Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения.

Семинар 16.

Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнения вида $y' + P(x)y = Q(x)$ называются линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Для решения такого дифференциального уравнения применяют метод вариации постоянной (метод Лагранжа) или метод Бернулли.

№ 10.67 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение, где $2x = P(x)$
$xe^{-x^2} = Q(x)$.

1) Решим диф. уравнение методом вариации постоянной.

Вначале решим однородное диф. уравнение $y' + 2xy = 0$

$y' = -2xy$, $\frac{dy}{dx} = -2xy$, $\frac{dy}{y} = -2x\,dx$

$\int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx$

$\ln|y| = -x^2 + \ln c$

$y = c \cdot e^{-x^2}$.

Заменим константу c на функцию $c(x)$:

$$y = c(x)\, e^{-x^2}, \qquad (3)$$

Подставим эту функцию и ее производную $y' = c'(x)e^{-x^2} + c(x)e^{-x^2}\cdot(-2x)$ в исходное диф. уравнение:

$$c'(x)e^{-x^2} + c(x)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) + c(x)e^{-x^2}\cdot 2x = $$
$$= x\cdot e^{-x^2}$$

$c'(x)e^{-x^2} = x\,e^{-x^2}$

$c'(x) = x$ или $\frac{dc(x)}{dx} = x$, $dc(x) = x\,dx$

$\int dc(x) = \int x\,dx$, $c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$, $c_1 = const$

Подставим $c(x)$ в уравнение (3)

$y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)\cdot e^{-x^2}$ – общее решение диф. уравнения.

2) Найдем решение диф. уравнения методом Бернулли.

Найдем решение в виде $y = u\cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Подставим $y = u \cdot v$ и производную $y' = u'v + u \cdot v'$ в исходное диф. уравнение

$$u'v + u \cdot v' + 2x\,u\,v = x\,e^{-x^2}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем u за скобку

$$u'v + u(v' + 2xv) = x\,e^{-x^2} \qquad (4)$$

Найдем функцию $v = v(x)$ такую, чтобы $v' + 2xv = 0$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv \;, \quad \frac{dv}{v} = -2x\,dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int x\,dx \;, \quad \ln|v| = -2\frac{x^2}{2};\ \ln|v| = -x^2$$

При нахождении $v = v(x)$ можно не добавлять константу (т. е. полагаем $c = 0$)

Тогда $\underline{v = e^{-x^2}}$.

Подставим $v = e^{-2x}$ в (4) и учтем, что $v' + 2xv = 0$:

$$u' \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$u' = x \;, \quad \frac{du}{dx} = x \;, \quad du = x\,dx$$

$$\int du = \int x\,dx \;, \quad \underline{u = \frac{x^2}{2} + c}\,, \quad c = const$$

Тогда $\underline{y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + c\right) \cdot e^{-x^2}}$ — общее решение диф. уравнения

№ 10.78 $xy' + x^2 + xy = y$

Решение. Запишем диф. уравнение в виде $xy' + xy - y = -x^2$

$$xy' + (x-1)y = -x^2$$

Разделим обе части на x

$$y' + \frac{x-1}{x}y = -x \quad (5)$$

– это линейное дифференциальное уравнение первого порядка ($\frac{x-1}{x} = P(x)$, $-x = Q(x)$)

Решим диф. уравнение методом вариации постоянной.

Вначале найдем решение однородного уравнения $y'' + \frac{x-1}{x}y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{x}y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x-1}{x}dx$$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x-1}{x}dx$, $\int \frac{1}{y}dy = -\int dx + \int \frac{1}{x}dx$

$\ln|y| = -x + \ln|x| + \ln c$

$y = c \cdot x e^{-x}$

Заменим константу c на функцию $c(x)$: $y = c(x) \cdot x \cdot e^{-x}$ (6)

