Дисциплина: Интегралы и дифференциальные уравнения.

Семинар 20

Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью специального вида.

I. Записать вид частного решения с неопределенными коэффициентами

Совет! Для определения частного решения необходимо сгруппировать слагаемые в правой части, чтобы можно было определить типы функций, которые образуют эти слагаемые.

Функции в правой части могут быть следующих типов

I. $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$, $P_n(x)$ - многочлен степени n.

II. $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x)$,

$P_n(x)$ - многочлен степени n

$S_m(x)$ - многочлен степени m.

В правой части может быть сумма функций разных типов.

№ 10.346 $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$

Решение. 1) Найдем решение однородн. диф. уравнения

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

Для этого найдем корни характеристического уравнения.

$k^2 - 8k + 16 = 0$

$(k-4)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 4,\ k_2 = 4$, т.е.

$k = 4$ - корень характеристического уравнения действительный, кратности $r = 2$.

Тогда решение однородного диф. уравнения $y_{одн} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$,

$C_1, C_2 = const$

2) Функция в правой части

$f(x) = (1-x)e^{4x}$

Это функция типа I.

$P_n(x) = 1 - x$, $\alpha = 4$

многочлен степени 1

Так как $\alpha = 4$ совпадает с корнем $k = 4$, то частное решение будет иметь вид

$y_0 = x^r Q_n(x) e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени такой же, как и $P_n(x)$, т.е. $n = 1$;

r - кратность корня характеристического уравнения, $r = 2$

Тогда $y_0 = \underbrace{x^2 (Ax + B)}_{Q_2(x)} e^{4x}$, $A, B = const$

или $y_0 = (Ax^3 + Bx^2) e^{4x}$

№ 10.348 $\quad y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$

Решение 1) Найдем решение однородного диф. уравнения

$$y'' - 4y' = 0.$$

Для этого найдем решение характеристического уравнения

$$k^2 - 4k = 0$$
$$k(k - 4) = 0$$
$$k_1 = 0, \ k_2 = 4.$$

Т.к. корни характеристического уравнения действительные и разные, то решение одно-родного диф. уравнения

$$y_{одн} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} \text{ или } y_{одн} = C_1 + C_2 e^{4x},$$

$C_1, C_2 = const$

2) Функция в правой части

$$f(x) = 2\cos^2 4x$$

Запишем эту функцию в виде

$$f(x) = 2\left(\frac{1 + \cos 8x}{2}\right) \text{ или } f(x) = 1 + \cos 8x$$

Тогда можно $f(x)$ рассматривать как сумму функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, где

$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos 8x$, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

В этом случае частное решение y_0 будет суммой частных решений $y_{0_1} + y_{0_2}$, где y_{0_1} - частное решение, соответствующее функции $f_1(x)$;

y_{0_2} - частное решение, соответствующее функции $f_2(x)$.

а) Функция $f_1(x) = 1$ - это функция типа I. Ее можно записать в виде $f_1(x) = 1 \cdot e^{0x}$, где $P_n(x) = 1$ - многочлен степени 0 ($n = 0$); $\alpha = 0$.

Поскольку $\alpha = 0$ совпадает с корнем характеристического уравнения $k_1 = 0$ кратности $r = 1$, то частное решение y_{0_1} будет иметь вид

$$y_{0_1} = x^r \cdot Q_n(x) e^{\alpha x}, \quad \text{т. е.}$$

$$\underline{y_{0_1} = x \cdot A \cdot e^{0x}} \quad \text{или} \quad y_{0_1} = xA, \quad A = const$$

б) Функция $f_2(x) = \cos 8x$ - это функция типа $\underline{II}$.

Запишем ее в виде

$$f_2(x) = e^{0x}(1 \cdot \cos 8x + 0 \cdot \sin 8x),$$

где $\alpha = 0$, $\beta = 8$, $\underbrace{P_n(x) = 1, \; S_m(x) = 0}_{\text{многочлены степени } 0.}$

Поскольку $\alpha + i\beta = 0 + i8 = i8$ не совпадает с корнями характерисческого уравнения, то частное решение y_{o_2} будет иметь вид

$$y_{o_2}=e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x+R_N(x)\sin\beta x),$$

где $N=\max\{m;n\}=\{0;0\}=0$, т.е.

