*Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения*

# Лекция 7

## Признаки сходимости несобственных интегралов

Пусть функция $f(x)$ определена и неотрицательна при $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$.

В этом случае функция

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

является неубывающей на промежутке $[a, +\infty)$.

Тогда согласно признаку существования предела монотонной функции предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

существует тогда и только тогда, когда функция $F(b)$ ограничена при всех достаточно больших значениях $b$.

Будем использовать этот признак при доказательстве следующих теорем.

*Теорема 1 (признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода).*

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и интегрируемы на отрезке $[a, b]$ при любом $b$ и пусть для любого $x \geq a$ выполняется неравенство

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Тогда, если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

*Доказательство.*

Согласно свойству определенного интеграла об интегрировании неравенства, если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и для любого $x \in [a, b]$ (при любом $b$) выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{1}$$

Если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то поскольку $g(x) \ge 0$, существует такое $c = const$, что для всех $b \ge a$ выполняется неравенство

$$\int_a^b g(x)dx \le c.$$

Тогда в силу неравенства (1) получаем

$$\int_a^b f(x)dx \le c.$$

Это неравенство выполняется при всех $b \ge a$, в том числе и при $b \to +\infty$.

Следовательно, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, а несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то получаем противоречие с доказанным выше. Следовательно, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Теорема доказана.

*Пример.* Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}dx$.

*Решение.*

При $x \geq 1$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{x^2(1+e^x)} < \dfrac{1}{x^2}$. Несобственный интеграл 1-го рода $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2} dx$ $(\alpha = 2 > 1)$ сходится (см. лекцию 6).

Следовательно, на основании *теоремы 1* несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2(1+e^x)} dx$ сходится.

*Теорема 2 (предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода).*

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и положительны при $x \geq a$ и интегрируемы на любом отрезке $[a, b]$.

Тогда, если существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \ 0 < K < \propto,$$

то несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.*

Докажем случай, при котором, если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Пусть существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \ 0 < K < \propto.$$

Тогда по определению предела функции в точке, т. к. $K$ – предел функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, то для $\varepsilon = \dfrac{K}{2}$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \geq \delta$

выполняется неравенство $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon$,

откуда получаем

$$K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon.$$

Поскольку $K - \varepsilon = K - \dfrac{K}{2} = \dfrac{K}{2}$, то для всех $x \geq \delta$ выполняется неравенство

$$\frac{K}{2} < \frac{f(x)}{g(x)},$$

откуда $\dfrac{K}{2} \cdot g(x) < f(x)$.

По условию теоремы несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (а значит, и несобственный интеграл $\int\limits_\delta^{+\infty} f(x)dx$ сходится). Тогда на основании теоремы 1 сходится и несобственный интеграл $\int\limits_\delta^{+\infty} \dfrac{K}{2} \cdot g(x)dx$, а значит, сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Аналогично доказываются и другие случаи.

Теорема доказана.

*Примечание.*

Из *теоремы 2* вытекает, что если $f(x)$ и $g(x)$ положительны (по крайней мере, при достаточно больших значениях $x$) и являются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to +\infty$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

*Пример.* Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} arctg\,\frac{1}{x}\,dx$.

*Решение.*

При $x \geq 1$ $arctg\,\frac{1}{x} > 0$ и $arctg\,\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$.

Несобственный интеграл 1-го рода $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ $(\alpha = 1)$ расходится (см. лекцию 6).

Следовательно, несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} arctg\,\frac{1}{x}\,dx$ расходится.

*Определение.* Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Тогда и функция $|f(x)|$ определена при $x \geq a$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Если несобственный интеграл 1-го рода $\int_{a}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то говорят, что несобственный интеграл 1-го рода $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно.

Если несобственный интеграл 1-го рода $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ сходится, а несобственный интеграл 1-го рода $\int_{a}^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, то говорят, что несобственный интеграл 1-го рода $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ сходится условно.

*Теорема 3 (признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода).*

Пусть функция $f(x)$ определена и положительна при $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$.

Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

*Доказательство.*

Поскольку по условию теоремы функция $f(x)$ определена и положительна при $x \geq a$, то для любого $x \geq a$ выполняется неравенство

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|,$$

откуда

$$0 \leq f(x) \leq 2|f(x)|. \qquad (2)$$

Поскольку по условию теоремы несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, то по определению сходится и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Тогда сходится и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} 2 \cdot |f(x)|dx$.

Следовательно, на основании теоремы 1 с учетом неравенства (2) сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема доказана.

*Пример.* Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx$, и если сходится, то как.

*Решение.*

При $x \geq 1$ $\frac{|\sin x|}{x^4} > 0$ и выполняется неравенство

$$\frac{|\sin x|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}. \qquad (3)$$

Несобственный интеграл 1-го рода $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ $(\alpha = 4 > 1)$ сходится (см. лекцию 6).

Тогда на основании теоремы 1 с учетом неравенства (3) сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^4} dx$.

Следовательно, на основании теоремы 3 несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx$ сходится абсолютно.

*Определение.* Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$ и не ограничена ни на каком интервале $(b - \varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b - a$.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, c]$, $c < b$.

Тогда и функция $|f(x)|$ определена на промежутке $[a, b)$, не ограничена ни на каком интервале $(b - \varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b - a$ и интегрируема на отрезке $[a, c]$, $c < b$.

Если несобственный интеграл 2-го рода $\int\limits_{a}^{b} |f(x)| dx$ (где $\int\limits_{a}^{b} |f(x)| dx = \lim\limits_{c \to b^-} \int\limits_{a}^{c} |f(x)| dx$) сходится, то говорят, что несобственный интеграл 2-го рода $\int\limits_{a}^{b} f(x) dx$ (где $\int\limits_{a}^{b} f(x) dx = \lim\limits_{c \to b^-} \int\limits_{a}^{c} f(x) dx$) сходится абсолютно.

Если несобственный интеграл 2-го рода $\int\limits_{a}^{b} f(x) dx$ сходится, а несобственный интеграл 2-го рода $\int\limits_{a}^{b} |f(x)| dx$ расходится, то говорят, что несобственный интеграл 2-го рода $\int\limits_{a}^{b} f(x) dx$ сходится условно.