

Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекция 8

Вычисление площадей плоских фигур

*Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми,
заданными в декартовых координатах*

1. Пусть криволинейная трапеция ограничена графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рисунок 1).

Функция $f(x)$ определена, интегрируема на отрезке $[a, b]$ и неотрицательна на нем, т. е. $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a, b]$.

Тогда согласно геометрическому смыслу определенного интеграла площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0, x \in [a, b]$), осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна определенному интегралу от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, т. е.

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

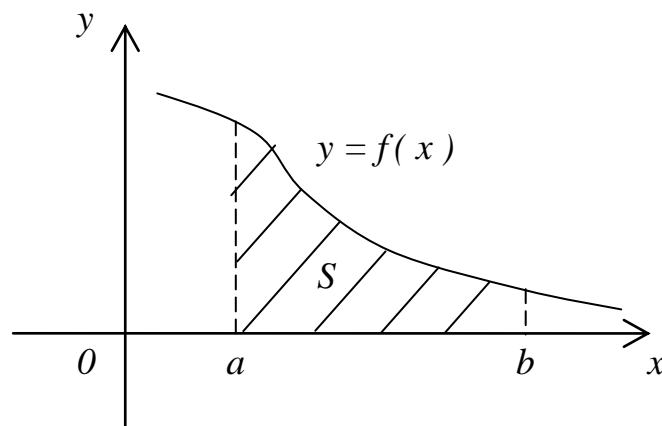


Рисунок 1

Примечание.

Пусть криволинейная трапеция ограничена графиком функции $x = \varphi(y)$, осью Oy и прямыми $y = c$ и $y = d$.

Функция $\varphi(y)$ определена, интегрируема на отрезке $[c, d]$ и неотрицательна на нем, т. е. $\varphi(y) \geq 0$ для любого $y \in [c, d]$.

Тогда площадь этой криволинейной трапеции равна определенному интегралу от функции $\varphi(y)$ по отрезку $[c, d]$, т. е.

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy.$$

2. Пусть криволинейная трапеция ограничена графиком функции $y = g(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Функция $g(x)$ определена, интегрируема на отрезке $[a, b]$ и неположительна на нем, т. е. $g(x) \leq 0$ для любого $x \in [a, b]$.

Рассмотрим функцию $f(x) = -g(x)$ для любого $x \in [a, b]$, график которой симметричен графику функции $y = g(x)$ относительно оси Ox (рисунок 2).

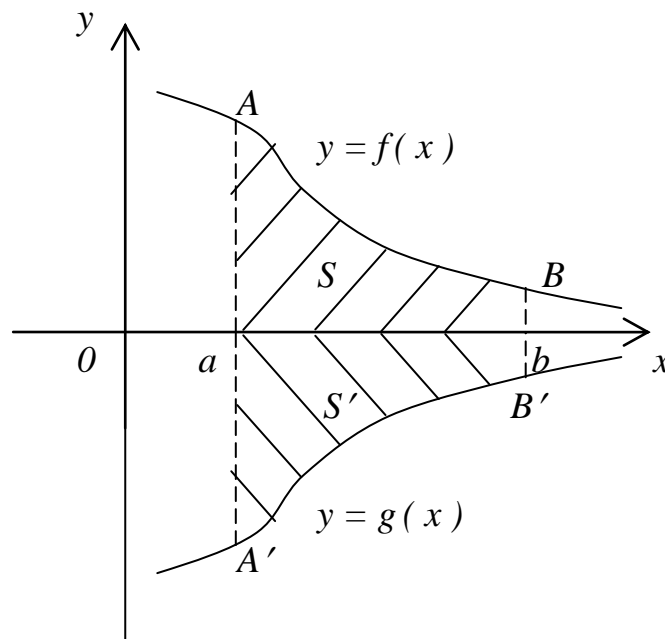


Рисунок 2

Площадь S' криволинейной трапеции $aA'B'b$ и площадь S криволинейной трапеции $aABb$ равны между собой, т. е.

$$S = \int_a^b f(x) dx = S' = \int_a^b (-g(x)) dx.$$

В силу линейности определенного интеграла получаем

$$S' = - \int_a^b g(x) dx.$$

3. Пусть криволинейная трапеция ограничена графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рисунок 3).

Пусть функция $f(x)$ определена, интегрируема на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке n раз меняет знак (в точках $x_1 < x_2 < \dots < x_n$).

