Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения.

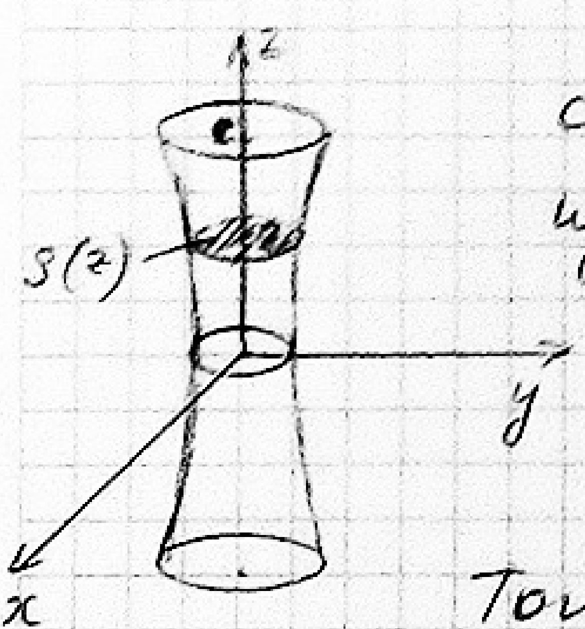
Семинар 12.

Вычисление объемов тел.

I Вычисление объемов тел по площади поперечных сечений.

① Найти объем однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $z=\pm c$.

Решение



Найдем площадь сечения этого гиперболоида плоскостью, перпендикулярной оси Oz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1+\frac{z^2}{c^2}.$$

Тогда в сечении тела получим эллипс: $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1$.

Площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ равна $S=\pi a b$.

Тогда площадь рассматриваемого эллипса равна

$$S(z)=\pi a b\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Пределы интегрирования определяются условием изменения переменной z от $-c$ до c.

Тогда объем тела равен

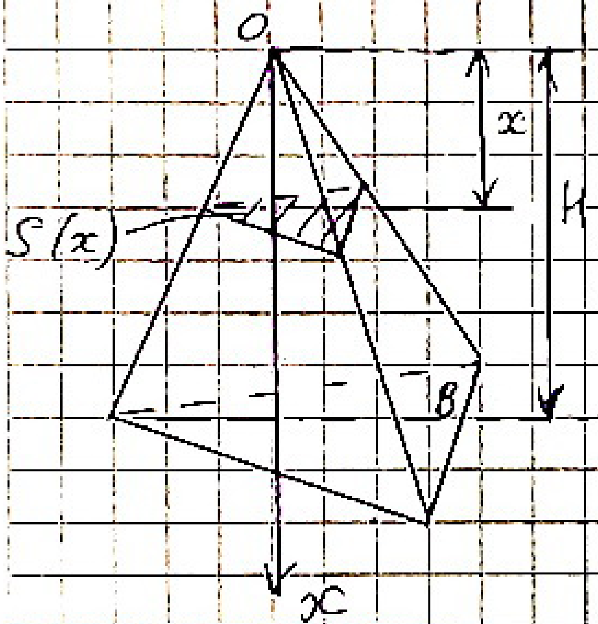
$$V=\int_{-c}^{c}S(z)\,dz=\pi a b\int_{-c}^{c}\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz=$$

$$=\pi a b\left(z+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-c}^{c}=\pi a b\left(c+\frac{1}{3c^2}c^3-\right.$$

$$\left.-\left(-c+\frac{1}{3c^2}(-c)^3\right)\right)=\pi a b\left(2c+\frac{2}{3}c\right)=\frac{8}{3}\pi a b c.$$

(2) Найти объем пирамиды с основанием, площадь которого равна B, и высотой H.

Решение.



Ось Ox перпендикулярна основанию. $S(x)$ - площадь сечения пирамиды плоскостью, находящейся на расстоянии x от вершины, перпендикулярной оси Ox.

Т.к. площади поперечных сечений пирамиды относятся как квадраты расстояний их от вершины, то получаем $\frac{S(x)}{B} = \frac{x^2}{H^2}$, откуда $S(x) = \frac{B}{H^2}x^2$.