Подставим эту функцию и ее производную

$$y' = c'(x)\,x\,e^{-x} + c(x)\left(e^{-x} - x\cdot e^{-x}\right)$$ в

диф. уравнение (5)

$$c'(x)\,x\,e^{-x} + c(x)\left(e^{-x} - x\,e^{-x}\right) + \frac{x-1}{x}\,c(x)\,x\,e^{-x} = -x$$

$$c'(x)\,x\,e^{-x} + c(x)\cdot e^{-x}(1-x) + (x-1)\cdot c(x)\,e^{-x} = -x$$

$$c'(x)\,x\,e^{-x} = -x \quad , \quad c'(x)\,e^{-x} = -1$$

$$c'(x) = -e^{x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = -e^{x}$$

$$dc(x) = -e^{x}dx$$

$$\int dc(x) = -\int e^{x}dx$$

$$c(x) = -e^{x} + c_1, \quad c_1 = const$$

Подставим $c(x)$ в выражение (6)

$$y = (-e^{x} + c)\cdot x\cdot e^{-x}$$

$y = -x + c\,x\,e^{-x}$ или $\underline{y = x(c\cdot e^{-x} - 1)}$ - общее решение диф. уравнения

№ 10.84. Найти частное решение диф. уравнения $y' = 2y + e^{x} - x$, удовлетворяющее начальному решению $y(0) = \frac{1}{4}$.

Решение. Запишем диф. уравнение в виде $y' - 2y = e^x - x$ – линейное диф. уравнение первого порядка ($-2 = P(x)$, $e^x - x = Q(x)$)

Найдем решение этого диф. уравнения методом Бернулли.

Будем искать решение в виде

$y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

$y' = u'v + u \cdot v'$.

Подставим $y = u \cdot v$ и ее производную в диф. уравнение

$$u'v + u \cdot v' - 2uv = e^x - x$$

$$u'v + u(v' - 2v) = e^x - x . \quad (7)$$

Найдем функцию $v = v(x)$ такую, чтобы $v' - 2v = 0$, $\frac{dv}{dx} = 2v$, $\frac{dv}{v} = 2dx$

$\int \frac{dv}{v} = 2\int dx$, $\ln|v| = 2x$, $\underline{v = e^{2x}}$.

(с не добавляем)

Подставим $v = e^{2x}$ в уравнение (7) и с учетом $v' - 2v = 0$ получаем

$u' e^{2x} = e^x - x$

$\frac{du}{dx} e^{2x} = e^x - x$, $du = (e^{-x} - xe^{-2x})dx$

$\int du = \int (e^{-x} - xe^{-2x})dx$; $\int du = \int e^{-x}dx - \int xe^{-2x}dx$

а) $\int x e^{-2x} dx = \left| \begin{matrix} \tilde{u} = x, & d\tilde{u} = dx \\ d\tilde{v} = e^{-2x} dx, & \tilde{v} = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{matrix} \right| =$

$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c,$

$c = const$

Тогда $u = -e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + c$

Следовательно,

$y = u \cdot v = (-e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + c) \cdot e^{2x}$

$y = -e^{x} + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + c \cdot e^{2x}$ – общее решение диф. ур-ния.

Найдем частное решение, подставив начальное условие $y(0) = \frac{1}{4}$ в общее решение.

$\frac{1}{4} = -e^{0} + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} + c \cdot e^{0}$

$\frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4} + c \quad \Rightarrow c = 1$

Тогда частное решение диф. уравнения

$y_{част} = -e^{x} + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + e^{2x}$

Решение уравнения Бернулли.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

называется уравнением Бернулли.

Методы решения уравнения Бернулли такие же, как и методы решения линейного диф. уравнения первого порядка (метод вариации постоянной и метод Бернулли)

№ 10.89 $\qquad y' = y\,ctg\,x + \frac{y^3}{\sin x}$

Решение. Перепишем диф. уравнение в виде $\quad y' - y\,ctg\,x = \frac{y^3}{\sin x}$. (8)

Это уравнение Бернулли
$\left(P(x) = -ctg\,x,\ Q(x) = \frac{1}{\sin x},\ \alpha = 3\right)$.

Найдем решение диф. уравнения методом Бернулли.

Будем искать решение в виде $y = u\cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Подставим $y = u\cdot v$ и производную $y' = u'v + u\cdot v'$ в диф. уравнение

$$u'v + u\cdot v' - u\cdot v\,ctg\,x = \frac{(uv)^3}{\sin x}$$

$$u'v + u(v' - v\,ctg\,x) = \frac{(uv)^3}{\sin x} \qquad (9)$$

Найдём функцию $v = v(x)$ такую, что $v' - v\,ctg\,x = 0$.