$Q_N(x)$ и $R_N(x)$ - многочлены степени 0.

Тогда $y_{o_2}=e^{0x}(B\cos 8x+C\sin 8x)$

или $\underline{y_{o_2}=B\cos 8x+C\sin 8x}$, $B,C=const$

Таким образом, частное решение диф. уравнение будет иметь вид

$$\underline{y_0=y_{o_1}+y_{o_2}=Ax+B\cos 8x+C\sin 8x}$$

<u>№ 10.352</u> $y''+2y'+5y=e^{x}((x+1)\cos 2x+3\sin 2x)$

<u>Решение.</u> 1) Найдем решение однородного диф. уравнения

$$y''+2y'+5y=0.$$

Для этого найдем корни характеристического уравнение $k^2+2k+5=0$

$D=4-20=-16$, $k_1=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$

$k_2=-1-2i$ $(\tilde{\alpha}=-1,\ \tilde{\beta}=2)$

Т.к. корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, то решение однородного уравнение будет иметь вид

$$y_{одн}=e^{\tilde{\alpha}x}(C_1\cos\tilde{\beta}x+C_2\sin\tilde{\beta}x),\ \text{т.е.}$$

$y_{одн} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, $C_1, C_2 = const$

2) Функция в правой части

$f(x) = e^x((x+1)\cos 2x + 3\sin 2x)$ – функция вида II;

где $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $P_n(x) = x + 1$ - многочлен степени 1 $(n = 1)$

$S_m(x) = 3$ - многочлен степени 0 $(m = 0)$

Поскольку $\alpha + i\beta = 1 + 2i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения $k_1 = -1+2i$ и $k_2 = -1-2i$, то частное решение будем иметь вид

$$y_0 = e^{\alpha x}(P_N(x)\cos\beta x + R_N(x)\sin\beta x),$$

где $N = \max\{m; n\} = \max\{0; 1\} = 1$,

т.е. $P_N(x)$ и $R_N(x)$ - многочлены степени 1.

Тогда $y_0 = e^{1x}((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x)$

или $y_0 = e^x((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x)$,

$A, B, C, D = const$

! 4 (ну Д3) $y^{IV} + y''' - 3y'' - y' + 2y = e^{2x}\cos 4x + (x^2-1)e^{-2x} + x\sin x + \cos x$

Решение. Найдем решение однородного дифф уравнения $y^{IV} + y''' - 3y'' - y' + 2y = 0$, Для этого найдем решение характеристического уравнения $k^4+k^3-3k^2-k+2=0$

$$k^4+k^3-2k^2-k^2-k+2=0$$

$$k^2(k^2+k-2)-(k^2+k-2)=0$$

$$(k^2+k-2)(k^2-1)=0 \Rightarrow k^2+k-2=0$$

$$k_1=1,\ k_2=-2$$

или $k^2-1=0$

$$k_3=1,\ k_4=-1$$

Таким образом, $k_{1,3}=1$ - корень характеристического уравнения кратности $r=2$!

$$k_2=-2,\ k_3=-1$$

Тогда решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{одн}=C_1x^2e^x+C_2e^{-2x}+C_3e^{-x},$$

$$C_1, C_2, C_3=const$$

2) Функция в правой части

$$f(x)=e^{2x}\cos 4x+(x^2-1)e^{-2x}+x\sin x+\cos x$$

В этой функции можно выделить функции

$f_1(x)=e^{2x}\cos 4x$ - функция типа II

$f_2(x)=(x^2-1)e^{-2x}$ - функция типа I

$f_3(x)=x\sin x+\cos x$ - функция типа II.

