Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

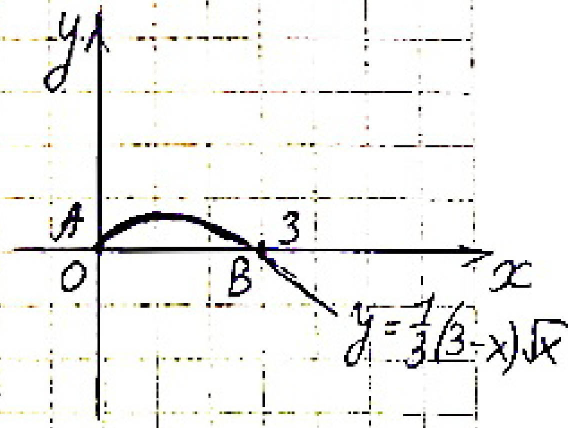
Семинар 13

Вычисление длин дуг кривых и площадей поверхности тел вращения

I. Вычисление длин дуг кривых

① (№ 6.494) Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками ее пересечения с осью Ox.

Решение.



Найдем абсциссы точек пересечения графика функции $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ с осью Ox.

$$\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 3$$

Для вычисления длины дуги используем формулу $l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

Найдем производную функции

$$y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}:$$

$$y' = \frac{1}{3}(-1)\sqrt{x} + \frac{1}{3}(3-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{-2x+3-x}{6\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}.$$

Тогда

$$\ell = \int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}}\, dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{4x+1-2x+x^2}{4x}}\, dx =$$

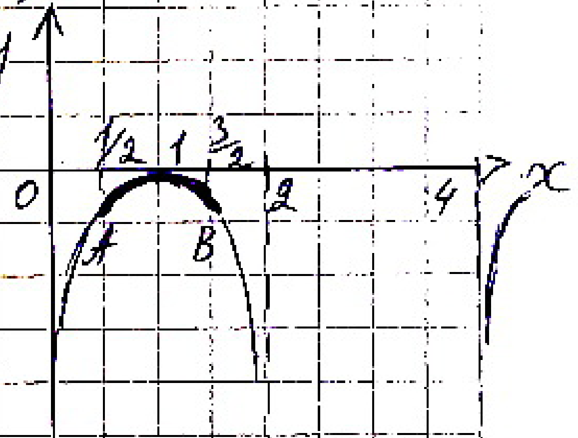
$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{x^2+2x+1}{4x}}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-0\right) =$$

$$= 2\sqrt{3}.$$

② (№ 6.500) Найти длину дуги кривой $y=\frac{2}{\pi}\ln\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$ от $x=\frac{1}{2}$ до $x=\frac{3}{2}$



Решение.

Найдем производную функции $y=\frac{2}{\pi}\ln\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$:

$$y'=\frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}=\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$$

Используем формулу

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{\frac12}^{\frac32}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}\right)^2}\,dx=$$

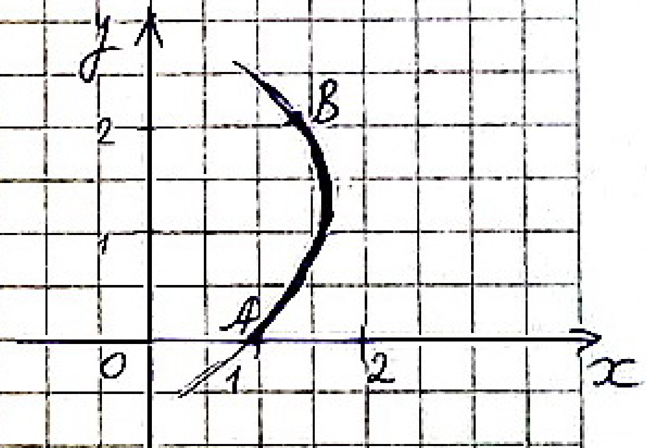
$$=\int_{\frac12}^{\frac32}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2}+1}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2}}}\,dx=\int_{\frac12}^{\frac32}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2}+1}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}\,dx=$$

$$=\int_{\frac12}^{\frac32}\frac{\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}\,dx=\int_{\frac12}^{\frac32}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}\,dx=$$

$$=\int_{\frac12}^{\frac32}\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}\,dx=\frac{2}{\pi}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right|\Bigg|_{\frac12}^{\frac32}=$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\ln\left|tg\frac{3\pi}{8}\right| - \ln\left|tg\frac{\pi}{8}\right|\right) = \frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{tg\frac{3\pi}{8}}{tg\frac{\pi}{8}}\right|$$

③ (№6.503) Найти длину дуги кривой $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$ от $t = 0$ до $t = 1$.



