Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения.

Семинар 15.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение вида $g(y)dy = f(x)dx$ или

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными (функции $g(y)$, $f(x)$ непрерывны на интервалах I_2 и I_1 соответственно).

Дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \quad (1)$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными (функции $M_1(x)$, $M_2(y)$, $N_1(x)$, $N_2(y)$ - непрерывны на соответствующих интервалах)

Для решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными его нужно привести к дифференциальному уравнению с разделенными переменными.

Разделим обе части уравнения (1) на $M_2(y) \cdot N_1(x)$. В результате получим

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = 0.$$

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = - \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx. \quad (2)$$

Проинтегрируем левую часть диф. уравнения (2) по y, а правую часть по x.

$$\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = - \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx.$$

В результате получаем общее решение диф. уравнения

$y = y(x) + c$ или

общий интеграл решения

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad \text{или} \quad \varphi(x, y) = c,$$

$c = const$.

Примечание.

1. При делении диф. уравнения (1) можно „потерять" решения вида $M_2(y) = 0$, $N_1(x) = 0$. Эти функции необходимо проверять на вхождение в общее решение диф. уравнения. Если можно найти C, при котором решение входит в состав общ. решения, то потери нет. Если не входит, то это решение добавляют к общему решению.
2. В общем решении столько const, каков порядок дифференциального уравнения, определяемый порядком старшей производной.
3. Чтобы проверить правильность нахождения общего решения, его и его производную нужно подставить в исходное диф. уравнение. В результате должно получиться верное равенство.

№ 10.23 Решить диф. уравнение

$$y^2y' + x^2 = 1$$

Решение

$$y^2y' = 1 - x^2$$

Т.к. $y' = \frac{dy}{dx}$, то $y^2\frac{dy}{dx} = 1 - x^2$

Умножим обе части диф. уравнение на dx. С учетом того, что $\frac{dy}{dx}dx = y'dx = dy$, получаем

$$y^2dy = (1 - x^2)\,dx \; .$$

это диф. уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем левую часть уравнение по y, а правую по x.

$$\int y^2dy = \int(1 - x^2)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x - \frac{x^3}{3} + c \quad , c = const.$$

При нахождении неопределенных интегралов константу с добавляем в одной из частей уравнение (обычно в правой). Можно прибавить в левой части c_1, а в правой – c_2. Тогда перенеся c_1 в правую часть получаем

$c_2 - c_1 = c = const.$

Поскольку явно выразить $y = y(x)$ нельзя, то получаем общий интеграл решение.

$$\frac{y^3}{3} + \frac{x^3}{3} - x = c_1 \quad \text{или}$$

$$\underline{y^3 + x^3 - 3x = c}, \quad \text{где } c = 3c_1$$

№ 10.26 $\quad (x+1)y' + xy = 0$

<u>Решение.</u> $\quad (x+1)\frac{dy}{dx} = -xy$

Разделим переменные: (поделив обе части на $y(x+1)$) $\quad \frac{dy}{y} = -\frac{x}{x+1}dx$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{x+1}dx$$

$$\ln|y| = -\int \frac{x+1}{x+1}dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \underbrace{\ln c}_{=const}$$

$$\ln|y| = \ln e^{-x} + \ln|x+1| + \ln c$$

$$\ln|y| = \ln\left|e^{-x} \cdot (x+1) \cdot c\right|$$

$$\Rightarrow y = c \cdot e^{-x}(x+1).$$

При делении потеряли два решения: $y = 0$ при $c = 0$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ не явл. решением

$\Rightarrow y=0$ входит в общее решение.