Тогда объем пирамиды равен

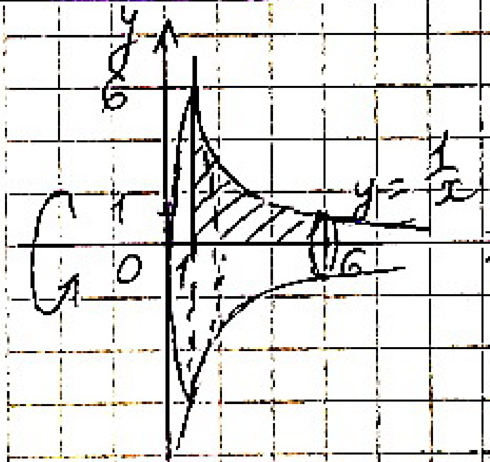
$$V = \int_0^H S(x)\,dx = \int_0^H \frac{B}{H^2}x^2\,dx = \frac{B}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H =$$

$$= \frac{B}{H^2}\cdot\left(\frac{H^3}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}B\cdot H.$$

II Вычисление объема тела вращения.

(3) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{6}{x}$, $x = 1$, $x = 6$.

Решение.



Объем тела вращение равен $V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx =$

$$= \left\{ \begin{matrix} a = 1 \\ b = 6 \end{matrix} \right\} =$$

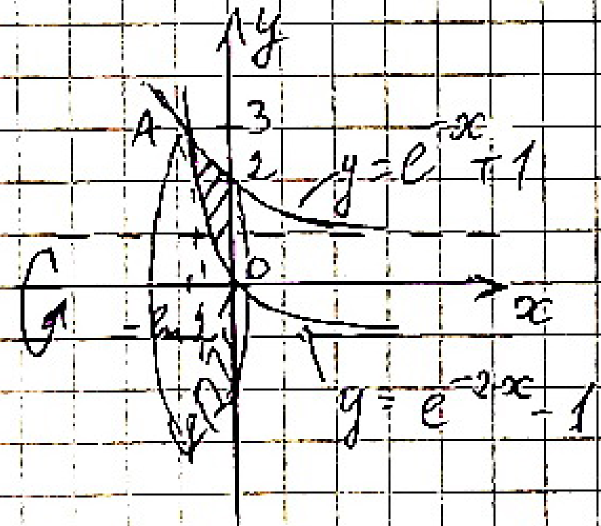
$$= \pi \int_1^6 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx = 36\pi \int_1^6 \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= -36\pi \frac{1}{x}\Big|_1^6 = -36\pi\left(\frac{1}{6} - 1\right) =$$

$$= -36\pi \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = 30\pi$$

4 (№6.536) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=e^{-2x}-1$, $y=e^{-x}+1$, $x=0$.

Решение



Найдем точку пересечения графиков функций $y=e^{-2x}-1$ и $y=e^{-x}+1$:

$$e^{-2x}-1=e^{-x}+1$$

$$e^{-2x}-e^{-x}-2=0$$

Обозначим $e^{-x}=t$, тогда $t^2-t-2=0$.

Решая квадратное уравнение, получаем корни $t_1=-1$ и $t_2=2$.

Корень $t_1=-1$ не подходит, т.к. $e^x>0$ при любом x.

Если $t=2$, то $e^{-x}=2 \Rightarrow -x=\ln 2 \Rightarrow$

$$x=-\ln 2.$$

$\Rightarrow y=e^{\ln 2}+1=3$. Т.о. точка $A(-\ln 2, 3)$ — точка пересечения графиков функций.

Объем тела вращения найдем по формуле $V_x = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,dx$, где $f(x) \geq g(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$

В рассматриваемой задаче $f(x) = e^{-x} + 1$, $g(x) = e^{-2x} - 1$, $a = -\ln 2$, $b = 0$