Эти функции отличаются параметрами α и β

а) Функцию $f_1(x)=e^{2x}\cos 4x$ запишем в виде $f_1(x)=e^{2x}(1\cdot\cos 4x+0\cdot\sin 2x)$,

$\alpha=2$, $\beta=4$, $P_n(x)=1$, $S_m(x)=0$ $(n=1, m=0)$

Число $\alpha+i\beta=2+4i$ не совпадает с корнями характеристического уравнение, поэтому частное решение y_{o1} будет иметь вид

$$y_{o1}=e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x+R_N(x)\sin\beta x),$$

где $N=\max\{m;n\}=\max\{0;0\}=0$,

т.е $Q_N(x)$ и $R_N(x)$ - многочлен степени 0.

Тогда $\underline{y_{o1}=e^{2x}(A\cos 4x+B\sin 4x)}$, $A,B=const$

б) Функция $f_2(x)=(x^2-1)e^{-2x}$, где $\alpha=-2$,

$P_n(x)=x^2-1$ — многочлен степени 2

Поскольку $\alpha=-2$ совпадает с корнем характеристического уравнение $k_2=-2$ кратности $r=1$, то частное решение y_{o2} будет иметь вид

$$y_{o2}=x^r Q_n(x)e^{\alpha x},$$ $Q_n(x)$ - многочлен степени $n=2$. как и $P_n(x)$

Тогда $y_{o2}=x^1(Cx^2+Dx+E)e^{-2x}$

или $\underline{y_{o2}=(Cx^3+Dx^2+Ex)e^{-2x}}$, $C,D,E=const$

в) Функцию $f_3(x) = x\sin x + \cos x$ запишем в виде
$$f_3(x) = e^{0x}(1\cdot\cos x + x\cdot\sin x),$$ где
$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P_n(x) = 1$ – многочлен степени $0\ (n=0)$
$S_m(x) = x$ – многочлен степени $1\ (m=1)$

Поскольку $\alpha + i\beta = 0 + 1i = i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, то частное решение y_{o_3} будет иметь вид
$$y_{o_3} = e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x + R_N(x)\sin\beta x),$$
где $N = \max\{m, n\} = \{1; 0\} = 1$, т.е. $Q_N(x)$ и $R_N(x)$ – многочлены степени 1.

Тогда $y_{o_3} = e^{0x}((Fx+G)\cos 1x + (Tx+L)\sin 1x)$

или $\underline{y_{o_3} = (Fx+G)\cos x + (Tx+L)\sin x}$,
$F, G, T, L = const.$

В результате частное решение диф. уравнения $\underline{y_0 = y_{o_1} + y_{o_2} + y_{o_3}} =$
$$\underline{= e^{2x}(A\cos 4x + B\sin 4x) + (Cx^3 + Dx^2 + Ex)e^{-2x} +}$$
$$\underline{+ (Fx+G)\cos x + (Tx+L)\sin x}$$

II. Найти общее решение диф. уравнения

№10.354 $y'' - y = e^{-x}$

Решение. 1) Найдем общее решение однородного диф. уравнения

$$y'' - y = 0$$

Для этого найдем корни характеристического уравнения $k^2 - 1 = 0$

$$k_1 = 1, \; k_2 = -1$$

Корни характеристического уравнения действительные и разные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $C_1, C_2 = const$

2) Функция в правой части $f(x) = e^{-x}$ – функция типа I, где $\alpha = -1$, $P_n(x) = 1$ – многочлен степени 1 $(n = 1)$

Т.к. $\alpha = -1$ совпадает с корнем характеристического уравнения $k_2 = -1$ кратности $r = 1$, то частное решение будет иметь вид $y_0 = x^r Q_n(x) e^{\alpha x}$, т.е.

$$y_0 = x \cdot A e^{-x}, \quad A = const$$

3) Найдем константу A методом неопределенных коэффициентов.

Т.к. y_0 – частное решение, то оно удовлетворяет исходному диф. уравнению.

