Рекомендации по использованию методов нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x), \qquad (1)$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ определены и непрерывны на некотором промежутке I числовой прямой и $f(x) \not\equiv 0$.

Если функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ являются постоянными, т. е. $a_i(x) = a_i$, $a_i = const,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ то линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка (1) будет линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x). \qquad (2)$$

1. Пусть задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами (2) и правой частью специального вида, т. е. функция в правой части уравнения имеет вид

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \qquad (3)$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, α – действительное число;

или

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos\beta x + S_m(x) \cdot \sin\beta x), \qquad (4)$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени,

$S_m(x)$ – многочлен m-й степени,

α, β – действительные числа.

Для нахождения общего решения этого дифференциального уравнения можно использовать и *метод неопределенных коэффициентов*, и *метод Лагранжа* (вариации постоянных).

2. Пусть задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами (2), но функция в правой части уравнения не имеет вид функций (3) или (4).

Для нахождения общего решения этого дифференциального уравнения необходимо использовать *метод Лагранжа* (вариации постоянных).

3. Пусть задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка (1), в котором функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ не являются постоянными.

Для нахождения общего решения этого дифференциального уравнения необходимо использовать *метод Лагранжа* (вариации постоянных).

При нахождении общего решения линейного неоднородного дифференциальное уравнение n-го порядка *методом Лагранжа* необходимо, что коэффициент при производной $y^{(n)}$ был равен 1.

Если перед производной $y^{(n)}$ находится функция, не равная тождественно 1, то следует разделить обе части дифференциального уравнения на эту функцию, предполагая, что она не равна 0 (не забывая потом проверить наличие особых («потерянных») решений).

I. Найти общее решение диф. уравнения методом Лагранжа (вариации постоянных)

№ 10.342 $\quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$

Решение
1) найдем общее решение однородного диф. уравнения.

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Для этого найдем корни характеристического уравнения $k^2 + 3k + 2 = 0$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -2$$

Т.к. корни характеристического уравнения разные и действительные, то общее решение имеет вид $\underline{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}}$, $c_1, c_2 = const$

Заменим $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$:

$$\underline{y = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) e^{-2x}} \quad (3)$$

Общее решение однородного диф. уравнения имеет вид $y = c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) y_2$,

поэтому $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-2x}$.

2) Для нахождения функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ составим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1' + c_2'(x) \cdot y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{-x}+C_2'(x)e^{-2x}=0 & (2) \\ C_1'(x)\cdot(-e^{-x})+C_2'(x)\cdot(-2)e^{-2x}=\dfrac{1}{e^x+1} \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений
Сложим оба уравнения

$$(-2+1)e^{-2x}C_2'(x)=\frac{1}{e^x+1};$$

$$C_2'(x)=-\frac{e^{2x}}{e^x+1}; \quad (1)$$

$$\frac{dC_2(x)}{dx}=-\frac{e^{2x}}{e^x+1};$$

$$dC_2(x)=\left(-e^x+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$\int dC_2(x)=\int\left(-e^x+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$C_2(x)=-e^x+\ln(e^x+1)+\tilde{C}_2, \quad \tilde{C}_2=const$$

$$\underline{C_2(x)=-e^x+\ln(e^x+1)+\tilde{C}_2}$$

Подставим $C_2'(x)$ в первое уравнение системы ((1) в (2))

$$C_1'(x)\cdot e^{-x}+\left(-\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)\cdot e^{-2x}=0$$

$$C_1'(x)e^{-x}-\frac{1}{e^x+1}=0$$

$$C_1'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}=\frac{e^x}{e^x+1}; \quad dC_1(x)=\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$\int dC_1(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$\underline{C_1(x) = \ln(e^x+1) + \tilde{C}_1} \quad , \tilde{C}_1 = const$$

