

Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Лекция 9

Вычисление объемов тел

Вычисление объема тела по площади поперечного сечения

Под телом будем понимать замкнутое ограниченное множество точек трехмерного пространства.

Пусть тело M (рисунок 1) заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, и пусть для каждой точки $x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ фигуры, получающейся в сечении тела M плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через указанную точку.

Пусть зависимость площади сечения $S(x)$ от абсциссы $x \in [a, b]$ является функцией, непрерывной на отрезке $[a, b]$.

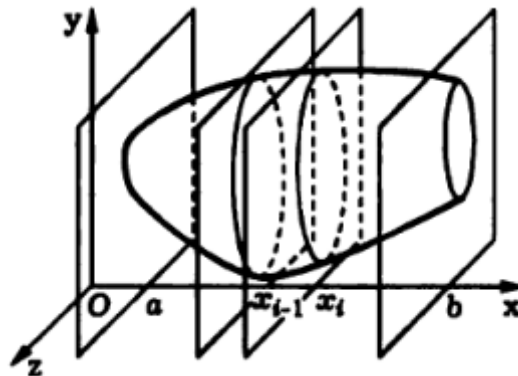


Рисунок 1

Предположим, что для любого из возможных разбиений τ

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

отрезка $[a, b]$ в любом i -м слое тела M между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ сечение, имеющее наибольшую площадь $S(\xi_i)$, целиком включает в себя любое сечение в указанном слое, а сечение, имеющее наименьшую площадь $S(\eta_i)$, содержится в любом другом сечении этого слоя. На этих сечениях построим прямые цилиндры высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

При этом цилиндр объемом $S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ будет целиком включать в себя i -й слой тела, а цилиндр объемом $S(\eta_i) \cdot \Delta x_i$ будет целиком включен в этот слой.

Тогда объем V_i i -го слоя тела M между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ при достаточно малом разбиении τ удовлетворяет неравенству

$$S(\eta_i) \cdot \Delta x_i \leq V_i \leq S(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \quad (1)$$

Просуммировав объемы цилиндров и слоев тела M по $i = 1, 2, \dots, n$ (в неравенстве (1)), получим, что для объема V рассматриваемого тела M справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n S(\eta_i) \cdot \Delta x_i \leq V \leq \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \quad (2)$$

Величина $\sum_{i=1}^n S(\eta_i) \cdot \Delta x_i$ представляет собой объем ступенчатого тела,

составленного из всех цилиндров, содержащихся во слоях тела M , а величина

$\sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ – объем ступенчатого тела, составленного из всех цилиндров,

включающих слои тела M .

Переходя к пределу в неравенстве (2) при $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, получаем формулу для вычисления объема тела M по площади поперечного сечения

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (3)$$

Вычисление объема тела вращения

в декартовой прямоугольной системе координат

Пусть тело M образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, имеющей основанием отрезок $[a, b]$ и ограниченной графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ (рисунок 2).

В этом случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, есть круг, площадь которого $S(x) = \pi y^2 = \pi (f(x))^2$.

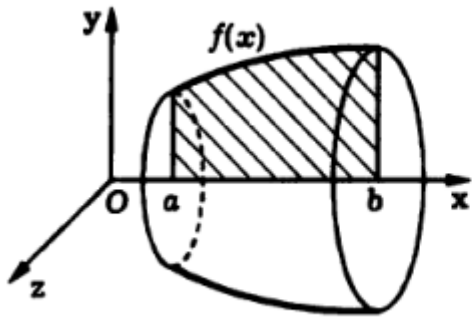


Рисунок 2

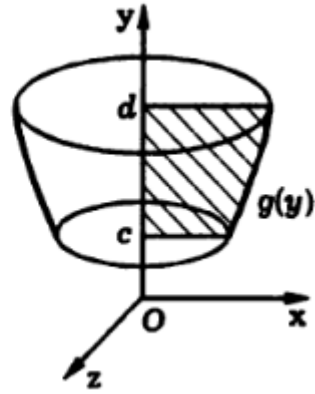


Рисунок 3

Применяя формулу для вычисления объема тела (3), получаем формулу для вычисления объема тела вращения вокруг оси Ox

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (4)$$

Аналогично, объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, имеющей основанием отрезок $[c, d]$ и ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[c, d]$ функции $x = g(y)$ (рисунок 3), равен

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy. \quad (5)$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением цепной линии

$$y = \frac{a}{2} \cdot (e^{x/a} - e^{-x/a})$$

вокруг оси Ox на отрезке от $a = 0$ до $x = b$ (рисунок 4).