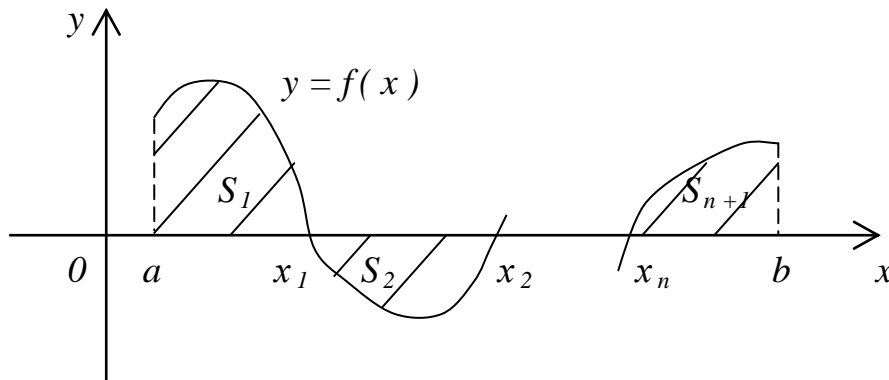


Рисунок 3

Тогда для вычисления площади S этой криволинейной трапеции определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ следует разбить, используя свойство аддитивности определенного интеграла, на сумму $n + 1$ интегралов по таким отрезкам, на которых данная функция знакопостоянна

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_n}^b f(x) dx.$$

При нахождении полученных интегралов необходимо учитывать знак функции $f(x)$ на соответствующем отрезке интегрирования. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке интегрирования, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на этом отрезке интегрирования будет положительным (т. е. его берут со знаком «+»),

а если $f(x) \leq 0$ на отрезке интегрирования, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на этом отрезке интегрирования будет отрицательным (т. е. его берут со знаком «-»).

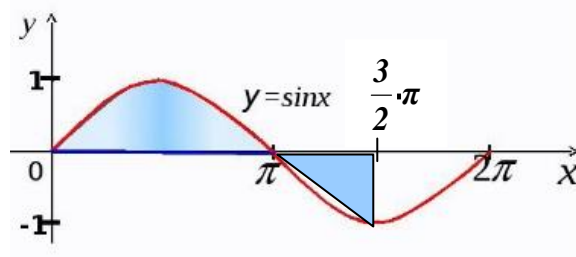
Таким образом, интеграл $\int_a^b f(x) dx$ будет равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, имеющих основаниями отрезки знакопостоянства рассматриваемой функции

$$S = \int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2 + \dots + S_{n+1}.$$

Пример.

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = \sin x$, осью Ox и прямыми $x = 0$ и $x = \frac{3}{2}\pi$.

Решение.



Поскольку $\sin x \geq 0$ для любого $x \in [0, \pi]$ и $\sin x \leq 0$ для любого $x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = \sin x$, осью Ox и прямыми $x = 0$ и $x = \frac{3}{2}\pi$, равна

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi} - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \\ &= -\cos \pi - (-\cos 0) + \cos \frac{3}{2}\pi - \cos \pi = 1 + 1 + 0 + 1 = 3. \end{aligned}$$

4. Пусть криволинейная трапеция ограничена отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, которые, в частности, могут вырождаться в точки, графиками функций

$y = f(x)$ и $y = g(x)$, определенными и интегрируемыми на отрезке $[a, b]$, причем $0 \leq g(x) \leq f(x)$ при $x \in [a, b]$ (рисунок 4).

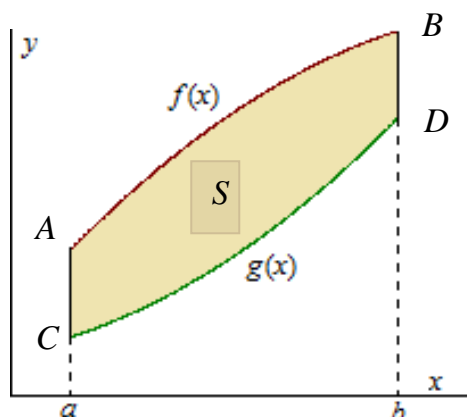


Рисунок 4

Тогда площадь S такой криволинейной трапеции $CABD$ равна разности площадей S_1 и S_2 криволинейных трапеций $aABb$ и $aCDb$ соответственно

$$S = S_1 - S_2.$$

Площадь S_1 криволинейной трапеции $aABb$ равна $S_1 = \int_a^b f(x) dx$, а пло-

щадь S_2 криволинейной трапеции $aCDb$ равна $S_2 = \int_a^b g(x) dx$.

Тогда площадь S криволинейной трапеции $CABD$ может быть найдена по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (2)$$

Пример.

