Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

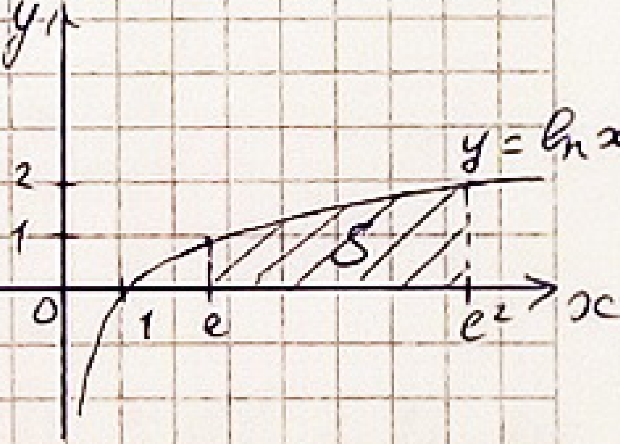
Семинар 9

Вычисление площадей плоских фигур.

I в декартовой системе координат

1. (№6.453) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$, $y=0$.

Решение



Площадь S криволинейной трапеции вычисляем по формуле $S=\int\limits_a^e f(x)dx$,

т.к. $f(x)=\ln x \geq 0$ при $x\in[e,e^2]$,

$a=e$, $b=e^2$.

$$S=\int\limits_e^{e^2}\ln x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x\rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\rightarrow v=x\end{matrix}\right|=$$

$$=x\cdot\ln x\Big|_e^{e^2}-\int\limits_e^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

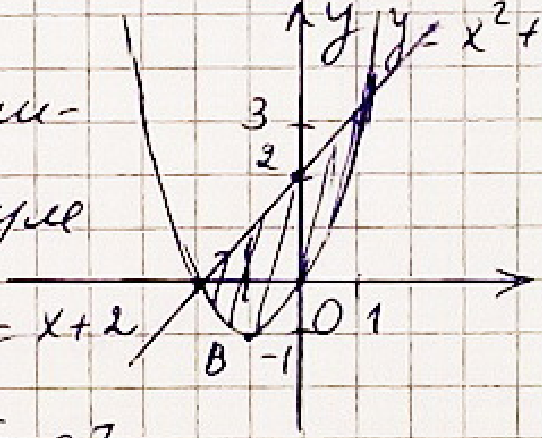
$$=2e^2-e-x\Big|_e^{e^2}=2e^2-e-e^2+e=e^2.$$

(2) (№6.456) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.

Решение.

Приведем уравнение параболы к каноническому виду

$y = (x+1)^2 - 1$ (уравнение параболы с вершиной в точке $B(-1,-1)$, ветви направлены вверх).



Площадь S криволинейной трапеции вычислим по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx,$$

$f(x) \geq g(x)$ при $x \in [a, b]$.

Т.к. $x + 2 \geq x^2 + 2x$ при $x \in [-2, 1]$, то

$$S = \int_{-2}^{1} \left(x + 2 - (x^2 + 2x)\right) dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}$$

Примечание

Пределы интегрирования - абсциссы точек пересечения графиков функций

$y = x+2$ и $y = x^2+2x$:

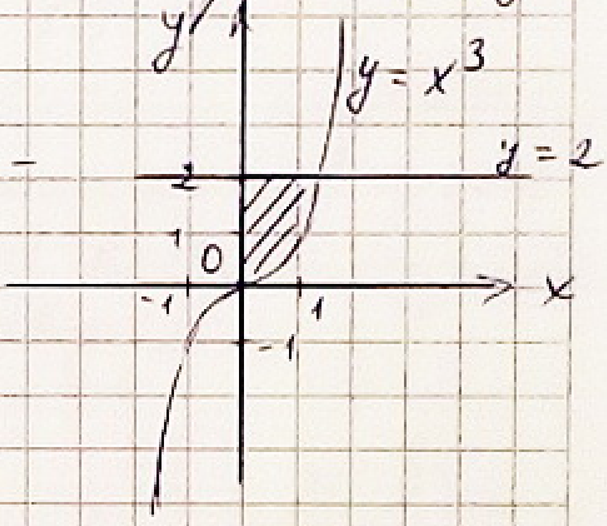
$$x+2 = x^2+2x$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1.$$

---

(3) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^3$, осью Oy и прямой $y=2$.