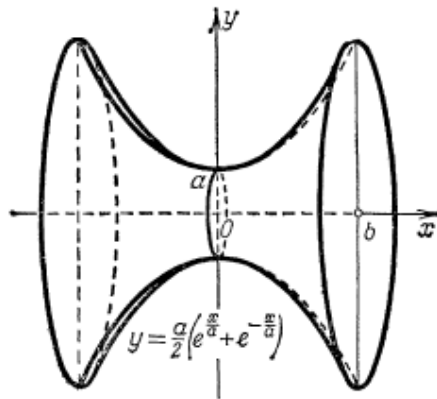


Рисунок 4

Решение.

Используя формулу (4), получаем объем тела, образованного вращением цепной линии

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^b y^2 dx = \pi \frac{a^2}{4} \cdot \int_0^b (e^{x/a} - e^{-x/a})^2 dx = \\ &= \pi \frac{a^2}{4} \cdot \int_0^b (e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}) dx = \pi \frac{a^2}{4} \left(\frac{a}{2} \cdot e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2} e^{-2x/a} \right) \Big|_0^b = \\ &= \pi \frac{a^3}{8} (e^{2b/a} - e^{-2b/a}) + \pi \frac{a^2 b}{2}. \end{aligned}$$

Пусть тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, имеющей основанием отрезок $[a, b]$ ($a \geq 0$) оси Ox и ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ (рисунок 5).

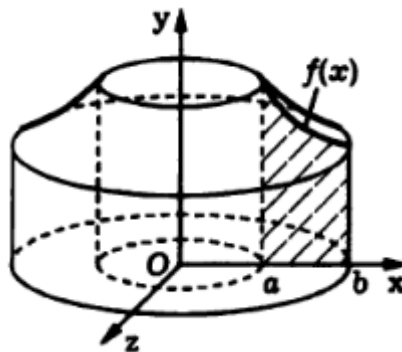


Рисунок 5

Примем за элемент объема этого тела объем его части, образованной вращением вокруг оси Oy прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, отстоящего от оси Oy на расстоянии x . Эта часть тела представляет собой цилиндрическую оболочку радиуса x , толщиной dx и высотой $f(x)$. Тогда дифференциал объема тела равен $dV = 2\pi x f(x) dx$ и объем тела вращения вокруг оси Oy можно вычислить по формуле

$$V_y = 2\pi \int_a^b x y dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (6)$$

Объемы тел, образованных вращением вокруг координатных осей Ox и Oy плоской фигуры, ограниченной графиками непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, $0 \leq g(x) \leq f(x)$ при $x \in [a, b]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, соответственно равны

$$V_x = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx. \quad (7)$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx. \quad (8)$$

*Вычисление объема тела вращения,
ограниченного кривой, заданной параметрически*

Пусть кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

причем

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad a < b.$$

$$\varphi'(t) > 0 \text{ для любого } t \in [\alpha, \beta],$$

Вычислим объем тела, образованного вращением такой криволинейной трапеции вокруг оси Ox , используя формулу (4).

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx = \text{\textbackslash сделаем замену переменной:}$$

$$y = \psi(t), \quad x = \varphi(t),$$

$$dx = \varphi'(t) dt \text{ или } dx = \varphi'(t) dt,$$

$$x_1 = a \rightarrow t_1 = \varphi^{-1}(a) = \alpha,$$

$$x_2 = b \rightarrow t_2 = \varphi^{-1}(b) = \beta \text{\textbackslash}$$

$$= \pi \int_a^b y^2(t) x'(t) dt = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \varphi'(t) dt.$$

Таким образом, объем тела вращения, ограниченного кривой, заданной параметрическими уравнениями, вокруг оси Ox можно вычислить по формуле

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt. \quad (9)$$

Пример.

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox окружности

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}.$$

Решение.

Тело получается в результате вращения фигуры, ограниченной верхней полуокружностью и осью Ox . Этим телом является шар.

Поскольку верхняя полуокружность симметрична относительно оси Oy , то вычислим объем тела V_1 вращения окружности в правой полуплоскости при изменении параметра t в пределах $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Тогда объем тела вращения (шара) равен $V_x = 2 V_1$.

Используя формулу (4), получаем

$$V_1 = \pi \int_0^1 y^2 dx \quad \text{\textbackslash} \text{ сделаем замену переменной:}$$

$$y = \sin t, \quad x = \cos t,$$

$$x' = -\sin t, \quad dx = -\sin t dt,$$

$$x_1 = 0 \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$x_2 = 1 \rightarrow t_2 = 0 \quad \text{\textbackslash} =$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2(t) x'(t) dt = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t \cdot (-\sin t) dt = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 t) \cdot (-\sin t) dt =$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = \pi \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \pi \left(1 - \frac{1}{3} - (0 - 0) \right) = \frac{2}{3} \pi.$$

Тогда объем тела вращения $V_x = 2 V_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi = \frac{4}{3} \pi$.