Тогда $V_x = \pi \int_{-\ln 2}^{0} \left((e^{-x}+1)^2 - (e^{-2x}-1)^2 \right) dx =$

$$= \pi \cdot \int_{-\ln 2}^{0} \left(e^{-2x} + 2e^{-x} + 1 - e^{-4x} + 2e^{-2x} - 1 \right) dx =$$

$$= \pi \int_{-\ln 2}^{0} \left(-e^{-4x} + 3e^{-2x} + 2e^{-x} \right) dx =$$

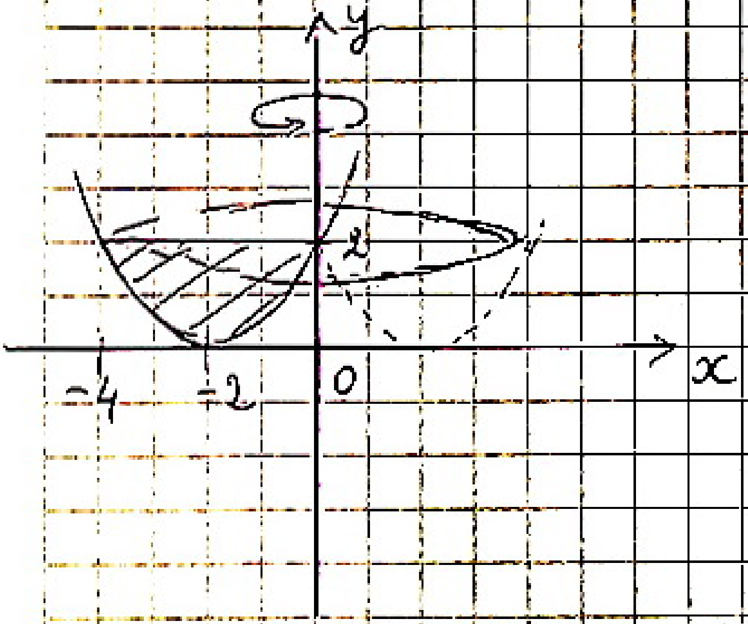
$$= \pi \left(\frac{1}{4} e^{-4x} - \frac{3}{2} e^{-2x} - 2e^{-x} \right) \Big|_{-\ln 2}^{0} =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 - \left(\frac{1}{4} e^{4\ln 2} - \frac{3}{2} e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2} \right) \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 - \frac{16}{4} + \frac{3 \cdot 4}{2} + 2 \cdot 2 \right) = \frac{11}{4} \pi$$

⑤ (№ 6.538) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{2}+2x+2$ и $y=2$

Решение



Приведем уравнение параболы к каноническому виду

$y=\frac{1}{2}(x^2+4x)+2$

$y=\frac{1}{2}(x^2+4x+4-4)+2$

$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$ – парабола с вершиной в точке $(-2,0)$, ветви направлены вверх

I способ

Вычислим объем тела вращения вокруг оси Oy по формуле

$$V_y=2\pi\int_a^b x(f(x)-g(x))\,dx$$

где $f(x)\geq g(x)\geq 0$ на отрезке $[a,b]$, $a\geq 0$

В задаче $f(x)=2$, $g(x)=\frac{x^2}{2}+2x+2$
Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y=2$ и $y=\frac{x^2}{2}+2x+2$.

$$2=\frac{x^2}{2}+2x+2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2+2x=0$$

Решая квадратное уравнение, получаем корни $x_1=0$, $x_2=-4$

Т.к. $a\geq 0$, то полагаем $a=0$, $b=-4$

$$V_y=2\pi\int_0^{-4} x\cdot\left(2-\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)\right)dx=$$

$$=2\pi\int_0^{-4}\left(-\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)dx=2\pi\left(-\frac{1}{8}x^4-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{-4}=$$

$$=2\pi\left(-\frac{256}{8}+\frac{128}{3}-0\right)=\frac{64}{3}\pi$$

II способ. Используем формулу

$$V_y=\pi\int_c^d\left(x_2^2-x_1^2\right)dy,\quad x_2\geq x_1$$ на отрезке $[c,d]$

Из уравнения параболы $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$ получаем $(x+2)^2=2y\Rightarrow$

$$x_2=-2-\sqrt{2\cdot y},\quad x_1=-2+\sqrt{2y}.$$

Тогда $V_y = \pi\int_0^2\left((-2-\sqrt{2y})^2-(-2+\sqrt{2y})^2\right)dy =$

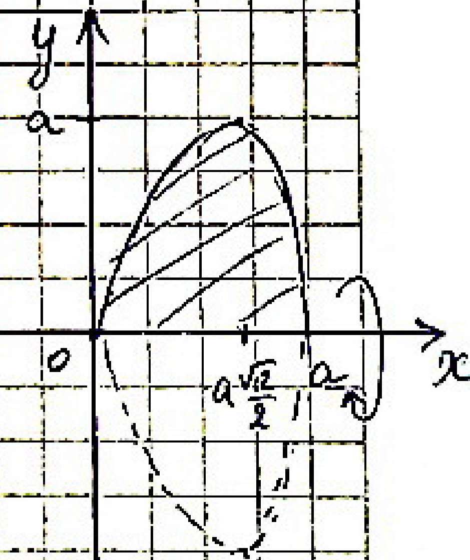
$= \pi\int_0^2 (4+4\sqrt{2y}+2y-4+4\sqrt{2y}-2y)\,dy =$

