Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения

Семинар 19.

Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

I. Исследовать на линейную зависимость системы функций:

№ 10.286. $y_1 = x$, $y_2 = \ln x$.

Решение. Составим определитель Вронского
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Если система функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ линейно зависима, то определитель Вронского равен 0 на интервале I, на котором определены функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$.

Если хотя бы в одной точке $x_0 \in I$ $W(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – линейно независимая на I.

Для системы функций $y_1 = x$ и $y_2 = \ln x$
$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln x = 1 - \ln x.$$

Т. к. есть точка x_0 из области определения функции $y = \ln x$: $D_f : (0; +\infty)$, в котором $W(x_0) = 1 - \ln(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1 = x$ и $y_2 = \ln x$ - линейно независимая.

<u>№ 10.293</u> $\quad y_1 = e^x, \; y_2 = e^{x+1}$

<u>Решение</u>. Составим определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{x+1} \\ e^x & e^{x+1} \end{vmatrix} = 0$$

Т. к. $W(x) = 0$, то система функций $y_1 = e^x$ и $y = e^{x+1}$ - линейно зависимая.

<u>№ 10.295</u>. $\quad y_1 = 1, \; y_2 = \sin x, \; y_3 = \cos 2x$

<u>Решение</u>. Составим определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_2'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos 2x \\ 0 & \cos x & -2\sin 2x \\ 0 & -\sin x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = -4\cos x \cos 2x -$$

$$-2\sin x \sin 2x = -4(\cos x\,(2\cos^2 x - 1) + \sin^2 x \cos x) =$$

$$= -4\cos x\,(2\cos^2 x - 1 + \sin^2 x) = -4\cos x \cdot \cos x =$$

$= -4\cos^2 x$.

Т.к. есть точка x_0 из области определение функции $y = \cos x$, такое что $W(x_0) = -4\cos^2 x_0 \neq 0$, то система функций $y_1 = 1$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = \cos 2x$ – линейно независимое.

(II) Найти общие решения дифференциальных уравнений.

<u>№ 10.322</u> $y'' - 6y' + 13y = 0$

<u>Решение</u> Составим характеристическое уравнение.
Производной y'' соответствует k^2, производной y' соответствует k, функции $y = y^{(0)}$ соответствует $k^0 = 1$.
(Каков порядок производной, такова степень у k).
Тогда характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 6k + 13 = 0$.

Найдем корни характеристического уравнения: $D = 36 - 52 = -16$

$$k_1 = \frac{6 + \sqrt{-16}}{2} = 3 + 2i,$$

$$k_2 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} = 3 - 2i.$$

Т.к. корни характеристического уравнения комплексные сопряженные кратности $r = 1$, то общее решение диф. уравнение будет иметь вид

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Т.к. $k_1 = 3+2i \; (= \alpha + i\beta)$, то $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

Тогда общее решение диф. уравнения

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x),$$

$c_1, c_2 = \text{const}$

№ 10.326 $\quad 4y'' + 4y' + y = 0$

Решение. Составим характеристическое уравнение

y'' соответствует k^2

y' — k

y — 1

Тогда $\quad 4k^2 + 4k + 1 = 0 \quad (1)$

$$(2k+1)^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнение (1) $k_1 = -\frac{1}{2}$ и $k_2 = -\frac{1}{2}$, т.е. $k = -\frac{1}{2}$ кратности $r = 2$.

Т.к. корень $k = -\frac{1}{2}$ характеристического уравнения имеет кратность $r = 2$, то общее решение диф.

уравнение будет иметь вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

Тогда если $k = -\frac{1}{2}$, то общее решение диф. уравнение

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x}(c_1 + c_2 x), \quad c_1, c_2 = const$$

№ 10.327 $\quad y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$

Решение. Составим характеристическое уравнение.

$y''' - k^3$
$y'' - k^2$
$y' - k$
$y - 1$

Тогда получаем

$$k^3 - 5k^2 + 17k - 13 = 0. \ (г)$$

Корнями характеристического уравнение являются: $k_1 = 1$; $k_2 = 2+3i$, $k_3 = 2-3i$

$$\begin{array}{r|l} k^3 - 5k^2 + 17k - 13 & k - 1 \\ \hline -\ k^3 - k^2 \quad\quad\quad\quad & k^2 - 4k + 13 \\ -4k^2 + 17k \quad\quad & \\ -\ -4k^2 + 4k \quad\quad & \\ 13k - 13 & \\ -\ 13k - 13 & \\ 0 & \end{array}$$

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

$$D = 16 \cdot 52 = -36$$

$$k_2 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$$

$$k_3 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$$

Для корня $k_1 = 1$ – действительного, кратности $r = 1$ в общее решение диф. уравнение войдет частное решение $y_1 = e^{k_1 x} \to y = e^x$.

Для комплексных сопряженных корней $k_2 = 2+3i$ и $k_3 = 2-3i$ $(\alpha = 2, \beta = 3)$ в общее решение войдут частные решение $y_2 = e^{2x}\cos 3x$ и $y_3 = e^{2x}\sin 3x$.

Тогда общее решение диф. уравнения имеет вид

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 =$$

$$= c_1 e^x + c_2 e^{2x}\cos 3x + c_3 e^{2x}\sin 3x$$

или $\underline{y = c_1 e^x + e^{2x}(c_2\cos 3x + c_3\sin 3x)}$,

$c_1, c_2, c_3 = const$

№10.330 $y^{IV} - y'' = 0$

Решение. Составим характеристическое уравнение.

$y^{IV} - k^4$

$y'' - k^2$

Тогда получаем $k^4 - k^2 = 0$.

$k^2(k^2-1) = 0$

Корнями характеристического уравнения являются $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1, k_4 = -1$.

Корень $k=0$ имеет кратность $r=2$, поэтому $y_{1,2}=C_1e^{0x}+C_2xe^{0x}$

$$y_{1,2}=C_1+C_2x.$$

Корни $k_3=1$ и $k_4=-1$ - действительные и различные, поэтому

$y_3=C_3e^{k_3x}=C_3e^{x}$, $y_4=C_4e^{k_4x}=C_4e^{-x}$.

Тогда общее решение диф. уравнения имеет вид.

$$\underline{y=C_1+C_2x+C_3e^{x}+C_4e^{-x}},\quad C_1, C_2, C_3, C_4=const.$$

<u>№10.339</u> Найти частное решение дифференциального уравнения $y'''-y'=0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=3$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=1$.

<u>Решение.</u> Найдем общее решение диф. уравнения.

Для этого составим характеристическое уравнение:

$y'''-k^3$ | Тогда получаем
$y'-k$ |

$$k^3-k=0$$

$$k(k^2-1)=0$$

Корнями характеристического уравне-

ния являются $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = -1$.
Т. к. корни характеристического уравнения - действительные и разные, то общее решение будет иметь вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + c_3 e^{k_3 x}:$$

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{1 \cdot x} + c_3 e^{-1x}$$

или $$\underline{y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям
$y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.
Для этого найдем производные общего решения:

$$y' = c_2 e^{x} - c_3 e^{-x}$$

$$y'' = c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}.$$

Подставим начальные условия в функцию y и ее производные:

$$\begin{cases} 3 = c_1 + c_2 + c_3 \\ -1 = c_2 - c_3 \\ 1 = c_2 + c_3 \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_1 = 2$.

Тогда частное решение однородного диф. уравнения имеет вид (подставили $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ в общее решение)

$y_{одн.част} = 2 + e^{-x}$

Домашнее задание

№ 10.288, 10.323, 10.324, 10.331, 10.337