Решение

Для вычисления длины дуги кривой используем формулу

$$l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$$

$x = \varphi(t) = e^t\cos t$

$y = \psi(t) = e^t\sin t$

Тогда $\varphi'(t) = e^t\cos t - e^t\sin t$

$\psi'(t) = e^t\sin t + e^t\cos t$

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = (e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2 = e^{2t}(\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t) =$$

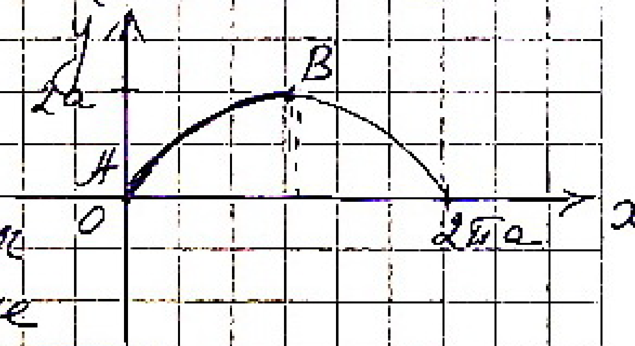
$$= e^{2t}\cdot 2.$$

Тогда длина дуги кривой равна

$$l=\int_0^1\sqrt{2e^{2t}}\,dt=\sqrt{2}\int_0^1 e^t\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\,e^t\Big|_0^1=\sqrt{2}(e-1)$$

(4) Найти длину половины первой арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.



Решение.

Половине первой арки циклоиды соответствует изменение параметра t от 0 до π.

Используем формулу $l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$

$\varphi(t)=x=a(t-\sin t)$

$\psi(t)=y=a(1-\cos t)$

Тогда $\varphi'(t)=a(1-\cos t)$

$\psi'(t)=a\sin t$

$$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2=(a(1-\cos t))^2+(a\sin t)^2=$$

$$=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)=a^2(2-2\cos t)=$$

$$=a^2 2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Длина дуги первой арки циклоиды равна

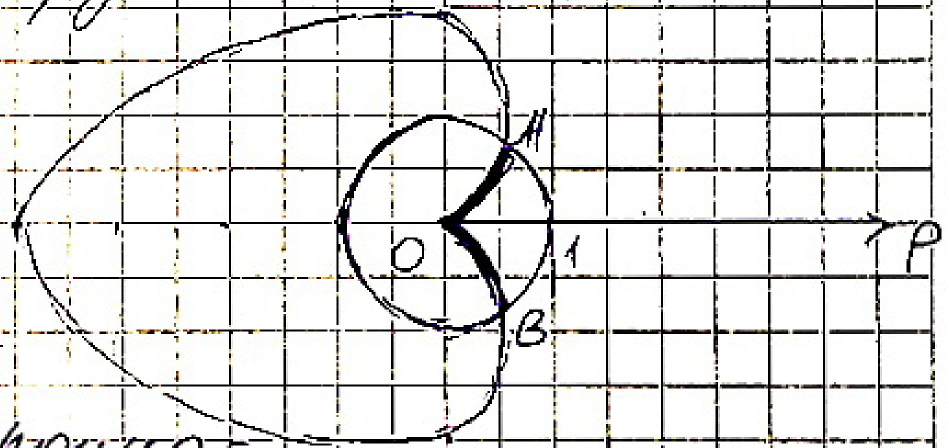
$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=2a\cdot\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=-4a\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=$$

$$=4a.$$

5 (№ 6.509) Найти длину дуги кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r=1$.

Решение



Уравнение окружности в полярной системе координат с радиусом $r=1$ имеет вид $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$.

Откуда $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \Rightarrow \underline{r=1}$.

Найдем полярный угол точек пересечения кардиоиды и окружности

$$2(1-\cos\varphi)=1$$

$$1-\cos\varphi=\frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi_1=-\frac{\pi}{3},\ \varphi_2=\frac{\pi}{3}.$$

Для вычисления длины дуги кривой в полярной системе координат используем формулу

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi$$

Найдем производную функции

$r = 2(1-\cos\varphi)$; $r' = 2 \cdot \sin\varphi$

Тогда длина дуги кардиоиды, находящейся внутри окружности $r = 1$, равна

$$l = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(2\sin\varphi)^2 + (2(1-\cos\varphi))^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4\sin^2\varphi + 4 - 8\cos\varphi + 4\cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

