Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Семинары 10 – 11

Несобственные интегралы

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$.

Если существует (конечный) предел функции $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$, то он называется *несобственным интегралом по бесконечному промежутку (1-го рода) от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$* и обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

В случае, если предел в правой части выражения (1) существует, то несобственный интеграл 1-го рода называют сходящимся, а если предел (1) не существует, то расходящимся.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$ и не ограничена ни на каком интервале $(b - \varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b - a$.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, c]$, $c < b$.

Предел (левосторонний)

$$\lim_{c \to b^-} \int\limits_a^c f(x)dx,$$

если он существует, называется несобственным интегралом 2-го рода от неограниченной функции $f(x)$ по промежутку $[a, b)$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx. \tag{2}$$

В случае, если предел (2) существует, то несобственный интеграл 2-го рода называют сходящимся, а если предел (2) не существует, то расходящимся.

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(a, b]$, не ограничена ни на каком интервале $(a, a+\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < b - a$ и при этом интегрируема на отрезке $[c, b]$, $c > a$.

Тогда предел (правосторонний)

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx,$$

если он существует, называется несобственным интегралом 2-го рода от неограниченной функции $f(x)$ по промежутку $(a, b]$.

Таким образом, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), не ограничена в соответствующих полуокрестностях точек a и b и при этом интегрируема на отрезке $[c, d]$, $a < c < d < b$.

Если существуют пределы

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \lim_{d \to b^-} \int_a^d f(x)dx,$$

то интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx + \lim_{d \to b^-} \int_a^d f(x)dx$$

называется несобственным интегралом 2-го рода от неограниченной функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0, $x_0 \in [a, b]$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx,$$

если оба несобственных интеграла 2-го рода в правой части существуют.

Признаки сходимости несобственных интегралов

Если необходимо исследовать несобственный интеграл на сходимость, то это значит, необходимо установить, сходится он или расходится.

Для этого, кроме определения, можно использовать признаки сравнения.

1. *Признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода (лекция 7, теорема 1).*

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и интегрируемы на отрезке $[a, b]$ при любом b и пусть для любого $x \ge a$ выполняется неравенство

$$0 \le f(x) \le g(x).$$

Тогда, если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

При исследовании на сходимость *несобственного интеграла 1-го рода* его удобно сравнивать с интегралом Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$.

В лекции 7 было показано, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \infty, & \alpha \le 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \end{cases},$$

т. е. несобственный интеграл 1-го рода $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

При исследовании на сходимость *несобственного интеграла 2-го рода* его удобно сравнивать с несобственными интегралами $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ или $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$.

В лекции 7 был рассмотрен несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$.

Этот интеграл является несобственным интегралом 2-го рода при $\alpha > 0$. При этом функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ определена на промежутке $(0, 1]$, не ограничена ни на каком интервале $(0, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$ и при этом интегрируема на отрезке $[c, 1]$, $c > 0$.

Было получено, что

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \infty, & \alpha \geq 1, \\ \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha < 1 \end{cases},$$

т. е. несобственный интеграл 2-го рода $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Отсюда получаем, что несобственные интегралы 2-го рода $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ и $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ также сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

2. *Предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода (лекция 7, теорема 2).*

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и положительны при $x \geq a$ и интегрируемы на любом отрезке $[a, b]$.

Тогда, если существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K,\ 0<K<\propto,$$

то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Примечание.

Из *теоремы 2* вытекает, что если $f(x)$ и $g(x)$ положительны (по крайней мере, при достаточно больших значениях x) и являются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to+\propto$, то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. *Признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода (лекция 7, теорема 3).*

Пусть функция $f(x)$ определена и положительна при $x\geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a,b]$.

Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Семинары 10-11 (продолжение).

I. <u>Примеры.</u> Вычислить несобственные интегралы 1^го рода (или установить их расходимость).

№ 6.411.

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty} \int_e^b \frac{dx}{x\ln^3 x} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ x_1 = e \to t_1 = \ln e = 1 \\ x_2 = b \to t_2 = \ln b \end{array} \right\} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{\ln b} \frac{dt}{t^3} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\Big|_1^{\ln b} \right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^2 b} - 1\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{\infty} - 1\right] = \frac{1}{2} \neq \infty$$

Поскольку существует конечный предел, то исходный интеграл (несобственный, 1^го рода) сходится и равен $\frac{1}{2}$.