Решение.



Площадь S криволинейной трапеции удобнее вычислять по формуле

$$S=\int_c^d x(y)\,dy,$$

$x(y)\geq 0$ при $y\in[c,d]$.

Обратной функцией к функции $y=x^3$ является функция $x=\sqrt[3]{y}$; $\sqrt[3]{y}\geq 0$ при $y\in[0,2]$.

Тогда

$$S=\int_0^2 \sqrt[3]{y}\,dy = \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\Big|_0^2 = \frac{3}{4}\cdot 2^{\frac{4}{3}} =$$

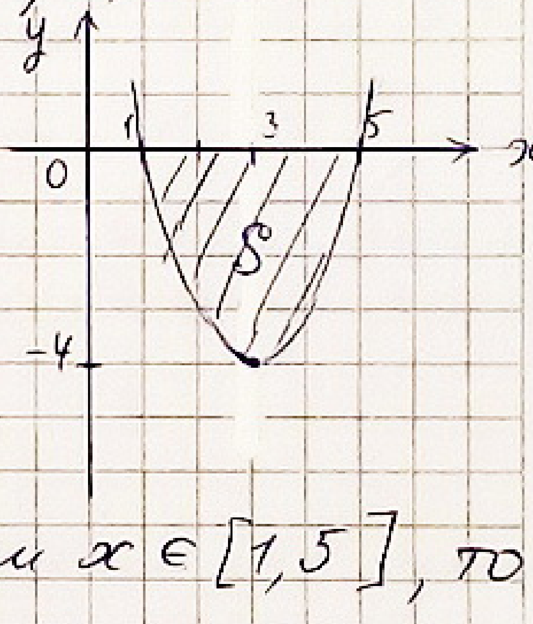
$$= \frac{3}{4}\cdot 2\sqrt[3]{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}.$$

④. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 6x + 5$ и осью OX.

Решение.

Приведем уравнение параболы к каноническому виду

$y = (x-3)^2 - 4$ (уравнение параболы с вершиной в точке $A(3; -4)$ ветви направлены вверх).



Найдем абсциссы точек пересечения параболы с осью OX.

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow$

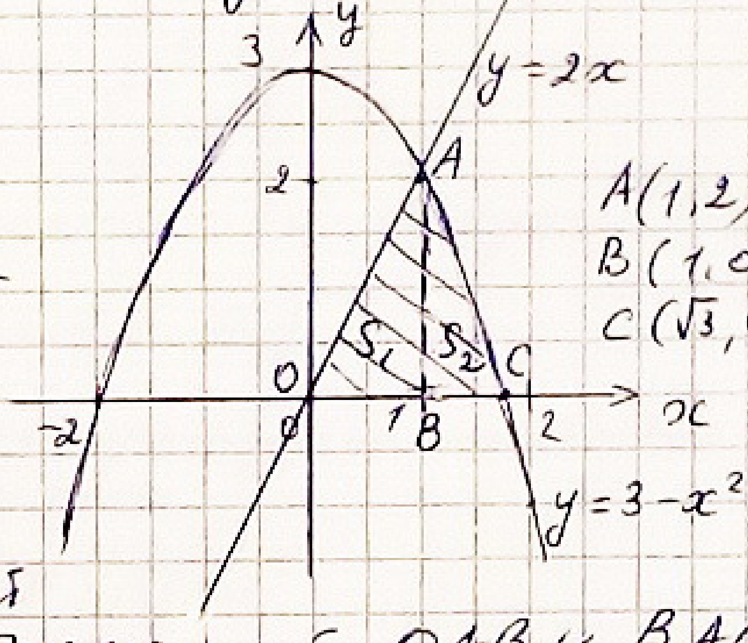
$x_1 = 1, \ x_2 = 5.$

Т.к. $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ при $x \in [1, 5]$, то площадь S криволинейной трапеции можно вычислить по формуле