Т. о., общее решение диф. уравнение окончательно

$$\underline{y = c \cdot e^{-x}(x+1).}$$

№10.33 $\quad 2e^{x}\,\mathrm{tg}\,y\,dx + (1+e^{x})\sec^2 y\,dy = 0$

<u>Решение.</u> $\quad (1+e^{x})\sec^2 y\,dy = -2e^{x}\,\mathrm{tg}\,y\,dx$

Разделим обе части на $\mathrm{tg}\,y\cdot(1+e^{x})$

$$\frac{\sec^2 y}{\mathrm{tg}\,y}\,dy = -\frac{2e^{x}}{1+e^{x}}\,dx$$

$$\int\frac{\sec^2 y}{\mathrm{tg}\,y}\,dy = -2\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx$$

1) $\displaystyle\int\frac{\sec^2 y}{\mathrm{tg}\,y}\,dy = \left\{\sec y = \frac{1}{\cos y}\right\} = \int\frac{1}{\mathrm{tg}\,y}\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\,dy =$

$\displaystyle= \left\{\begin{matrix} u = \mathrm{tg}\,y \\ du = \frac{1}{\cos^2 y}\,dy \end{matrix}\right\} = \int\frac{1}{u}\,du = \ln|u| + \ln C_1 =$

$= \ln|\mathrm{tg}\,y| + \ln C_1$

Если первообразная $\ln u$, то удобно в качестве константы брать $\ln C_1 = \mathrm{const}$.

2) $\displaystyle -2\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx = \left\{\begin{matrix} t = 1+e^{x} \\ dt = e^{x}\,dx \end{matrix}\right\} = -2\int\frac{1}{t}\,dt =$

$= -2\ln|t| + \ln C_2 = -2\ln|1+e^{x}| + \ln C_2$.

Тогда

$$\ln|\operatorname{tg} y| + \ln c_1 = -2\ln(1+e^x) + \ln c_2$$

$$\ln|\operatorname{tg} y| = -2\ln(1+e^x) + \ln\frac{c_2}{c_1},$$

обозначим $\ln\frac{c_2}{c_1} = \ln c$.

Тогда $\ln|\operatorname{tg} y| + 2\ln(1+e^x) = \ln c$

$\operatorname{tg} y \cdot (1+e^x)^2 = c$ — общий интеграл решения.

При делении на $\operatorname{tg} y\,(1+e^x)$ „теряются" решения.

а) $\operatorname{tg} y = 0$ при $c = 0$, поэтому оно входит в общий интеграл.

б) $1+e^x \neq 0$

Т.о., общий интеграл решения окончательно $\underline{\operatorname{tg} y \cdot (1+e^x)^2 = c}$

или общее решение $\underline{y = \operatorname{arctg}\frac{c}{(1+e^x)^2}}$.

№10.43. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$

$$(1+y^2)dx - xydy = 0$$

<u>Решение.</u> Находим общее решение диф. уравнения

$$xydy = (1+y^2)dx$$

Разделим обе части на $x\cdot(1+y^2)$.

$$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{y}{1+y^2}dy = \int\frac{1}{x}dx$$

1) $\int\frac{y}{1+y^2}dy = \left|\begin{array}{l} t=1+y^2 \\ dt=2ydy \\ ydy=\frac{1}{2}dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt =$

$= \frac{1}{2}\ln|t| + \ln c_1 = \frac{1}{2}\ln|1+y^2| + \ln c_1$

2) $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x| + \ln c_2$

Тогда $\frac{1}{2}\ln|1+y^2| + \ln c_1 = \ln|x| + \ln c_2$

$$\ln|\sqrt{1+y^2}| = \ln|x| + \ln c \quad \left(\ln c = \ln\frac{c_2}{c_1}\right)$$

$$\sqrt{1+y^2} = c\cdot x$$

$\frac{1}{x}\sqrt{1+y^2} = c$ – общий интеграл решения.

Чтобы найти частное решение диф. уравнения, необходимо найти константу c. Для этого подставим начальное условие в общее решение или общий интеграл.

Т.к. $y(1)=0$, то $\frac{1}{1}(\sqrt{1+0}) = c$
$(x=0, y=1)$

$c = 1$

Тогда частный интеграл решения

$$\frac{1}{x}\sqrt{1+y^2} = 1.$$

Примечание. При решении задачи по нахождению частного решения не надо проверять потерю решения.