$= \pi\int_0^2 8\sqrt{2\cdot y}\,dy = \pi\, 8\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{y}\,dy =$

$= \pi\, 8\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\Big|_0^2 = \pi\, 8\cdot\sqrt{2}\,\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-0\right) =$

$= \frac{64}{3}\pi.$

6) Найти объем тела, образованного
(№ 6.541) вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой
$x = a\cdot\cos t$, $y = a\cdot\sin 2t$ и осью Ox,
$(0 \le x \le a)$.



Решение.

Для вычисления объема тела используем формулу

$V_x = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_{t_1}^{t_2}(y(t))^2\,x'(t)\,dt$

По условию задачи $0 \le x \le a$.

Если $x=0$, то $a\cos t=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{t_1=\frac{\pi}{2}}$

Если $x=a$, то $a\cos t=a \Rightarrow$

$\Rightarrow t_2=0$

Т.к. $x=a\cos t$, то $x'(t)=-a\sin t$

Тогда

$$V_x=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(a\sin 2t)^2\cdot(-a\sin t)\,dt=$$

$$=-\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 2t\cdot\sin t\,dt=$$

$$=-4\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=-4\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)\cos^2 t\sin t\,dt=$$

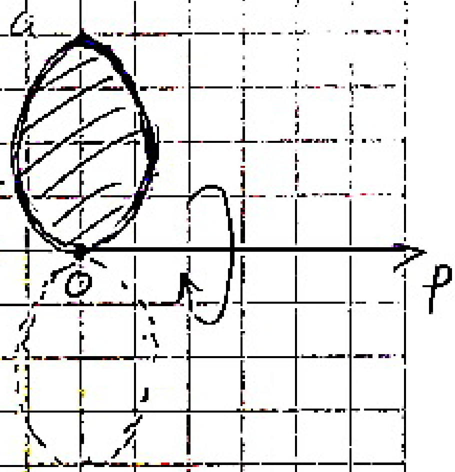
$$=\left|\begin{array}{l} u=\cos t,\ du=-\sin t\,dt \\ t_1=\frac{\pi}{2}\to u_1=0 \\ t_2=0\to u_2=1 \end{array}\right|=4\pi a^3\int_0^1(1-u^2)u^2\,du=$$

$$=4\pi a^3\int_0^1(u^2-u^4)\,du=4\pi a^3\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1=$$

$$=4\pi a^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-0+0\right)=\frac{8}{15}\pi a^3.$$

7 (№6.543) Найти объем тела, образованного вращением кривой $r = a\cdot\sin^2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение.



Используем формулу

$$V_\rho = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

$\alpha = 0$, $\beta = \pi$ (по построению)

$$V_\rho = \frac{2}{3}\pi\int_0^\pi a^3\sin^6\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^\pi a^3(1-\cos^2\varphi)^3\sin\varphi\,d\varphi = \left|\begin{array}{l} t=\cos\varphi \\ dt=-\sin\varphi\,d\varphi \\ \varphi_1=0\to t_1=1 \\ \varphi_2=\pi\to t_2=-1 \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\int_1^{-1}(1-t^2)^3\,dt = -\frac{2}{3}\pi a^3\int_1^{-1}(1-3t^2+3t^4-t^6)\,dt =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\left(t-\frac{3}{3}t^3+\frac{3t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_1^{-1} = -\frac{2}{3}\pi a^3\left(-1+1-\frac{3}{5}+\frac{1}{7}-\left(1-1+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right)\right) = -\frac{2}{3}\pi a^3\cdot\left(-\frac{32}{35}\right) = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

Домашнее задание

Сборник задач по математике для ВТУЗов. часть 1. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича

№ 6.533, 6.535, 6.537, 6.540, 6.544.