Вычисление объема тела вращения в полярной системе координат

Объем тела, полученного вращением криволинейного сектора, ограниченного отрезками лучей $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, вокруг полярной оси можно вычислить по формуле

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \cdot \sin \varphi d\varphi. \quad (10)$$

Формула (10) может быть получена в результате подстановки в формулу (9) выражений, связывающих декартовы прямоугольные и полярные координаты точки

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cdot \cos \varphi, \\ y = r(\varphi) \cdot \sin \varphi. \end{cases}$$

Вычисление длины дуги кривой

Вычисление длины дуги кривой

в декартовой прямоугольной системе координат

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости задана кривая Γ уравнением $y = f(x)$ (рисунок 6).

Найдем длину дуги AB этой кривой, заключенной между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$.

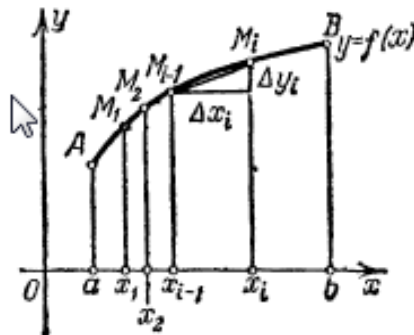


Рисунок 6

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Этим точкам на кривой Γ соответствуют точки

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B$$

с ординатами $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots, y_n$ соответственно.

Эти точки являются вершинами ломаной, которую образуют отрезки, попарно соединяющие соседние точки M_{i-1} и M_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Длина звена ломаной между точками M_{i-1} и M_i равна

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}. \quad (11)$$

На любом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$ длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ для непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$ выполнены условия теоремы Лагранжа

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad (12)$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$y_i - y_{i-1} = \Delta y_i.$$

Подставив выражение (12) в формулу (11), получаем

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i.$$

Тогда длину всей ломаной можно записать в виде интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i \quad (13)$$

функции $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ на отрезке $[a, b]$.

Длиной l дуги AB называется предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю:

Поэтому найдем предел интегральной суммы (13) при $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$. Этот предел существует и конечен, поскольку в силу непрерывности функции $g(x)$ он равен определенному интегралу

$$l = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Таким образом, получаем формулу для вычисления длины дуги AB кривой Γ

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (14)$$

Пример. Найти длину четверти окружности $x^2 + y^2 = 4$, расположенной в первой четверти.

Решение.

Уравнение дуги окружности имеет вид $y = \sqrt{4 - x^2}$, откуда

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Используя формулу (14), получаем

$$\begin{aligned} l &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \\ &= 2 \cdot \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^2 = 2 \cdot \arcsin 1 - 0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Пусть кривая Γ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

причем функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi'(t) \neq 0$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$.

Эти уравнения определяют некоторую функцию $y = f(x)$, непрерывную и имеющую непрерывную производную (находим ее по формуле дифференцирования функции, заданной параметрически)

$$(f(x))'_x = \frac{(\psi(t))'_t}{(\varphi(t))'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (15)$$

Пусть

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad a < b.$$

Сделав в интеграле (14) подстановку $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$, с учетом производной (15) получаем формулу для вычисления длины дуги AB кривой Γ в случае, если она задана параметрическими уравнениями

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt,$$

откуда

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (16)$$

Примечание. Пусть пространственная кривая Γ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

причем функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi'(t) \neq 0$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$.

Пусть $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $a < b$.

Тогда длина дуги AB кривой Γ вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt.$$

Вычисление длины дуги кривой в полярной системе координат

Пусть кривая Γ задана в полярной системе координат функцией

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

где r – полярный радиус, φ – полярный угол.

Причем $r(\varphi) \geq 0$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$.

Согласно формулам перехода от полярных координат к декартовым имеем

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin \varphi.$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой, где параметром является полярный угол φ . Тогда для вычисления длины дуги можно применить формулу (16), в которой $t = \varphi$.