Подставляем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение (3)

$$y = \left(\ln(e^x+1) + \tilde{C}_1\right)\cdot e^{-x} + \left(-e^x + \ln(e^x+1) + \tilde{C}_2\right)e^{-2x}$$

$$y = \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-2x} + e^{-x}\ln(e^x+1) - e^{-x} + \ln(e^x+1)\cdot e^{-2x}$$

$$\underline{y = \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-2x} + \ln(e^x+1)\cdot\left(e^{-x} + e^{-2x}\right) - e^{-x}}$$

Обратите внимание, что сохраняется структура общего решения неоднородного диф. уравнения: $y_{неодн} = y_{одн} + y_0$,

где $y_{одн} = \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-2x}$ (см. то, что получено ранее)

$$y_0 = \ln(e^x+1)\left(e^{-x}+e^{-2x}\right) - e^{-x}.$$

<u>№ 10.354</u> $\quad y'' - y = e^{-x}$

<u>Решение.</u> Это уравнение было рассмотрено в семинаре 20.

Найдем его общее решение методом Лагранжа.

Было получено общее решение однородного уравнения $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Заменим $c_1 = c_1(x)$ и $c_2 = c_2(x)$. Тогда

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x} \qquad (4)$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = e^{-x}. \end{cases}$

Сложим эти уравнения:

$$2c_1'(x)e^x = e^{-x},$$

$$(5) \quad c_1'(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}, \qquad \frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$dc_1(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}dx$$

$$\int dc_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$$

$$\underline{c_1(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x} + \tilde{c}_1}, \quad \tilde{c}_1 = const$$

Подставим (5) в первое уравнение системы

$$\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{e^{-x}}, \qquad c_2'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dc_2(x)}{dx} = \frac{1}{2}, \qquad dc_2(x) = \frac{1}{2}dx$$

$$\int dc_2(x) = \frac{1}{2}\int dx$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2}x + \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_2 = const$$

Подставим $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в функцию (4)

$$y = \left(-\frac{1}{4}e^{-2x} + \tilde{c}_1\right)\cdot e^x + \left(\frac{1}{2}x + \tilde{c}_2\right)e^{-x}$$

$$y = -\frac{1}{4}e^{-x} + \tilde{c}_1 e^x + \frac{1}{2}xe^{-x} + \tilde{c}_2 e^{-x}$$

$$y = \tilde{c}_1 e^x + \underbrace{\left(\tilde{c}_2 - \frac{1}{4}\right)}_{=\tilde{C}_3}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x}$$

$$y = \tilde{c}_1\cdot e^x + \tilde{c}_3 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x}, \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_3 = const$$

(сравните с общим решением, полученным методом неопределенных коэффициентов, им совпадают.

③ $x^2y'' + xy' = 3x^3$.

Решение Это диф уравнение $2^{го}$ порядка, но не с постоянными коэффициентами.

Разделим обе части диф уравнения на $x^2 \neq 0$ (чтобы коэффициент перед y'' был равен 1)

$$y'' + \frac{1}{x}y' = 3x$$

1) Найдем общее решение однородного диф. уравнения $y'' - \frac{1}{x}y' = 0$

Это диф. уравнение допускающее понижение порядка.

Заменим $y' = p$, $y'' = p'$. Тогда

$$p' + \frac{1}{x} p = 0, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|p| = -\ln|x| + \ln|c|$$

$$p = \frac{c}{x}, \quad c = const$$

Т.к. $p = \frac{c}{x} = y'$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{c}{x}$, $dy = \frac{c}{x} dx$

$$\int dy = c \int \frac{1}{x} dx$$

$$(6) \quad \underline{y_{одн.} = c \ln|x| + c_2}$$

Поскольку структура общего решение однородного диф.уравнение

$$y_{одн} = c_1 y_1 + c_2 y_2, \text{ то}$$

$y_1 = \ln x$, $y_2 = 1$

Заменим в (6) $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$

Тогда получаем $y = c_1(x) \ln x + c_2(x)$ (7)