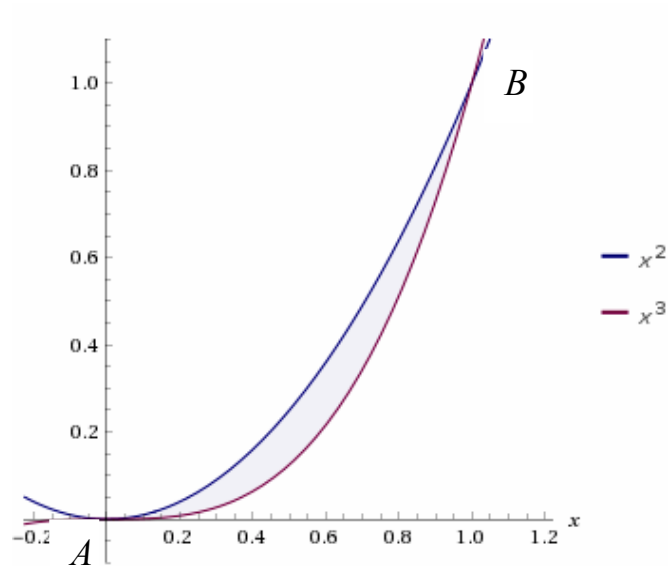
Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y = x^3$ и $y = x^2$.

Решение.

Найдем точки пересечения графиков функций $y = x^3$ и $y = x^2$.

$$x^3 = x^2, \quad x^3 - x^2 = 0, \quad x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Таким образом, точками пересечения графиков функций $y = x^3$ и $y = x^2$ являются точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$.



Поскольку $0 \leq x^3 \leq x^2$ на отрезке $[0, 1]$, то согласно формуле (2) площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y = x^3$ и $y = x^2$, равна

$$S = \int_a^b (x^2 - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

*Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми,
заданными параметрически*

Пусть кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрически

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

причем

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad a < b,$$

$$\varphi'(t) > 0 \text{ для любого } t \in [\alpha, \beta],$$

то эту же кривую можно задать и явным уравнением

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

где $y(x) = y(x(t)) = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$,

$t = \varphi^{-1}(x)$ – функция, обратная по отношению к функции $x = \varphi(t)$.

Если $y(x) \geq 0$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно вычислить следующим образом

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \psi(\varphi^{-1}(x)) dx = \\
 &= \text{\textbackslash сделаем замену переменной:} \\
 &\quad x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt, \\
 &\quad x_1 = a \rightarrow t_1 = \varphi^{-1}(a) = \alpha, \\
 &\quad x_2 = b \rightarrow t_2 = \varphi^{-1}(b) = \beta \text{\textbackslash} = \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \psi(\varphi^{-1}(\varphi(t))) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.
 \end{aligned}$$

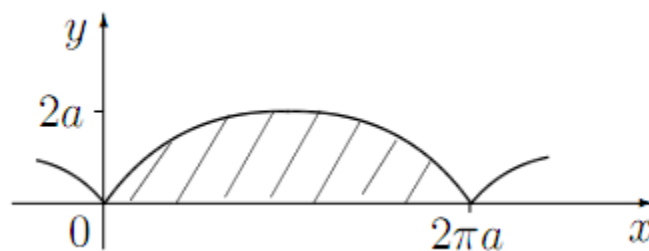
Таким образом, формула для вычисления площади криволинейной трапеции в случае, если кривая задана параметрически, имеет вид

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (3)$$

Пример.

Вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение.



По условию задачи $y = \psi(t) = a(1 - \cos t)$, $x = \varphi(t) = a(t - \sin t)$. Тогда $dx = a(1 - \cos t) dt$. Параметр t меняется от $\alpha = 0$ до $\beta = 2\pi$.

Используя формулу (3), получаем площадь криволинейной фигуры, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \left(\int_0^{2\pi} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \right) = \\
&= a^2 \left(t \Big|_0^{2\pi} - 2 \sin t \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt \right) = \\
&= a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} \right) = a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} 2\pi \right) = 3 a^2 \pi.
\end{aligned}$$

Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах

Определение. Криволинейным сектором называется геометрическая фигура, ограниченная отрезками лучей $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (рисунок 5).

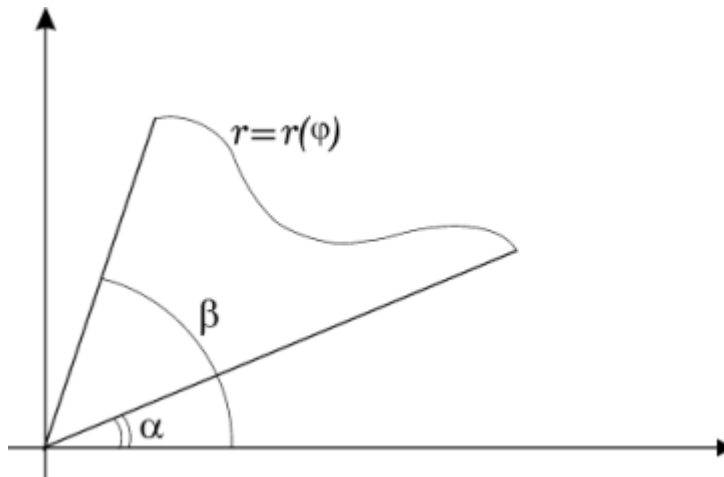


Рисунок 5

Для вычисления площади криволинейного сектора рассмотрим разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ (рисунок 6)

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta.$$

Предположим, что функция $r = r(\varphi)$, непрерывна на рассматриваемом отрезке $[\alpha, \beta]$.