№ 6.415

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{x\,dx}{x^2+4} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2+4 \\ dt = 2x\,dx,\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \\ x_1 = 0 \to t_1 = 4 \\ x_2 = b \to t_2 = b^2+4 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\int_4^{b^2+4} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln|t|\Big|_4^{b^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(b^2+4) - \ln 4\right) = \infty$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$ расходится.

№ 6.421

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\left(\ln|x| + \frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln b - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b^2} -\right.$$

$$\left.- \ln 1 + \frac{1}{2}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln b - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b^2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{b\to+\infty} \ln b}_{=\infty} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^2}}_{=0} + \frac{1}{2} = \infty$$

Т.о., интеграл (несобственный, 1го рода) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3}\,dx$ расходится.

№ 6.424.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b} - e^0\right) = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^b} - 1\right) = 1$$

Т.о., несобственный интеграл 1го рода $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится и равен 1.

II. Исследовать на сходимость несобственный интеграл 1го рода (т.е. установить, сходится ли он или расходится).

№ 6.425

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{3+2x^2+5x^4}\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{вынесем в знаменателе}\\ \text{за скобку } x \text{ в наиболь-}\\ \text{шей степени, т.е. } x^4, \text{ с}\\ \text{коэффициентом } 5\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{1}{5x^4\left(\frac{3}{5x^4}+\frac{2}{5x^2}+1\right)}\,dx = \frac{1}{5}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4\left(1+\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{5x^4}\right)}\,dx$$

Т.к. $\frac{1}{x^4\left(1+\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{5x^4}\right)} < \frac{1}{x^4}$, то сравним

несобственный интеграл 1го рода $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4\left(1+\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{5x^4}\right)} dx$ с несобственным

интегралом 1го рода. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$. При $\alpha = 4$ $(\alpha > 1)$

несобственный интеграл 1го рода $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится, следовательно,

сходится и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4\left(1+\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{5x^4}\right)} dx$

сходится, а значит, сходится интеграл

$\frac{1}{5}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4\left(1+\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{5x^4}\right)} dx$ (сходимость интеграла

не изменится, если его умножить на const).

Использовали признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1го рода.

Можно рассуждать и так:

$1+\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{5x^4} \to 1$ при $x \to +\infty$, тогда $\frac{1}{x^4\left(1+\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{5x^4}\right)} \sim \frac{1}{x^4}$

поэтому $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4\left(1+\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{5x^2}\right)} dx$ и $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$

одновременно сходятся или расходятся.

Т.к. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha = 4$, то и несобств.

интеграл 1го рода $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4\left(1+\frac{2}{5x^2}+\frac{3}{5x^4}\right) dx}$ сходится. (по

предельному признаку сравнения)

№ 6.426

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{вынесем } x \\ \text{в наибольшей степе-} \\ \text{ни в числителе,} \\ \text{т.е. } x^{\frac{3}{2}} \text{ за скобку,} \\ \text{а в знаменателе } x^3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{x^{3/2}}\sqrt{x^2+1}\right)}{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{x^{3/2}\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} \to 1 \text{ при } x\to+\infty \\ 1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3} \to 1 \text{ при } x\to+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \text{ при } x\to+\infty$$

Поэтому сравниваем исходный несобствен-ный интеграл с интегралом $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$.

При $\alpha=\frac{3}{2}>1$ этот интеграл сходится, а следовательно, сходится и исходный несобст-венный интеграл 1го рода. (по предельному признаку сравнения).

№ 6.428

$$\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Функция $3+\sin x$ - ограничена, т.к. $|\sin x|\le 1$, то $2\le 3+\sin x\le 4$.

Поэтому несобств. интеграл 1го рода $\int_1^{+\infty}\frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$ можно сравнить с несобств. интегралом $1^{го}$ рода $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$

При $\alpha=\frac{2}{3}<1$ этот интеграл расходится

Следовательно, исходный несобственный интеграл $1^{го}$ рода расходится.