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0, \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

Тогда
$$\begin{cases} c_1'(x)\ln x + c_2'(x) = 0, \\ c_1'(x)\dfrac{1}{x} + \underbrace{c_2'(x)\cdot 0}_{=0} = 3x. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем

(8) $c_1'(x) = 3x^2$, $\dfrac{dc_1(x)}{dx} = 3x^2$, $dc_1(x) = 3x^2dx$

$$\int dc_1(x) = 3\int x^2dx$$
$$c_1(x) = x^3 + \tilde{c}_1,$$
$$\tilde{c}_1 = const$$

Подставим (8) в первое уравнение системы

$3x^2\ln x + c_2'(x) = 0$; $c_2'(x) = -3x^2\ln x$

$dc_2(x) = -3x^2\ln x\,dx$

$\int dc_2(x) = -3\int x^2\ln x\,dx$

$$c_2(x) = -3\int x^2\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx, & v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| =$$
$$= -3\left(\frac{x^3}{3}\cdot\ln x - \frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx\right) =$$
$$= -3\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx\right) = -x^3\ln x + \frac{x^3}{3} + \tilde{c}_2$$
$$\tilde{c}_2 = const,$$

т.е. $c_2(x) = -x^3\ln x + \dfrac{x^3}{3} + \tilde{c}_2$

Подставляем $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в функцию (7)

$$y = (x^3 + \tilde{c}_1)\ln x + \frac{x^3}{3} - x^3\ln x + \tilde{c}_2$$

$y = \tilde{c}_1\ln x + \tilde{c}_2 + \dfrac{x^3}{3}$ – общее решение неоднородного дифф. уравнение.

II. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения по данному частному решению y_1 соответствующего линейного однородного уравнения.

(теорию см. в лекции 13. Понижение порядка однородного линейного диф. уравнения при известном частном решении)

(1). $x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = (1-\ln x)^2$; $y_1 = x$

Решение. Разделим обе части диф. уравнения на

$$x^2(1-\ln x) \neq 0.$$

Получим

$$y'' + \frac{1}{x(1-\ln x)}y' - \frac{y}{x^2(1-\ln x)} =$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2}. \quad (9)$$

1. Структура общего решения линейного однородного диф. уравнения имеет вид $y_{одн} = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где y_1 и y_2 - частные решения, $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$.

Частное решение y_1 известно. Необходимо найти y_2.

Будем искать частное решение $y_2 = y_2(x)$ в виде $y_2 = z \cdot y_1$, где $z = z(x)$ - неизвестная функция

Тогда с учетом того, что $y_1 = x$ имеем

$y_2 = z \cdot x$.

Найдем производные первого и второго порядков функции $y_2 = y_2(x)$

$y_2' = z'x + z$,

$y_2'' = z''x + z'\underbrace{x'}_{1} + z' = z''x + 2z'$

Т.к. $y_2 = y_2(x)$ - частное решение исходного диф. уравнение, то оно ему удовлетворяет.

Подставим y_2, y_2', y_2'' в однородное диф. уравнение, соответствующее (9)

$$2z' + z''x + \frac{1}{x(1-\ln x)}(z'x + z) - \frac{zx}{x^2(1-\ln x)} = 0$$

$$2z' + z''x + \frac{1}{1-\ln x}z' + \cancel{\frac{z}{x(1-\ln x)}} - \cancel{\frac{z}{x(1-\ln x)}} = 0$$

$$z''x + 2z' + \frac{1}{1-\ln x}z' = 0$$

$$z''x + \left(2 + \frac{1}{1-\ln x}\right)z' = 0$$ - это диф. уравнение $2^{го}$ порядка, допускающее понижение порядка.

Заменим $p = z'$, $p' = z''$.