Найдем $y_0' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$,

$$y_0'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}.$$

Подставим $y_0 = Axe^{-x}$ и производную y_0'' в исходное диф. уравнение

$$-2Ae^{-x} + Axe^{-x} - Axe^{-x} = e^{-x}$$

$$-2Ae^{-x} = e^{-x}$$

Приравниваем коэффициенты при e^{-x} в правой и левой частях: $-2A = 1$, $A = -\frac{1}{2}$

Тогда частное решение будет иметь вид

$$y_0 = -\frac{1}{2}xe^{-x}$$

4) Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения $y_{одн}$ и частного решения y_0,

т.е. $y_{неодн} = y_{одн} + y_0$

Тогда получаем $\underline{y_{неодн} = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}}$

№10.360 $\quad y'' + y = 4x\cos x$

Решение 1) Найдем общее решение однородного диф. уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Для этого найдем корни характеристического уравнения $k^2 + 1 = 0$

$$k_1 = i \quad , k_2 = -i$$

или $k_1 = 0 + 1i$ и $k_2 = 0 - 1i$ $\quad (\alpha = 0, \beta = 1)$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, поэтому общее решение однородного диф. уравнения имеет вид $y_{одн} = e^{\tilde{\alpha}x}(C_1\cos\tilde{\beta}x + C_2\sin\tilde{\beta}x)$,

т. е. $y_{одн} = e^{0x}(C_1\cos 1x + C_2\sin 1\cdot x)$

или $\underline{y_{одн} = C_1\cos x + C_2\sin x}$

2) Функцию в правой части $f(x) = 4x\cos x$ запишем в виде $f(x) = e^{0x}(4x\cos x + 0\sin 4x)$ — функция типа $\underline{II}$,

где $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_n(x) = 4x$ - многочлен степени 1 $(n=1)$

$S_m(x) = 0$ - многочлен степени 0 $(m=1)$

Т. к. $\alpha + i\beta = 0 + i1 = i$ совпадает с корнем характеристического уравнения $k_1 = i$ кратности $r = 1$, то частное решение имеет вид $y_0 = x^r e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x + R_N(x)\sin\beta x)$,

где $N = \max\{m; n\} = \max\{1; 0\} = 1$, т. е. $Q_N(x)$ и $R_N(x)$ - многочлены степени 1.

Тогда $y_0 = xe^{0x}((Ax+B)\cos 1\cdot x + (Cx+D)\sin 1x)$

или $y_0 = x((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x)$

или $\underline{y_0 = (Ax^2+Bx)\cos x + (Cx^2+Dx)\sin x}$,

$A, B, C D = const.$

3) Найдем коэффициенты A, B, C, D методом неопределенных коэффициентов

Найдем $y_0' = (2Ax + B)\cos x + (Ax^2 + Bx)(-\sin x) +$
$+ (2Cx + D)\sin x + (Cx^2 + Dx)\cos x$;

$y_0'' = 2A\cos x - (2Ax + B)\sin x - (2Ax + B)\sin x -$
$- (Ax^2 + Bx)\cos x + 2C\sin x + (2Cx + D)\cos x +$
$+ (2Cx + D)\cos x - (Cx^2 + Dx)\sin x =$
$= 2A\cos x - 2(2Ax + B)\sin x - (Ax^2 + Bx)\cos x +$
$+ 2C\sin x + 2(2Cx + D)\cos x - (Cx^2 + Dx)\sin x$.

Подставим y_0 и y_0'' в исходное диф. уравнение

$2A\cos x - 2(2Ax + B)\sin x - \underline{(Ax^2 + Bx)\cos x} +$
$+ 2C\sin x + 2(2Cx + D)\cos x - \underline{(Cx^2 + Dx)\sin x} +$
$+ \underline{(Ax^2 + Bx)\cos x} + \underline{(Cx^2 + Dx)\sin x} = 4x\cos x$

$2A\cos x - 2(2Ax + B)\sin x + 2C\sin x - 2(2Cx + D)\cos x =$
$= 4x\cos x$

$\cos x(2A + 4Cx + 2D) + \sin x(2C - 4Ax - 2B) = 4x\cos x$

Коэффициенты в правой и левой частях собираем при $\cos x$ и при $\sin x$ (в правой части $0 \cdot \sin x$)