№6.430

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx=\left\{\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x} \text{ при } x\to+\infty\right\}\sim$$

$$\sim\int\limits_1^{+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x(2+x^{3/2})}dx=$$

$$=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{5/2}\left(\frac{2}{x^{3/2}}+1\right)}dx$$

Т.к. $1+\frac{2}{x^{3/2}}\to1$ при $x\to+\infty$, то

$$\frac{1}{x^{5/2}\left(1+\frac{2}{x^{3/2}}\right)}\sim\frac{1}{x^{5/2}} \text{ при } x\to+\infty.$$

Поэтому сравниваем несобственный интеграл $1^{го}$ рода $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{5/2}\left(1+\frac{2}{x^{3/2}}\right)}dx$ с несобств. интегралом $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$, который при $\alpha=\frac{5}{2}>1$ сходится.

Следовательно, несобств. интеграл $1^{го}$ рода $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$ сходится (по предельному признаку сравнения).

№6.435

$$\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left\{\begin{array}{l} x=1 \text{ - точка разрыва функции} \\ f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x} \\ \Rightarrow \int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x} \text{ - несобств. интеграл } 2^{\text{го}} \text{ рода} \end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{a\to 1^+} \int_a^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left\{\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \\ x_1=a \to t_1=\ln a \\ x_2=e \to t_2=\ln e=1 \end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{a\to 1^+} \int_{\ln a}^1 \frac{1}{t^3}dt = \lim_{a\to 1^+}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\Big|_{\ln a}^1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to 1^+}\left(1-\frac{1}{\ln^2 a}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{a\to 1^+}\frac{1}{\ln^2 a}}_{=\left[\frac{1}{0}=\infty\right]} = \infty$$

Следовательно, несобственный интеграл $2^{\text{го}}$ рода $\int_1^e \frac{1}{x\ln^3 x}dx$ расходится.

$$\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \left\{\begin{array}{l} x=0 \text{ - точка разрыва функции} \\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ \Rightarrow \int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx \text{ - несобственный интеграл } 2^{\text{го}} \text{ рода} \end{array}\right\} =$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx + \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^b \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx + \lim_{a\to 0^+}\int_a^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx =$$

$$= \lim_{b\to 0^-}\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^b + \lim_{a\to 0^+}\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_a^8 = \frac{3}{2}\underbrace{\lim_{b\to 0^-}\left(\sqrt[3]{b^2}-1\right)}_{=-1} +$$

$$+ \frac{3}{2}\underbrace{\lim_{a\to 0^+}\left(\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[3]{a}\right)}_{=4} = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot 4 = \frac{9}{2}.$$

Т.о., несобств. интеграл сходится и равен $\frac{9}{2}$.

IV. Исследовать на сходимость несобственные интегралы $2^{го}$ рода (т.е. установить, сходятся ли они или нет).

1) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx = \left\{ \begin{array}{l} x=1 \text{ - точка разрыва} \\ \text{функции } f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \\ \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx \text{ - несобственный} \\ \text{интеграл } 2^{го} \text{ рода} \end{array} \right\} =$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}dx$$

При $x \to 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда сравниваем исходный несобственный интеграл $2^{го}$ рода с несобственным интегралом $\int\limits_0^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ при $b=1$.

При $\alpha=\frac{1}{2}<0$ $\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx$ сходится,

а следовательно, сходится исходный несобственный интеграл $2^{го}$ рода (по предельному признаку сходимости).

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg^4 x}dx = \left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ - точка разрыва} \\ \text{функции } f(x)=\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg^4 x} \\ \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg^4 x}dx \text{ - несобственный интеграл } 2^{го} \text{ рода} \\ \text{Используем б.м. при } x\to 0 \\ \sin x \sim x \text{ при } x\to 0 \\ tg\, x \sim x \text{ при } x \to 0 \end{array} \right\} =$

$$\sim\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^4}\,dx = \left\{ \ln(1+x^2)\sim x^2 \text{ при } x\to 0 \right\} =$$

$$\sim\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{x^4}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\,dx$$

а) Сравниваем несобственный интеграл $2^{го}$ рода $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ с несобственным интегралом $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$.

При $\alpha = \quad > 1$ интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ расходится.

б) $$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}+1 = const$$

Т.о. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\operatorname{tg}^4 x}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\,dx,$$

и поскольку один из интегралов в правой части расходится, то расходится и несобственный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\operatorname{tg}^4 x}\,dx$. (по предельному признаку сравнения).

Домашнее задание.

Сборник задач по математике для ВТУЗов. Часть 1. / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.

№ 6.412, 6.418, 6.427, 6.429, 6.434, 6.439, 6.446, 6.447.