$v' = v\,ctg\,x$ или $\frac{dv}{dx} = v\,ctg\,x$

$\frac{dv}{v} = ctg\,x\,dx$; $\int \frac{dv}{v} = \int ctg\,x\,dx$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$\ln|v| = \ln|\sin x|$ (константу c не добавляем)

$\underline{v = \sin x}$

Подставим $v = \sin x$ в уравнение (9). С учётом $v' - v\,ctg\,x = 0$ получаем

$$u' \sin x = \frac{u^3 \sin^3 x}{\sin x}$$

$$u' = u^3 \sin x$$

$\frac{du}{dx} = u^3 \sin x$, $\frac{du}{u^3} = \sin x\,dx$

$\int \frac{du}{u^3} = \int \sin x\,dx$, $-\frac{1}{2u^2} = -\cos x + c$, $c = const$

$\frac{1}{2u^2} = \cos x - c$, $\underline{u = \frac{1}{\sqrt{2(\cos x - c)}}}$

Тогда $\underline{y = u \cdot v = \frac{\sin x}{\sqrt{2(\cos x - c)}}}$ - общее решение уравнения Бернулли.

№ 10.92 $xy' + y = 2x^2 y \ln y \cdot y'$

Решение. Запишем диф. уравнение в виде $y = (2x^2 y \ln y - x) y'$.

Учитывая, что $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, получаем

$y = (2x^2 y \ln y - x) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Тогда

$\frac{dx}{dy} y = 2x^2 y \ln y - x$. Разделим обе части на y.

$\frac{dx}{dy} = 2x^2 \ln y - \frac{x}{y}$; $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y} x = 2x^2 \ln y$ (10) – это уравнение Бернулли вида

$x' + P(y)x = Q(y)x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$

$\left(P(y) = \frac{1}{y}, Q(y) = 2 \ln y, \alpha = 2\right)$

Найдем решение методом Бернулли. Будем искать решение в виде $x = u \cdot v$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$.

Подставляем $x = u \cdot v$ и производную $x' = u'v + u \cdot v'$ в диф. уравнение (10).

$u'v + uv' + \frac{1}{y} uv = 2(u \cdot v)^2 \ln y$,

$u'v + u\left(v' + \frac{1}{y} v\right) = 2u^2 v^2 \ln y$, (11) Найдем функцию $v = v(y)$ так, чтобы

$v' + \frac{1}{y} v = 0$.

$\frac{dv}{dy} = -\frac{v}{y}$, $\frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}$, $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y}$

$\ln|v| = -\ln|y| \Rightarrow \underline{v = \frac{1}{y}}$

Подставим $v = \frac{1}{y}$ в диф. уравнение (11).
Тогда с учетом $v' + \frac{1}{y} v = 0$ получаем

$u' \frac{1}{y} = 2u^2 \cdot \frac{1}{y^2} \ln y$, $\frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{y} = 2u^2 \frac{1}{y^2} \ln y$

$\frac{du}{u^2} = 2\frac{1}{y} \ln y \, dy$; $\int \frac{du}{u^2} = 2\int \frac{\ln y}{y} dy$ (12)

Найдем $\int \frac{\ln y}{y} dy = \left| \begin{matrix} t = \ln y \\ dt = \frac{1}{y} dy \end{matrix} \right| = \int t\,dt =$

$= \frac{t^2}{2} + c =$, $c = const$

$= \frac{\ln^2 y}{2} + c$.

С учетом этого решение диф. уравнения (12) будет иметь вид

$-\frac{1}{u} = \ln^2 y + 2c$, $\underline{u = -\frac{1}{\ln^2 y + 2c}}$

Тогда $x = u \cdot v = -\frac{1}{\ln^2 y + 2c} \cdot \frac{1}{y}$

или $xy(\ln^2 y + 2c) = -1 \Rightarrow$

$xy(\ln^2 y + 2c) + 1 = 0$ — общий интеграл уравнение Бернулли.

Найдем частный интеграл уравнения, удовлетворяющий начальному условию $y(1) = e$.

Подставим в общий интеграл $x = 1$, $y = e$:

$$1 \cdot e(\underbrace{\ln^2 e}_{=1} + 2c) + 1 = 0$$

$$2ce = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2e}$$

Тогда подставим $c = -\frac{1}{2e}$ в общий интеграл:

$xy\left(\ln^2 y - \frac{1}{e}\right) + 1 = 0$ — частный интеграл уравнение Бернулли.

Домашнее задание.

Сборник задач по математике для ВТУЗов. Часть 2. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.

№10.71, 10.75, 10.80, 10.87, 10.94