второго порядка

$$z'' \cdot \varphi(x) + 2z' \cdot \varphi'(x) + a_1(x) \cdot z' \cdot \varphi(x) = 0$$

или

$$z'' \cdot \varphi(x) + z' \cdot (2\varphi'(x) + a_1(x) \cdot \varphi(x)) = 0,$$

которое не содержит явно функцию $z = z(x)$ и может быть сведено линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка.

Используя найденную функцию $z = z(x)$, получаем частное решение $y_1 = z \cdot \varphi(x)$.

Способ 2.

Способ 2 понижения порядка линейного однородного дифференциального уравнения при известном частном решении основан на применении формулы Остроградского-Лиувилля.

Поскольку $y_2 = \varphi(x)$ – известное частное решение дифференциального уравнения (7), то используя формулу Остроградского-Лиувилля

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt},$$

получаем

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \varphi(x) \\ y_1' & \varphi'(x) \end{vmatrix} = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} . \tag{8}$$

Тогда для определения частного решения $y_1 = y_1(x)$ получаем линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Если при этом не важны начальные условия для функции $y_1 = y_1(x)$, то x_0 и $W(x_0)$ в правой части уравнения (8) можно задать произвольно. Например, можно находить функцию $y_1 = y_1(x)$ из уравнения

$$\begin{vmatrix} y_1 & \varphi(x) \\ y_1' & \varphi'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int a_1(x)dx}, \tag{9}$$

где $\int a_1(x)dx$ означает произвольную фиксированную первообразную функции $a_1(x)$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{2}{x} \cdot y' + y = 0, \tag{10}$$

зная его частное решение $y_2 = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решение.

Будем искать частное решение $y_1 = y_1(x)$ этого уравнения в виде $y_1 = z \cdot \dfrac{\sin x}{x}$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Найдем производные первого и второго порядков этой функции

$$y_1' = z' \cdot \frac{\sin x}{x} + z \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} ,$$

$$y_1'' = z'' \cdot \frac{\sin x}{x} + z' \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + z' \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} +$$

$$+ z \cdot \frac{-x^2 \sin x - 2x \cdot \cos x + 2\sin x}{x^3} =$$

$$= z'' \cdot \frac{\sin x}{x} + 2z' \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + z \cdot \frac{-x^2 \sin x - 2x \cdot \cos x + 2\sin x}{x^3} .$$

Подставим $y_1 = z \cdot \dfrac{\sin x}{x}$ и ее производные $y_1{}'$ и $y_1{}''$ в дифференциальное уравнение (10)

$$z'' \cdot \frac{\sin x}{x} + 2z' \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + z \cdot \frac{-x^2 \sin x - 2x \cdot \cos x + 2\sin x}{x^3} +$$

$$+ \frac{2}{x} \cdot \left(z' \cdot \frac{\sin x}{x} + z \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} \right) + z \cdot \frac{\sin x}{x} = 0,$$

$$z \cdot \left(\frac{-x^2 \sin x - 2x \cdot \cos x + 2\sin x}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} \right) +$$

$$+ z'' \cdot \frac{\sin x}{x} + 2z' \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + z' \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Коэффициент при z равен нулю, тогда функцию $z = z(x)$ находим из дифференциального уравнения

$$z'' \cdot \frac{\sin x}{x} + 2z' \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + z' \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 0,$$

$$z'' \cdot \frac{\sin x}{x} + 2z' \cdot \frac{x \cdot \cos x}{x^2} = 0,$$

$$z'' \cdot \frac{\sin x}{x} + 2z' \cdot \frac{\cos x}{x} = 0.$$

Сделаем замену $z' = p,\ p = p(x),\ z'' = p'$.

$$p' \cdot \frac{\sin x}{x} + 2p \cdot \frac{\cos x}{x} = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} = -2p \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{p}\, dp = -2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\, dx,$$

$$\int \frac{1}{p}\, dp = -2 \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx,$$

$$\ln|p| = -2\ln|\sin x| + c_3,\ c_3 = const.$$

Поскольку ищем частное решение дифференциального уравнения, то можно положить $c_3 = 0$.

Тогда $p = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Так как $p = z'$, то $z' = \frac{1}{\sin^2 x}$,

$$dz = \cdot\frac{1}{\sin^2 x}\,dx\,,$$

$$\int dz = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx\,,$$

$$z = -\,ctg\,x + c_4\,,\; c_4 = const.$$

Поскольку ищем частное решение дифференциального уравнения, то можно положить $c_4 = 0$.

Тогда $z = -\,ctg\,x$.

В результате получаем $y_1 = -\,ctg\,x \cdot \frac{\sin x}{x} = -\frac{\cos x}{x}$.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (10) будет иметь вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1\left(-\frac{\cos x}{x}\right) + C_2\frac{\sin x}{x}$$

или

$$y(x) = C\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}\,,\text{ где } C = -\,C_1\,.$$