Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Дополнение к лекции 5

Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат

Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и интегрируема на отрезке $[-a, a]$.

Тогда, используя свойство аддитивности, интеграл $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ можно представить в виде

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx. \tag{1}$$

Рассмотрим $\int_{-a}^{0} f(x)dx$.

Сделаем замену переменной: $t = -x$, тогда $dt = -dx$, если $x_1 = -a$, то $t_1 = -(-a) = a$, $x_2 = 0$, то $t_2 = 0$.

Тогда

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt =$$

$= \backslash$ используем свойство определенного интеграла $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx \backslash =$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)dt. \tag{2}$$

Сделаем в интеграле (2) замену $x = t$. Тогда

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx. \tag{3}$$

С учетом (3) интеграл (1) будет иметь вид

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}(f(x)+f(-x))dx. \tag{4}$$

Если функция $f(x)$ – четная, то $f(-x) = f(x)$.

Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}(f(x)+f(-x))dx = \int_{0}^{a}(f(x)+f(x))dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \tag{5}$$

Если функция $f(x)$ – нечетная, то $f(-x) = -f(x)$.

Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}(f(x)+f(-x))dx = \int_{0}^{a}(f(x)-f(x))dx = 0. \tag{6}$$

Примеры.

1. Найти интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

Решение.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1-(-1) = 2.$$

С другой стороны, функция $f(x) = \cos x$ – четная, отрезок интегрирования симметричен относительно начала координат. Используя формулу (5), получаем

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2(1-0) = 2.$$

Полученные двумя способами значения интеграла совпали.

2. Найти интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx = \cos x \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

С другой стороны, функция $f(x) = \sin x$ – нечетная, отрезок интегрирования симметричен относительно начала координат. Используя формулу (6), получаем

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx = 0.$$

Полученные двумя способами значения интеграла совпали.