$$S = -\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right)\Big|_1^5 =$$

$$= -\left(\left(\frac{125}{3} - 75 + 25\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right)\right) = \frac{32}{3}$$

(5) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=3-x^2$, $y=2x$, $y=0$ и находящейся в $1^{ч}$ четверти.



$A(1,2)$
$B(1,0)$
$C(\sqrt{3},0)$

Решение.

Площадь криволинейной трапеции OAC равна сумме площадей криволинейных трапеций OAB и BAC.

Криволинейная трапеция OAB ограничена графиком функции $y=2x$, осью OX и прямой $x=1$, ее площадь равна

$$S_1=\int_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

Криволинейная трапеция BAC ограничена графиком функции $y=3-x^2$, осью Ox и прямой $x=1$, ее площадь равна

$$S_2=\int_1^{\sqrt{3}}(3-x^2)\,dx=\left(3x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}=\left(3\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)-\left(3-\frac{1}{3}\right)=2\sqrt{3}-\frac{8}{3}$$

Тогда площадь криволинейной трапеции OAC равна $S=S_1+S_2=1+2\sqrt{3}-\frac{8}{3}=2\sqrt{3}-\frac{5}{3}$.

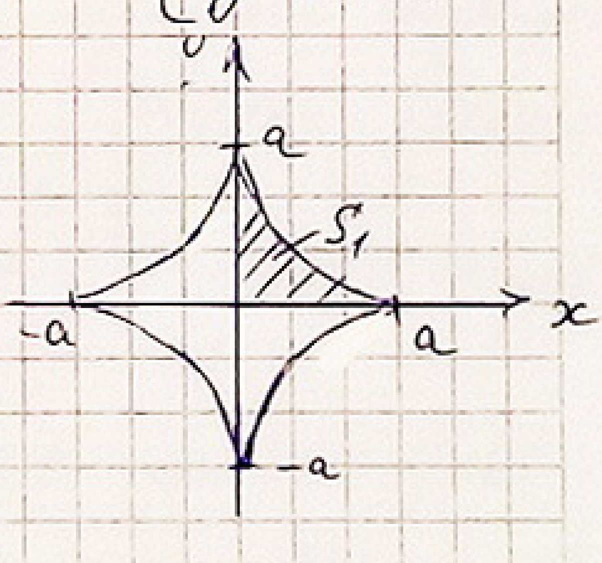
II. Вычисление площади плоской фигуры в случае, если кривая, ограничивающая фигуру задана параметрически:
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

$\varphi(t), \psi(t)$ определены на отрезке $[t_1, t_2]$, $\psi(t) \geq 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$.

Тогда площадь фигуры можно найти по формуле
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt$$

(6) Найти площадь фигуры, ограни-
(№ 6.478) ченной астроидой $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

Решение.



Поскольку фигура симметрична относительно оси Ox и оси Oy, то площадь S фигуры равна
$$S = 4 \cdot S_1$$

Найдём S_1 по формуле

$$S_1 = \int\limits_{x_1=0}^{x_2=a} y(x)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt$$

По условию задачи $y = \psi(t) = a\sin^3 t$, $x = \varphi(t) = a\cdot\cos^3 t$. Тогда $\varphi'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$.

Если $x_1 = 0$, то $a\cos^3 t_1 = 0 \Rightarrow \cos t_1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$.

Если $x_2 = a$, то $a\cos^3 t_2 = a \Rightarrow \cos t_2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow t_2 = 0$.

