Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Семинар 17.

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка.

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется диф. уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ или}$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \text{ где}$$

x – аргумент,
$y = y(x)$ – неизвестная (искомая) функция.

Общим решением диф. уравнения n-го порядка называется функция

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \text{ где } c_i = const$$
$$i = 1, \dots, n$$

(констант такое количество, каков порядок диф. уравнения).

Общим интегралом решения диф. уравнения n-го порядка называется функция в неявном виде $\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = C$

Виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

I $\quad y^{(n)} = f(x)$ – диф. уравнение не содержащее явно функцию y и производные до $(n-1)$-го порядка.

Общее решение диф. уравнения может быть получено путем n раз последовательных интегрирований обеих частей уравнения.

II. Диф. уравнение не содержит явно функцию y и ее производные до $(n-2)$ порядка.

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0.$$

Для решения диф. уравнения этого вида делают замену: $y^{(n-1)} = p(x)$,

$$y^{(n)} = p'(x).$$

Частный случай – диф. уравнение 2го порядка $\quad F(x, y', y'') = 0$

Для решения диф. уравнения делаем замену: $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$.

III. Диф. уравнение не содержит явно аргумент x $\quad F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$

Для решения диф. уравнения этого типа делают замену:

$$y' = p(y) \quad ; y'' = \frac{dp(y)}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p(y)} = p(y)\cdot\frac{dp(y)}{dy},$$

т. е. $y'' = p\cdot\frac{dp}{dy}$, $p = p(y)$

$$y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$ и т. д.

<u>Частный случай</u> – диф уравнение $2^{го}$ порядка

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Для решения диф. уравнения делаем замену $y' = p(y)$, $y'' = p(y)\frac{dp}{dy}$.

IV. Дифференциальное уравнение однородное относительно функции и ее производных

$$F(x, ty, ty', \dots, t y^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \quad t \neq 0$$

Для решения диф. уравнения этого вида делают замену $y' = yz$ и т. д. В результате порядок диф. уравнения понижается на единицу.

№ 10.212. $y'' = x + \sin x$. (1)

Решение. Это диф. уравнение I типа.

Учитыва, что $y''dx = d(y')$; $\int y''dx = \int d(y') = y' + c$

Тогда умножим обе части диф. уравнение (1) на dx и проинтегрируем

$$\int y''dx = \int (x + \sin x)\,dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 \quad , C_1 = const \qquad (2)$$

Учитываем, что $\int y'dx = \int dy = y + c$.

Умножим диф. уравнение (2) на dx и проинтегрируем

$$y'dx = \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1\right) dx$$

$$\int y'dx = \int\left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1\right) dx$$

$$\underline{y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2}$$ – общее решение диф. уравнение.

№ 10.214 $xy''' = 2x + 3$. – это диф. уравнение I типа

Решение Запишем диф. уравнение в виде $y''' = 2 + \frac{3}{x}$.

Проинтегрируем обе его части 3 раза.

$$\int y''' dx = \int \left(2 + \frac{3}{x}\right) dx$$

$$y'' = 2x + 3\ln|x| + c_1$$

$$\int y'' dx = \int (2x + 3\ln|x| + c_1) dx$$

$$\int \ln x \, dx = \begin{cases} u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \to v = x \end{cases} =$$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + c_2$$

Тогда $y' = x^2 + 3x\ln x - 3x + c_1 x + c_2$

$$\int y' dx = \int (x^2 + 3x\ln x - 3x + c_1 x + c_2) dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$$

или $\underline{y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 \ln x - \frac{9}{4}x^2 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3}$ – общее решение

$$\int x \ln x \, dx = \begin{cases} u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x\,dx \to v = \frac{x^2}{2} \end{cases} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c_3$$

<u>№ 10.218</u> $xy'' - y' = e^x x^2$ – это диф. уравнение вида II т.к. не содержит явно функцию y.

<u>Решение</u> Сделаем замену

$$y' = p, \; p = p(x), \; y'' = p'$$

Тогда получаем

$$xp' - p = e^x x^2.$$

Разделим обе части уравнения на x, $x \neq 0$

(2) $p' - \frac{1}{x} p = e^x x$ - это линейное диф. уравнение первого порядка.