№ 10.45 Найти частное решение уравнения $y' tg x = y$, удовлетворяющее начальному условию $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Решение. Найдем общее решение диф. уравнения.

$$y' tg x = y \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} tg x = y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{tg x} dx$$

1) $\int \frac{1}{tg\,x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix} \right| =$

$= \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + \ln c = \ln|\sin x| + \ln c$

Тогда $\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln c$

$y = c \cdot \sin x$ - общее решение диф. уравнения

Найдем частное решение при условии $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ $(x = \frac{\pi}{2}, y = 1)$

Подставим это условие в общее решение

$1 = c \cdot \sin\frac{\pi}{2}$, $c = 1$.

Тогда частное решение диф. уравнения имеет вид $\underline{y_{част} = \sin x}$.

Решение однородных дифферен- циальных уравнений первого порядка.

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

называется однородным дифферен- циальным уравнением, если функ- ция $f(x, y)$ является однородной нулевого измерения, т. е. $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

При решении однородного диффе- ренциального уравнения делают подстановку $u = \frac{y}{x}$ или $y = x \cdot u$ ее производную $y' = u + x \cdot u'$ в рассматриваемое дифференциаль- ное уравнение.

№10.4. $(x^2 + xy)\, y' = x \cdot \sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$

Решение. $y' = \dfrac{x \cdot \sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2}{x^2 + xy}$

Проверим является ли

функция $f(x,y) = \dfrac{x\cdot\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2}{x^2+xy}$

однородной функцией нулевого измерения.

$$f(\lambda x,\lambda y) = \frac{\lambda x\cdot\sqrt{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}+\lambda x\cdot\lambda y+(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2+\lambda x\cdot\lambda y} =$$

$$= \frac{\lambda^2 x\sqrt{x^2-y^2}+\lambda^2 xy+\lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2+\lambda^2 x y} =$$

$$= \frac{\lambda^2(x\cdot\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2)}{\lambda^2(x^2+xy)} = \frac{x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2}{x^2+xy} =$$

$$= f(x,y)$$

Т.о, функция $f(x,y)$ - однородная функция нулевого измерения. Следовательно, рассматриваемое диф. уравнение - однородное.

Для решения заменим $y = xu$, $y' = u + x\cdot u'$ в диф. уравнении

$$(x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$$

$$(x^2+x(xu))(u+x\cdot u') = x\sqrt{x^2-(xu)^2}+x(xu)+(xu)^2$$

$$x^2(1+u)(u+x\cdot u') = x^2(\sqrt{1-u^2}+u+u^2)$$

Разделим обе части уравнения на x^2.

$$(1+u)(u+x\cdot u') = \sqrt{1-u^2}+u+u^2$$

$$\cancel{u}+x\cdot u'+\cancel{u^2}+xu\cdot u' = \sqrt{1-u^2}+\cancel{u}+\cancel{u^2}$$

$$x(1+u)\cdot u' = \sqrt{1-u^2}$$

$$x(1+u)\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}$$

Разделим обе части уравнения на

$$x\cdot\sqrt{1-u^2}$$

$$\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}}du = \int\frac{1}{x}dx \qquad (2)$$

Найдем $\int\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}}du = \int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du+\int\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du=$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{во втором интеграле}\\ t=1-u^2\\ dt=-2u\,du\\ u\,du=-\frac{1}{2}dt\end{array}\right\} = \arcsin u-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=$$

$= \arcsin u - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{t} + c_1 = \arcsin u -$

$- \sqrt{1-u^2} + c_1$

Тогда решение уравнения (2) имеет вид

$$\arcsin u - \sqrt{1-u^2} + c_1 = \ln|x| + c_2$$

$$\arcsin u - \sqrt{1-u^2} - \ln|x| = c \quad , c = c_2 - c_1$$

Подставим $u = \frac{y}{x}$ (т.к. $y = xu$)

В результате получаем общий интеграл решение

$$\arcsin \frac{y}{x} - \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} - \ln|x| = c.$$

Проверим, являются решениями $x=0$ и $\sqrt{1-u^2}=0$ (т.к. делили уравнение на $x^3\sqrt{1-u^2}$)

а) $x=0$ не является решением, т.к. у $\ln|x|$, $x>0$.