Если функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то найдем производные от x и y по параметру φ

$$x'(\varphi) = r'(\varphi) \cdot \cos \varphi - r(\varphi) \cdot \sin \varphi, \quad y'(\varphi) = r'(\varphi) \cdot \sin \varphi + r(\varphi) \cdot \cos \varphi.$$

Тогда

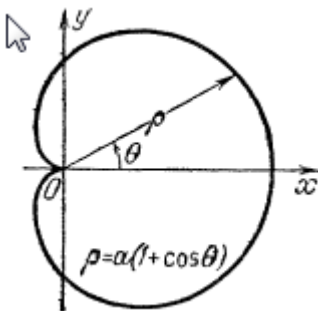
$$\begin{aligned} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} &= \\ &= \sqrt{(r'(\varphi) \cdot \cos \varphi - r(\varphi) \cdot \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \cdot \sin \varphi + r(\varphi) \cdot \cos \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив выражение (17) в формулу (16), получаем формулу для вычисления длины дуги AB кривой Γ в полярной системе координат

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi. \quad (18)$$

Пример. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение.



Кардиоида симметрична относительно полярной оси, поэтому ее длину можно вычислить как $l = 2l_1$, где l_1 — длина части кардиоиды, соответствующей изменению полярного угла φ от 0 до π .

Найдем производную функции $r = a(1 + \cos \varphi)$:

$$r' = -a \sin \varphi$$

Используя формулу (18), получаем

$$\begin{aligned} l &= 2l_1 = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(-a \cdot \sin \varphi)^2 + (a \cdot (1 + \cos \varphi))^2} d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \cdot (2 + 2 \cos \varphi)} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi \\ &= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Вычисление площади поверхности вращения

Пусть плоская кривая Γ задана в виде графика непрерывно дифференцируемой неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и пусть поверхность S получена вращением этой кривой вокруг оси Ox (рисунок 7).

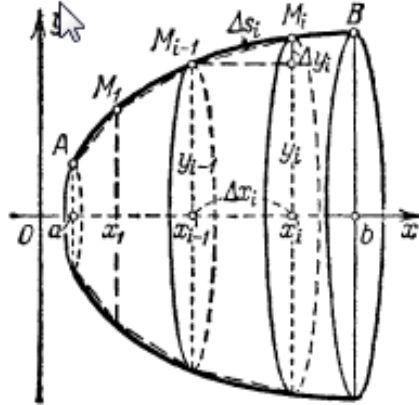


Рисунок 7

Рассмотрим разбиение τ отрезка $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Построим ломаную с вершинами в точках

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B,$$

вписанную в кривую Γ , как и при определении дуги кривой.

Рассмотрим поверхность S , полученную вращением этой ломанной вокруг оси Ox .

При этом поверхность вращения является объединением боковых поверхностей усеченных конусов, и ее площадь равна

$$S_p = \sum_{i=1}^n 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Площадью $S_{нов}$ поверхности S , полученной вращением кривой Γ вокруг оси Ox , называется предел суммы площадей S_p при $\lambda(\tau) = \max_i \Delta x_i \rightarrow 0$.

Для вычисления этого предела преобразуем выражение для S_p , используя теорему Лагранжа

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Тогда

$$S_p = \sum_{i=1}^n 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i.$$

Представим S_p в виде суммы двух слагаемых

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2} - f(\xi_i) \right) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

При $\lambda(\tau) = \max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ первая сумма стремится к интегралу

$$2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \cdot \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Второе слагаемое при указанном предельном переходе стремится к нулю.

Поскольку производная функции $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е. существует число $M > 0$, такое что

$$|f'(x)| \leq M \text{ для любого } x \in [a, b].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \frac{y_{i-1} + y_i}{2} - f(\xi_i) \right| &= \left| \frac{(y_{i-1} - f(\xi_i)) + (y_i - f(\xi_i))}{2} \right| \leq \\ &\leq \frac{|y_{i-1} - f(\xi_i)| + |y_i - f(\xi_i)|}{2} = \\ &= \text{используем теорему Лагранжа,} \\ &\quad \eta_i \in [x_{i-1}, \xi_i], \mu_i \in [\xi_i, x_i] \setminus = \\ &= \frac{|f'(\eta_i) \cdot (\xi_i - x_{i-1})| + |f'(\mu_i) \cdot (x_i - \xi_i)|}{2} \leq M \Delta x_i. \end{aligned}$$

Используя эту оценку, получаем

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2} - f(\xi_i) \right) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right| \leq \\
 & \leq \sum_{i=1}^n M \sqrt{1 + M^2} \cdot (\Delta x_i)^2 \leq \lambda(\tau) M \sqrt{1 + M^2} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = \\
 & = \lambda(\tau) M \sqrt{1 + M^2} (b - a) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda(\tau) = \max_i \Delta x_i \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, вторая сумма стремится к нулю при $\lambda(\tau) \rightarrow 0$.

Таким образом, формула для вычисления площади поверхности вращения имеет вид

$$S_{\text{нов}} = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \cdot \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$