Тогда $p'x + \left(2 + \frac{1}{1-\ln x}\right)p = 0$

$$\frac{dp}{dx}x = -\left(2 + \frac{1}{1-\ln x}\right)p$$

$$\frac{dp}{p} = \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x(1-\ln x)}\right)dx$$

$$\int\frac{dp}{p} = -2\int\frac{1}{x}dx - \int\frac{1}{x(1-\ln x)}dx$$

$$-\int\frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \left\{\begin{matrix} t = 1-\ln x \\ dt = -\frac{1}{x}dx \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int\frac{1}{t}dt = \ln|t| + \ln c =$$

$$= \ln|1-\ln x| + \ln c$$

Тогда $\ln|p| = -2\ln|x| + \ln|1-\ln x| + \ln c$

$$p = c\frac{1-\ln x}{x^2}, \quad c = const$$

Т.к. $p = z'$, то $z' = c\frac{1-\ln x}{x^2}$

$$dz = c\frac{1-\ln x}{x^2}dx$$

$$\int dz = c\int\frac{1-\ln x}{x^2}dx$$

$$z = c\left(\int\frac{1}{x^2}dx - \int\frac{\ln x}{x^2}dx\right) = \left\{\begin{matrix} u = \ln x, \ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{1}{x^2}dx, \ v = -\frac{1}{x} \end{matrix}\right\} =$$

$$= c\left(-\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x}\ln x + \int\frac{1}{x^2}dx\right)\right) =$$

$$= c\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right) + c_1, \quad c_1 = const$$

$$z = c\frac{1}{x}\ln x + c_1$$

Поскольку ищем частное решение, то можно положить $c = 1$, $c_1 = 0$.

Тогда $z = \frac{1}{x} \ln x$.

Следовательно, частное решение

$$y_2 = z \cdot x = \frac{1}{x} \ln x \cdot x = \ln x,$$

т.е. $\underline{y_2 = \ln x}$

2. Найдем общее решение диф. уравнения (9) методом Лагранжа.

Для этого составляем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1' + c_2'(x) \cdot y_2' = f(x) \end{cases}$$

В рассматриваемом диф. уравнении (9)

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^3}.$$

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot x + c_2'(x) \ln x = 0, \\ c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x) \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x}{x^2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения

$$c_1'(x) = - c_2'(x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Подставим $c_1'(x)$ в первое уравнение

$$-c_2'(x) + \frac{1 - \ln x}{x} + c_2'(x) \ln x = 0$$

$$c_2'(x)(\ln x - 1) = - \frac{1 - \ln x}{x}$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{x}; \quad d c_2(x) = \frac{1}{x} dx; \int d c_2(x) = \int \frac{1}{x} dx$$

$c_2(x) = \ln x + \tilde{c}_2$, $\tilde{c}_2 = const$

отсюда $c_2'(x) = \frac{1}{x}$, тогда

$c_1'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, $dc_1(x) = -\frac{\ln x}{x^2}dx$

$$\int dc_1(x) = \underbrace{-\int \frac{\ln x}{x^2}dx}_{\text{этот интеграл нашли раньше}}$$

$c_1(x) = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + \tilde{c}_1$, $\tilde{c}_1 = const$

Подставим $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в

$y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x) \cdot y_2$, учитывая

$y_1 = x$, $y_2 = \ln x$.

Получаем

$$y = \left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + \tilde{c}_1\right)x + \left(\ln x + \tilde{c}_2\right)\ln x$$

$$y = \tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2 \ln x + \ln x + 1 + \ln^2 x$$

$y = \tilde{c}_1 x + \tilde{c}_3 \ln x + \ln^2 x + 1$, $\tilde{c}_3 = \tilde{c}_2 + 1$

- общее решение неоднородного диф. уравнения

Рекомендация. При записи общего решения неоднородного уравнения учитывайте порядок $y_{\text{неод}} = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}}$.

(2) $y'' - y = e^{2x}$, $y_1 = e^x$.

Решение.