Тогда $S_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt =$

$$= -3a^2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = \left|\begin{array}{c}\text{используем}\\ \text{свойство опреде-}\\ \text{лённого интеграла}\\ \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx\end{array}\right| =$$

$$= 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 2t - \cos^2 2t - \cos 2t + 1)\,dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2t\,dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t\,dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt\right) =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2t\cos 2t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3}{8}a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 2t)\cos 2t\,dt -\right.$$

$$- \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left(\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) +$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\begin{array}{l} u = \sin 2t,\ du = 2\cos 2t\,dt \\ t_1 = 0 \to u_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \frac{\pi}{2} \to u_2 = \sin 2\cdot\frac{\pi}{2} = \sin\pi = 0 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\left(\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^0 (1-u^2)\,du}_{=0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\pi - 0 - 0\right) -\right.$$

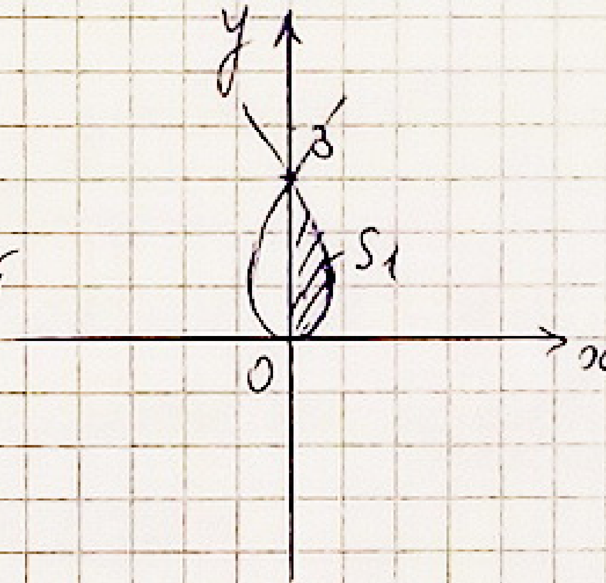
$$\left. - 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}a^2\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{32}a^2\pi.$$

Таким образом, $S_1 = \frac{3}{32}a^2\pi$

Тогда площадь фигуры, ограниченной астроидой, равна

$$S = 4\cdot S_1 = 4\cdot\frac{3}{32}a^2\pi = \frac{3}{8}a^2\pi.$$

(7) (№6.479) Найти площадь петли кривой $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t(3-t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$.



Решение

Найдем точки пересечения кривой с осью OY:

$x = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

$t_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

Следовательно, получаем следующие точки:

при $t = 0$: $O(0,0)$

при $t = \sqrt{3}$: $A(0,3)$

при $t = -\sqrt{3}$: $A'(0,3)$ $\Bigg\} \Rightarrow A = A'$

Точка $A(0,3)$ является точкой самопересечения кривой.

При $0 \le t \le \sqrt{3}$ $x \ge 0$, при $-\sqrt{3} \le t \le 0$ $x \le 0$.

Площадь S фигуры можно найти как удвоенную площадь S_1 правой ее половины, т.е. $S = 2 \cdot S_1$.

Для вычисления площади S_1 используем формулу

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

По условию задачи $y = \psi(t) = t^2$, $x = \varphi(t) = \frac{1}{3} t(3 - t^2)$. Тогда

$$\varphi'(t) = \frac{1}{3}(3 - t^2) + \frac{1}{3} t \cdot (-2t) = 1 - \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{3} t^2 = 1 - t^2.$$

Обход по кривой по часовой стрелке.

Тогда $S_1 = \int_{\sqrt{3}}^{0} t^2 (1 - t^2)\, dt =$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{0} (t^2 - t^4)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{0} =$$

$$= (0 - 0) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{5}\right) = \frac{4}{5}\sqrt{3}.$$

Таким образом, $S_1 = \frac{4}{5}\sqrt{3}$.