$\cos x$: $2A + 4Cx + 2D = 4x$

$\sin x$: $2C - 4Ax - 2B = 0$

Приравнием коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях

в 1-ом уравн. $\begin{cases} x^1: & 4C = 4 \\ x^0: & 2A + 2D = 0 \end{cases}$ своб. член

во 2-м уравн. $\begin{cases} x^1: & -4A = 0 \\ x^0 & 2C - 2B = 0 \end{cases}$

Решая полученную систему уравнений, получаем $C = 1$, $A = 0$, $D = 0$, $B = 1$

Тогда частное решение имеет вид

$y_0 = x\cos x + x^2 \sin x.$

4) Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$y_{неодн} = y_{одн} + y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\cos x + x^2 \sin x$

№ 10.371 Найти частное решение диф. уравнения

$y''' - y' = -2x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

Решение. 1) Найдем общее решение однородного диф. уравнения

$y''' - y' = 0.$

Для этого найдем корни характеристического уравнения $k^3 - k = 0$, $k(k^2 - 1) = 0$;

$k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1.$

Т.к. корни характеристического уравнения действительные и разные, то общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{одн} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} \quad \text{или}$$

$$\underline{y_{одн} = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}}, \quad C_1, C_2, C_3 = const$$

2) Функция в правой части $f(x) = -2x$ – функция типа I

Запишем $f(x)$ в виде

$$f(x) = -2x\, e^{0x}, \quad \alpha = 0, \quad P_n(x) = -2x \text{ – многочлен степени } 1\ (n=1)$$

Т.к. $\alpha = 0$ совпадает с корнем характеристического уравнения $k_1 = 0$, кратности $r = 1$ то частное решение имеет вид

$$y_0 = x^r Q_n(x) e^{0x}, \quad Q_n(x) \text{ – многочлен степени 1, как и } P_n(x)$$

Тогда $y_0 = x \cdot (Ax + B) e^{0x}$ или $\underline{y_0 = Ax^2 + Bx}$

$A, B = const$

3) Найдем коэффициенты A и B методом неопределенных коэффициентов

Найдем $y_0' = 2Ax + B,$

$y_0'' = 2A.$

$y_0''' = 0$

Подставим y_0''' и y_0' в исходное диф. уравнение:

$$0-(2Ax+B)=2x$$

$$-2Ax-B=-2x$$

Приравниваем коэффициенты при x и x^0 в левой и правой частях: $-2A=-2$,

$A=1$; $B=0$

Тогда частное решение y_0 имеет вид

$$\underline{y_0=x^2}$$

4) Общее решение неоднородного диф. уравнения имеет вид $\underline{y_{неодн}=y_{одн}+y_0=}$

$$\underline{=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}+x^2.} \qquad (1)$$

5) Найдем частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$.

Найдем производные $y_{неодн}$ первого и второго порядков

$$y'_{неодн}=c_2e^{x}-c_3e^{-x}+2x$$

$$y''_{неодн}=c_2e^{x}+c_3e^{-x}+2$$

Подставим начальные условия в $y_{неодн}$, $y'_{неодн}$ и $y''_{неодн}$

$$\begin{cases} 0=c_1+c_2e^{0}+c_3e^{-0}+0 \\ 2=c_2e^{0}-c_3e^{-0}+2\cdot 0 \\ 2=c_2e^{0}+c_3e^{-0}+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 + 0 = 2 \\ c_2 + c_3 + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 = 2 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_2 = 1, \; c_3 = -1, \; c_1 = 0$$

Подставим $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$ в общее решение (1) неоднородного диф. уравнения и получаем частное решение этого диф. уравнения

$$\underline{y_{неодн\ част} = e^{x} - e^{-x} + x^2.}$$

Домашнее задание

№ 10.349, 10.350, 10.357, 10.364, 10.370.