1. Структура общего решения линейного однородного диф. уравнения имеет вид

$$y_{одн} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ - частные решения линейного однородного диф. уравнения.

Заменим $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, тогда общее решение линейного неоднородного диф. уравнения имеет вид $y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$ (10)

Способ 1

Найдем частное решение $y_2 = y_2(x)$ линейного диф. уравнения

$$y'' - y' = 0. \quad (11)$$

Будем искать решение $y_2 = y_2(x)$ в виде $y_2 = z \cdot y_1$, где z - неизвестная функция $z = z(x)$.

Т. к. $y_1 = e^x$, то $y_2 = z \cdot e^x$.

Частное решение $y_2 = y_2(x)$ удов-

удовлетворяет дифф. уравнению (11)

Найдем производные $y_2 = y_2(x) = z \cdot y_1 = z \cdot e^x$

$y_2' = z'e^x + z \cdot e^x$

$y_2'' = z''e^x + z'e^x + z'e^x + ze^x =$

$= z''e^x + 2z'e^x + ze^x$

Подставим y_2 и y_2'' в уравнение (11)

$z''e^x + 2z'e^x + ze^x - ze^x = 0$

$(z'' + 2z')e^x = 0$

Т.к. $e^x \neq 0$, то $z'' + 2z' = 0$

Сделаем замену $p = z'$, $p' = z''$, $p = p(x)$

$p' + 2p = 0$, $\frac{dp}{dx} = -2p$

$\frac{dp}{p} = -2dx$

$\int \frac{dp}{p} = -2\int dx$

$\ln|p| = -2x + C_1$, $C_1 = const$

Т.к. ищем частное решение, то полагаем $c_1 = 0$. Тогда $\underline{p = e^{-2x}}$

Поскольку $p = z'$, то

$z' = e^{-2x}$; $\frac{dz}{dx} = e^{-2x}$, $dz = e^{-2x}dx$

$$\int dz = \int e^{-2x}\,dx,$$

$$z = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_2,\ C_2 = \text{const}$$

Т.к. ищем частное решение, то можем положить $C_2 = 0$, а также не учитывать коэффициент $-\frac{1}{2}$. Тогда $z = e^{-2x}$.

Следовательно, частное решение $y_2 = y_2(x)$ имеет вид

$$y_2 = z \cdot e^x = e^{-2x} \cdot e^x = e^{-x},$$

$$\text{т.е. } \underline{y_2 = e^{-x}}.$$

Подставим $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ в общее решение (10)

$$\underline{y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}} \qquad (12)$$

2. Находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$, решая систему для уравнений (используем метод Лагранжа):

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

В рассматриваемой задаче $f(x) = e^{2x}$.

Тогда $\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = e^{2x}. \end{cases}$

Складываем оба уравнения

$$2C_1'(x)e^x = e^{2x}.$$

$c_1'(x) = \frac{1}{2}e^{x}$; $dc_1(x) = \frac{1}{2}e^{x}dx$

$$\int dc_1(x) = \frac{1}{2}\int e^{x}dx$$

$$c_1(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \tilde{c}_1,$$

$\tilde{c}_1 = const$

Подставляем $c_1'(x) = \frac{1}{2}e^{x}$ в первое уравнение

$$\frac{1}{2}e^{x}e^{x} + c_2'(x)e^{-x} = 0$$

$$c_2'(x)e^{-x} = -\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$c_2'(x) = -\frac{1}{2}e^{3x}$$

$$dc_2(x) = -\frac{1}{2}e^{3x}dx$$

$$\int c_2(x) = -\frac{1}{2}\int e^{3x}dx$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{6}e^{3x} + \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_2 = const$$

Подставляем $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в функцию (1-2)

$$y = \left(\frac{1}{2}e^{x} + \tilde{c}_1\right)\cdot e^{x} + \left(-\frac{1}{6}e^{x} + \tilde{c}_2\right)e^{-x}$$

$$y = \tilde{c}_1 e^{x} + \tilde{c}_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{2x}$$

$$y = \tilde{c}_1 e^{x} + \tilde{c}_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$$