Тогда площадь петли кривой равна $S = 2 \cdot S_1 = 2 \cdot \frac{4}{5}\sqrt{3} = \frac{8}{5}\sqrt{3}$.

III. Вычисление площади плоской фигуры в полярной системе координат.

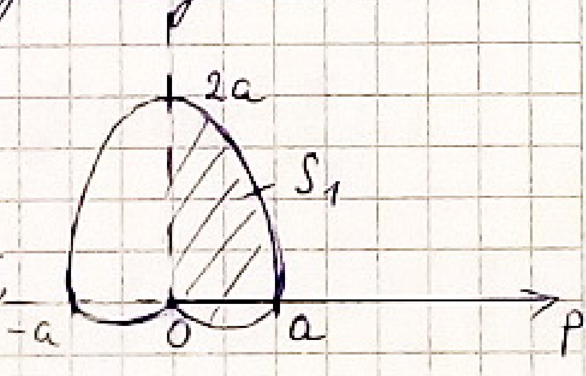
Площадь криволинейного сектора, ограниченная дугой графика функции $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi,$$

r, φ - полярные координаты точки криволинейного сектора.

⑧ (№ 6.483) Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\sin\varphi)$.

Решение.



Фигура, ограниченная кардиоидой, симметрична относительно прямой, перпендикулярной полярной оси p и проходящей через полюс.

Поэтому площадь S фигуры можно найти, как удвоенную площадь S_1

правой половины фигуры, т.е.

$S = 2 \cdot S_1$.

Найдем площадь S_1 по формуле

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a(1+\sin\varphi))^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\cos\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) +\right.$$

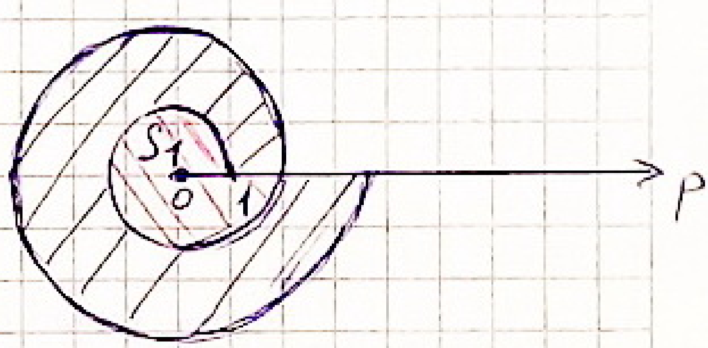
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\pi - 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} + 0\right)\right) = \frac{3}{4}a^2\pi.$$

Тогда площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, равна $S = 2 \cdot S_1 = 2 \cdot \frac{3}{4}a^2\pi = \frac{3}{2}a^2\pi$.

⑨ (№6.488) Найти площадь фигуры, ограниченной двумя последовательными витками логарифмической спирали $r = e^{\varphi}$, начиная с $\varphi = 0$.

Решение.



Площадь S фигуры, ограниченной двумя последовательными витками логарифмической спирали, начиная с $\varphi = 0$, равна разности площади S_2 фигуры, ограниченной витком логарифмической спирали от $\varphi = 2\pi$ до $\varphi = 4\pi$, и площади S_1 фигуры, ограниченной витком логарифмической спирали от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, т.е.

$$S = S_2 - S_1 = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} e^{2\varphi} d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} e^{2\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} e^{2\varphi}\Big|_{2\pi}^{4\pi} - \frac{1}{4} e^{2\varphi}\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{1}{4}\left(e^{8\pi} - e^{4\pi}\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\left(e^{4\pi} - e^{0}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{8\pi} - e^{4\pi} - e^{4\pi} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{4\pi} - 1\right)^2.$$

Домашнее задание

Сборник задач по математике для ВТУЗов. Часть 1. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.

№ 6.457, 6.464, 6.467, 6.481, 6.484, 6.492.