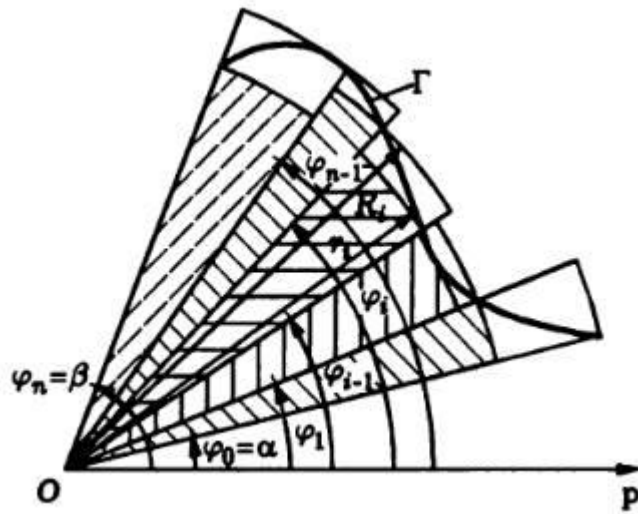


Рисунок 6

Найдем площадь S_i криволинейного сектора, соответствующего изменению полярного угла φ на отрезке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ (рисунок 7).

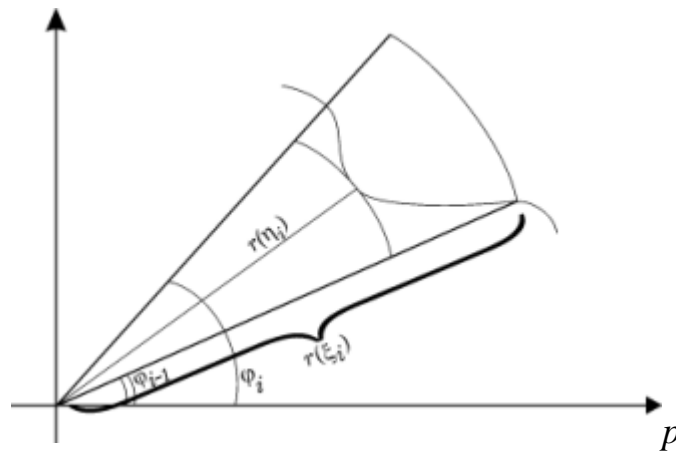


Рисунок 7

Построим круговые секторы, радиусы которых равны наименьшему $r(\eta_i)$ и наибольшему $r(\xi_i)$ значениям непрерывной функции $r(\varphi)$ на рассматриваемом частичном отрезке разбиения $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$.

Площади каждого из этих секторов равны соответственно $\frac{1}{2} r^2(\eta_i) \Delta\varphi_i$ и

$\frac{1}{2} r^2(\xi_i) \Delta\varphi_i$, где $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$.

Тогда площадь S_i криволинейного сектора будет удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{2} r^2(\eta_i) \Delta \varphi_i \leq S_i \leq \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \Delta \varphi_i. \quad (4)$$

Просуммировав площади круговых и криволинейных секторов по $i = 1, 2, \dots, n$ (в неравенстве (4)), получим, что для площади S рассматриваемого криволинейного сектора справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\eta_i) \Delta \varphi_i \leq S \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\xi_i) \Delta \varphi_i. \quad (5)$$

Величина $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\eta_i) \Delta \varphi_i$ представляет собой площадь фигуры, которая включена в рассматриваемый криволинейный сектор (на рисунке 6 эта фигура заштрихована), а величина $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r^2(\xi_i) \Delta \varphi_i$ – площадь фигуры, которая покрывает его.

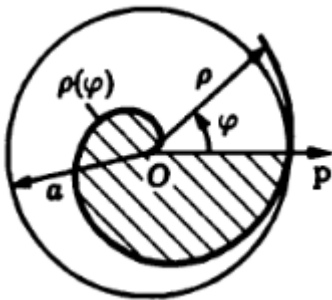
Переходя здесь к пределу в неравенстве (5) при $\max_i \Delta \varphi_i \rightarrow 0$, получаем формулу для вычисления площади криволинейного сектора в случае, если кривая задана в полярных координатах

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (6)$$

Пример.

Найти площадь витка архимедовой спирали, заданного уравнением $r = a\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Решение. На рисунке заштрихован виток архимедовой спирали, площадь которого необходимо найти по условию задачи (на рисунке $r = \rho = \rho(\varphi)$).



Используя формулу (5), получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (a\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{4}{3} a^2 \pi^3. \end{aligned}$$