Решим уравнение методом Бернулли.

Будем искать решение диф. уравнения в виде $p = u \cdot v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$,

$$p' = u'v + u \cdot v'.$$

Подставим $p = u \cdot v$ и производную в диф. уравнение (2)

$$u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = e^x x$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x} v\right) = e^x x. \qquad (3)$$

Найдем функцию $v = v(x)$ такую, что

$$v' - \frac{1}{x} v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x| \quad \text{(константу } c \text{ не добавляем)}$$

$$\underline{v = x}$$

Подставим $v = x$ в диф. уравнение (3). С учетом $v' - \frac{1}{x} v = 0$ получаем

$$u'x = e^x x, \quad u' = e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x,$$

$du = e^x dx$

$\int du = \int e^x dx$

$u = e^x + c$, $c = const$.

Тогда $p = u \cdot v = (e^x + c)x$

Т.к. $p = y'$, то $y' = xe^x + cx$

Это диф. уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = xe^x + cx, \quad dy = (xe^x + cx)dx$$

$$\int dy = \int (xe^x + cx)dx \qquad (4)$$

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} = x \to d\tilde{u} = dx \\ d\tilde{v} = e^x dx \to \tilde{v} = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_1$$

Тогда из (4) получаем

$$y = xe^x - e^x + \frac{c}{2}x^2 + C_1$$

можно заменить $\frac{c}{2} = C_2$.

Тогда $\underline{y = xe^x - e^x + C_2 x^2 + C_1}$, $C_1, C_2 = const$

- общее решение диф. уравнения.

Мы делили на x обе части диф. уравнения, поэтому могли потерять решение.

при $x = 0$ $y = \underbrace{C_1 - 1}_{const}$ — это решение входит в общее решение, поэтому $x = 0$ не добавляем

№ 10.223 $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ - это дифф. уравнение типа II, т.к. не содержит явно функцию y

Решение. Сделаем замену

$$y' = p, \ p = p(x)$$
$$y'' = p'.$$

Тогда $xp' = p \ln \frac{p}{x}$.

Запишем это дифф. уравнение в виде

$$p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x} \qquad (5)$$

Проверим, является ли функция $f(x,p)$ - однородной функцией нулевого измерения.

$$f(\lambda x, \lambda p) = \frac{\lambda p}{\lambda x} \cdot \ln \frac{\lambda p}{\lambda x} = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x} = f(x,p).$$

Следовательно, $f(x,p)$ - однородная функция нулевого измерения и, значит, дифф. уравнение (5) - однородное дифф. уравнение 1го порядка.

Найдем решение уравнения (5) в виде $u = \frac{p}{x}$ или $p = u \cdot x$; $p' = u + xu'$.

Подставим $u = \frac{p}{x}$ и производную в (5)

$$u + xu' = u \ln u$$
$$xu' = u \ln u - u$$
$$xu' = u(\ln u - 1)$$

- это дифф. уравнение с разделяющимися переменными

Разделим обе части диф. уравнение на $x \cdot u(\ln u - 1) \neq 0$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

1) $\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln u - 1 \\ dt = \frac{1}{u} du \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c =$

$= \ln|\ln u - 1| + c$

Тогда $\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|c_1|$

$$\ln u - 1 = c_1 x$$

$$\ln u = c_1 x + 1$$

$$u = e^{c_1 x + 1}, \quad \underline{u = e \cdot e^{c_1 x}}$$

Далее $p = x \cdot u = x \cdot e \cdot e^{c_1 x}$.

Т.к. $p = y'$, то $y' = x e \cdot e^{c_1 x}$

$$\frac{dy}{dx} = e \cdot x \cdot e^{c_1 x}, \quad dy = e x e^{c_1 x} dx$$

$$\int dy = e \int x e^{c_1 x} dx$$

1) $\int x e^{c_1 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} = x \to d\tilde{u} = dx \\ d\tilde{v} = e^{c_1 x} dx \to v = \int e^{c_1 x} dx = \frac{1}{c_1} e^{c_1 x} \end{array} \right\}$

$= x \cdot \frac{1}{c_1} e^{c_1 x} - \frac{1}{c_1} \int e^{c_1 x} dx = \frac{1}{c_1} x e^{c_1 x} - \frac{1}{c_1^2} e^{c_1 x} + c_2$

Тогда $y = e\left(\frac{1}{c_1} x e^{c_1 x} - \frac{1}{c_1^2} e^{c_1 x} + c_2\right)$ - общее решение диф. уравнения

Мы делили обе части дифф. уравнения на $x \cdot u(\ln u - 1)$.