б) $\sqrt{1-u^2}=0 \Rightarrow u=1$ или $u=-1$

откуда $\frac{y}{x}=1 \Rightarrow y=x$

$\frac{y}{x}=-1 \Rightarrow y=-x$

решение диф. ур-ния, т.к. они не включены в общее решение

Тогда окончательно общее решение диф. уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} \arcsin \frac{y}{x} - \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}} - \ln|x| = C \\ y = x \\ y = -x . \end{cases}$$

№ 10.54 $\quad xy' = y + x\,tg\frac{y}{x}$

<u>Решение.</u>

$$y' = \frac{y + x\,tg\frac{y}{x}}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$$

Проверим, является ли функция $f(x,y) = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$ однородной функцией нулевого измерения.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + tg\frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x} = f(x,y)$$

Следовательно, функция $f(x,y) = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$ однородная функция нулевого измерения и тогда рассматриваемое уравнение - однородное диф. уравнение.

<u>Примечание</u>. Если в уравнении есть отношение $\frac{y}{x}$, то часто это диф. уравнение - однородное.

Подставим $u=\frac{y}{x}$ или $y=x\cdot u$,

$y'=u+x\cdot u'$ в диф. уравнение

$$y'=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}:$$

$$u+x\cdot u'=u+tg\,u$$

$$xu'=tg\,u \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx}=tg\,u,$$

$$x\,du=tg\,u\,dx$$

Разделим обе части на $x\cdot tg\,u$

$$\frac{1}{tg\,u}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{tg\,u}du=\int\frac{1}{x}dx;\quad \int\frac{\cos u}{\sin u}du=\int\frac{1}{x}dx,$$

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln c$$

$$\sin u=c\cdot x$$

$$u=\arcsin c\cdot x$$

Сделаем обратную замену $u=\frac{y}{x}$

$\frac{y}{x}=\arcsin c\cdot x$, $y=x\cdot\arcsin cx$ – общее решение диф. уравнения.

Проверим, является ли решением

$tg\,u=0 \Rightarrow u=\pi k$ или $\frac{y}{x}=\pi k$, $k\in Z$

$\Rightarrow y=\pi k\cdot x$ – является решением.

Т.о. окончательно общим решением являются $\begin{cases} y=x\cdot\arcsin cx \\ y=\pi kx, & k\in Z \end{cases}$

№ 2772. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$

Решение.

$$y\,dx = (2\sqrt{xy} - x)\,dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2\sqrt{xy} - x}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = 2\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}$$

Проверим, является ли функция $f(x,y) = 2\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y})$ однородной функцией нулевого измерения:

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\sqrt{\frac{\lambda x}{\lambda y}} - \frac{\lambda x}{\lambda y} = 2\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y} = f(x,y)$$

Т.о., функция $f(x,y) = 2\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}$ является однородной функцией нулевого измерения и тогда диф. уравнение является однородным.

Сделаем замену $u = \frac{x}{y}$ или $x = y\cdot u$, $x' = u + y\cdot u'$ в диф. уравнении

$x' = 2\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y}$: $\quad u + yu' = 2\sqrt{u} - u$; $u' = \frac{du}{dy}$

$$yu' = 2\sqrt{u}, \quad y\frac{du}{dy} = 2\sqrt{u}$$

Разделим обе части на $2y\sqrt{u}$

$$\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{y}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int\frac{1}{y}\,dy$$

$$\sqrt{u} = \ln|y| + \ln c$$

$$\sqrt{u} = \ln|c\cdot y|$$

$$u = \ln^2|cy|$$

Сделаем обратную замену $u = \frac{x}{y}$.

$$\frac{x}{y} = \ln^2|cy|$$

Тогда $\underline{x = y\ln^2|cy|}$ – общее решение уравнение.

Функции $u = 0$ и $y = 0$ – входят в общее решение.
$\Downarrow$
$\frac{x}{y} = 0,\ x = 0$

(делили на $y\sqrt{u}$)

Домашнее задание.

Сборник задач по математике для ВТУЗов. Часть 2. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.

№ 10.24, 10.36, 10.44, 10.47, 10.53, 10.66.