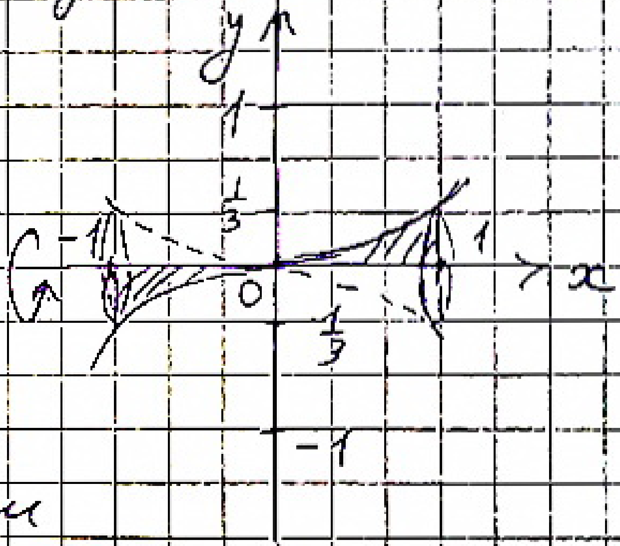
$$= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sqrt{1-\cos\varphi}}_{\text{четная функция}}\, d\varphi = 2 \cdot 2\sqrt{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 8 \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -8 \cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = -16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) =$$

$$= 16 - 8\sqrt{3}.$$

II. Вычисление площади поверхности вращения.

⑥ (№6.520) Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \frac{1}{3}x^3$ от $x = -1$ до $x = 1$.



Решение.

Тело вращения симметрично относительно оси Oy, поэтому площадь поверхности можно найти как

$S_{пов} = 2S_{1\,пов}$, где $S_{1\,пов}$ – площадь поверхности вращения правой части.

Используем формулу

$$S_{пов} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Найдем производную функции

$y = \frac{1}{3}x^3$: $y' = x^2$

Тогда

$$S_{пов} = 2S_{1пов} = 2\cdot 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}x^3\sqrt{1+(x^2)^2}\,dx =$$

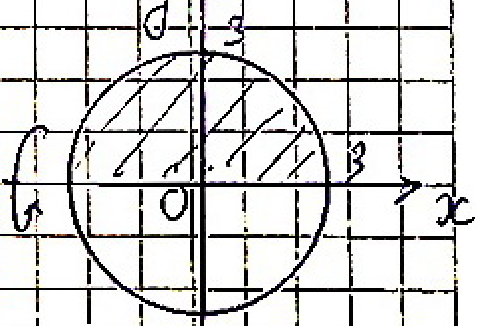
$$= \frac{4}{3}\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^4 \\ dt = 4x^3\,dx \\ x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \\ x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\pi\,\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{9}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

7. Найти площадь сферы, полученной вращением окружности $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ вокруг оси Ox.

Решение.



Сфера является поверхностью вращения верхней полуокружности, поэтому параметр t изменяется от 0 до π

Используем формулу

$$S_{пов} = \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

$\varphi(t) = x = 3\cos t$

$\psi(t) = y = 3\sin t$

Тогда $\varphi'(t) = -3\sin t$

$\psi'(t) = 3\cos t$

$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = (-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 = 9.$

Площадь сферы равна

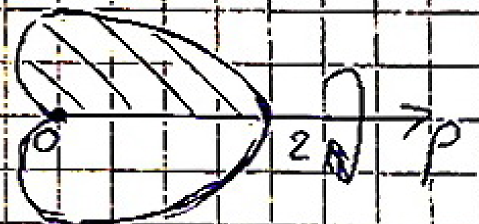
$$S_{пов} = 2\pi \int_0^{\pi} 3 \quad t \cdot \sqrt{9}\, dt = 18\pi \int_0^{\pi} \sin t\, dt =$$

$$= -18\pi \cos t \Big|_0^{\pi} = -18\pi(\cos\pi - \cos 0) =$$

$$= -18\pi(-1-1) = 36\pi$$

8) Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение.



Поверхность вращения образуется путем вращения верхней части кардиоиды при изменении полярного угла φ от 0 до π.

Используем формулу для вычисления площади поверхности вращения вокруг полярной оси (в полярной системе координат)

$$S_{пов} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi \cdot \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi$$

Т.к. $r = 1 + \cos\varphi$, то $r' = -\sin\varphi$.

$$\sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} = \sqrt{(-\sin\varphi)^2 + (1+\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi} = \sqrt{2 + 2\cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Тогда $S_{пов} = 2\pi \int_0^{\pi} \underbrace{(1+\cos\varphi)}_{=2\cos^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \overbrace{\sin\varphi}^{=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} \cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$

$$= 4\pi \int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\varphi}{2} \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 4\pi \cdot 4 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = \left| \begin{array}{l} t = \cos\frac{\varphi}{2} \\ dt = -\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi \\ \varphi_1 = 0 \to t_1 = 1 \\ \varphi_2 = \pi \to t_2 = 0 \end{array} \right| =$$

$$= -16\pi \cdot 2 \int_1^0 t^4\, dt = -32\pi \left.\frac{t^5}{5}\right|_1^0 = -\frac{32}{5}\pi(0-1) = \frac{32}{5}\pi.$$

Домашнее задание.

№ 6.495, 6.504, 6.511, 6.519(б), 6.525(а)