Проверим, „потеряно" ли решение.

1) $x \neq 0$, т.к. тогда $\frac{p}{x} = u$ не существует

2) $u \neq 0$, т.к. $\ln u$ не существует, если $u = 0$.

3) $\ln u - 1 = 0 \Rightarrow \ln u = 1$, $u = e$.

тогда $p = e \cdot x$ или $y' = ex$

$\frac{dy}{dx} = e \cdot x$; $dy = ex\,dx$

$\int dy = e \int x\,dx$

$y = e \cdot \frac{x^2}{2} + C_3$ –

– решение дифф. уравнения. Добавим его к общему решению.

Окончательно, решение дифф. уравнения

$$\begin{cases} y = \frac{e}{C_1} x e^{C_1 x} - \frac{e}{C_1^2} e^{C_1 x} + \underbrace{eC_2}_{= C_4} \\ y = \frac{e}{2} x^2 + C_3 \end{cases}$$

№ 10.219. $2yy'' = 1 + (y')^2$ – это дифф. уравнение типа III, т.к. не содержит явно аргумент x.

Решение. Сделаем замену

$y' = p$, $p = p(y)$

$y'' = p \frac{dp}{dy}$.

$$2p\frac{dp}{dy}y = 1+p^2$$ – это диф. уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим обе части уравнения на $y\cdot(1+p^2)\neq 0$

$$\frac{2p}{1+p^2}dp = \frac{dy}{y}\ ;\ \int\frac{2p}{1+p^2}dp = \int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|1+p^2| = \ln|y| + \ln c$$

$$1+p^2 = cy\ ,\ p = \sqrt{cy-1}\ .$$

Т.к. $p = y'$, то $y' = \sqrt{cy-1}\ ;\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{cy-1}$

Делим на $\sqrt{cy-1}\neq 0$

$$\frac{dy}{\sqrt{cy-1}} = dx\ ;\ \int\frac{dy}{\sqrt{cy-1}} = \int dx$$

$$\frac{2}{c}\sqrt{cy-1} = x + C_1$$

$$\frac{4}{c^2}(cy-1) = (x+c_1)^2$$

$$cy = \frac{c^2}{4}(x+c_1)^2 + 1$$

$$\underline{y = \frac{c}{4}(x+c_1)^2 + \frac{1}{c}}$$ – общее решение диф. уравнения

Т.к. делим на $y(1+p^2)$ и на $\sqrt{cy-1}$, то проверим, не „потеряем" ли решение.

1) $1+p^2\neq 0$

2) $y = 0$ $\Big\}$ входят в общее решение, потому

3) $y = \frac{1}{c}$ $\Big\}$ их не добавляем к общ. решению.

№ 10.235 $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$ – это диф уравнение типа III, т.к. не содержит явно аргумент x.

Решение. Сделаем замену $y' = p$, $p = p(y)$

$$y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

$$p\frac{dp}{dy}\operatorname{tg} y = 2p^2$$

Разделим на $p^2 \neq 0$

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{\operatorname{tg} y} \qquad \int\frac{dp}{p} = 2\int\frac{\cos y}{\sin y}dy$$

$$\ln|p| = 2\ln|\sin y| + \ln c$$

$$p = c\cdot\sin^2 y.$$

Т.к. $p = y'$, то $y' = c\sin^2 y$, $\frac{dy}{dx} = c\sin^2 y$

$$dy = c\sin^2 y\, dx$$

$$\int\frac{dy}{\sin^2 y} = c\int dx$$

$$-\operatorname{ctg} y = cx + c_1$$

$$\operatorname{ctg} y = -cx - c_1$$

Обозначим $-c = c_2$, $-c_1 = c_3$.

Тогда $\operatorname{ctg} y = c_2 x + c_3$

$y = \operatorname{arcctg}(c_2 x + c_3)$ – общее решение.

Т.к. делили на p^2, то при $p = 0 \to y' = 0 \to$ $y = c_4$ – добавим к общ. решению.

Окончательно, решение диф. уравнения:

$$\begin{cases} y = \operatorname{arcctg}(C_2 x + C_3) \\ y = C_4 \end{cases}, \quad C_2, C_3, C_4 = const$$

<u>№10.252.</u> Найти частное решение диф. уравнения $y \cdot y'' - (y')^2 = y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

<u>Решение.</u> Найдем общее решение диф. уравнения $y \cdot y'' - (y')^2 = y^2$.

Это диф. уравнение $\underline{II}$ типа, т.к. не содержит явно аргумент x.

Сделаем замену $y' = p$, $p = p(y)$

$$y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Тогда $yp \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 = y^2$.

Разделим на $y \cdot p \neq 0$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p = \frac{y}{p} \quad (6)$$ — это уравнение Бернулли.

Решим уравнение методом Бернулли.

Будем искать решение в виде $p = u \cdot v$, $u = u(y)$, $v = v(y)$; $p' = u'v + u \cdot v'$.

Тогда диф. уравнение (6) будет иметь вид

$$u'v + uv' - \frac{1}{y}uv = \frac{y}{u \cdot v}$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{y}v\right) = \frac{y}{u \cdot v} \qquad (7)$$

Найдем функцию $v = v(y)$ такую, что

$$v' - \frac{1}{y}v = 0, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y}; \quad \ln|v| = \ln|y|, \quad \underline{v = y}$$

Подставим $v = y$ в уравнение (7).
С учетом $v' - \frac{1}{y}v = 0$ получаем

$$u'y = \frac{y}{uy}, \quad u'y = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{uy}$$

$$u\,du = \frac{1}{y}\,dy, \quad \int u\,du = \int \frac{1}{y}\,dy$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln|y| + c_1$$

$$\underline{u = \sqrt{2(c_1 + \ln|y|)}}$$

Тогда $p = u \cdot v = y \cdot \sqrt{2(c_1 + \ln|y|)}$
Т.к. $p = y'$, то

$$(8) \quad \underline{y' = y\sqrt{2(c_1 + \ln|y|)}}, \quad \frac{dy}{dx} = y\sqrt{2c_1 + 2\ln|y|}$$

$$\frac{dy}{y \cdot \sqrt{2c_1 + 2\ln|y|}} = dx, \quad \int \frac{dy}{y \cdot \sqrt{2c_1 + 2\ln y}} = \int dx$$

1) $\int \frac{dy}{y\sqrt{2c_1+2\ln y}} = \left\{ \begin{array}{l} t=2c_1+2\ln y \\ dt=2\frac{1}{y}dy \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt =$

$= \frac{2}{2}\sqrt{t} + c_2 = \frac{2}{2}\sqrt{2c_1+2\ln y} + c_2 = \sqrt{2c_1+2\ln y} + c_2$

тогда решение диф. уравнение

$$\sqrt{2(c_1+\ln|y|)} = x + c_3 \qquad (10)$$

$$2c_1 + 2\ln|y| = (x+c_3)^2$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}(x+c_3)^2 - c_1$$

$$(9) \qquad \underline{y = e^{\frac{1}{2}(x+c_3)^2 - c_1}} \text{ - общее решение диф. уравнение}$$

Найдем частное решение, подставив начальное условие $y(0)=1$ и $y'(0)=0$ в выражение (8) и (9), а лучше в (8) и (10)

$$\begin{cases} 0 = 1\cdot\sqrt{2(c_1+\ln 1)} \\ 1 = e^{\frac{1}{2}(0+c_3)^2 - c_1} \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} 0 = 1\sqrt{2(c_1+\ln 1)} \\ \sqrt{2(c_1+\ln 1)} = 0 + c_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_1 = 0 \\ 0 = 0 + c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Подставим $c_1=0$, $c_3=0$ в общее решение: $\underline{y = e^{\frac{x^2}{2}}}$ - частное решение

Домашнее задание

№10.213, 10.217, 10.220, 10.222, 10.250, 10.251