— общее решение линейного неоднородного диф. уравнения

Примечание. Общее решение неоднородного диф уравнение складывается из общего решения однородного диф. уравнения и частного решения

$$y_{неодн} = y_{одн} + y_0.$$

В общем решении линейного неоднородного диф. уравнения

$$y = \underbrace{\tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 e^{-x}}_{= y_{одн}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}}_{y_0}$$

Можно заметить, что $y_{одн} = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 e^{-x}$ совпадает по виду с общим решением однородного диф уравнения, которое получили раньше.

<u>Способ 2</u> нахождения частного решения $y_2 = y_2(x)$ линейного однородного диф. уравнения.

Для этого используем формулу Остроградского-Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt},$$

где $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ - определитель Вронского,

x_0 - произвольная точка промежутка I, на котором определены коэффициенты $a_1(x)$ и $a_2(x)$ линейного однородного диф. уравнения

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0.$$

Поскольку при нахождении частного решения $y_2 = y_2(x)$ при известном частном решении $y_1 = y_1(x)$ линейного диф. уравнения не важны начальные условия для функции $y_2 = y_2(x)$, то x_0 и $W(x_0)$ можно брать произвольно. Например, можно находить функцию $y_2 = y_2(x)$ из уравнения

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int a_1(x)\,dx}, \quad (13)$$

где $\int a_1(x)\,dx$ – фиксированная первообразная функции $a_1(x)$.

В рассматриваемом линейном однородном диф. уравнении

$$y'' - y = 0,$$

$a_1(x) = 0$, поэтому

$$\int a_1(x)\,dx = \int 0 \cdot dx = C_1, \quad C_1 = const.$$

Полагаем $C_1 = 0$. Тогда

$$\int a_1(x)\,dx = 0.$$

Используя формулу (13) с учетом $y_1 = e^x$, получаем

$$\begin{vmatrix} e^x & y_2 \\ e^x & y_2' \end{vmatrix} = e^{-0};$$

$$y_2' e^x - y_2 e^x = 1,$$

$$y_2' - y_2 = e^{-x}$$ – это линейное диф. уравнение 1-го порядка

Найдем его решение методом Бернулли.

Будем искать решение в виде

$$y_2 = u \cdot v, \quad u = u(x), \ v = v(x)$$

Т.к. $y_2' = u'v + u \cdot v'$, то

$$u'v + u \cdot v' - u \cdot v = e^{-x}$$

$$u'v + u(v' - v) = e^{-x}$$

Найдем $v = v(x)$ из условия $v' - v = 0$.

$$\frac{dv}{dx} = v; \quad \frac{dv}{v} = dx; \quad \int \frac{dv}{v} = \int dx$$

$$\ln|v| = x$$

$$\underline{v = e^{x}}$$

Далее $u'v = e^{-x}$

$$u' e^{x} = e^{-x}$$

$$u' = e^{-2x}, \quad du = e^{-2x} dx$$

$$\int du = \int e^{-2x} dx$$

$$u = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c_2,$$

$$\underline{c_2 = const}$$

Тогда $y_2 = u \cdot v = \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + c_2\right) \cdot e^{x} =$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x} + c_2 e^{x}$$

Т.к. ищем частное решение, то можно положить $C_2 = 0$ и не учитывать коэффициент $-\frac{1}{2}$.

Тогда $y_2 = e^{-x}$.

Таким образом, общее решение линейного однородного диф. уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Далее используем метод Лагранжа для нахождения общего решения линейного неоднородного диф. уравнения.

При этом заменяем $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ и получаем $y = C_1(x) e^{x} + C_2 e^{-x}$.

Нахождение функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получены в пункте 2 способа 1.

Домашнее задание

№ 10.343, 10.370,

3) $x^2 y'' - x y' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \frac{1}{x}$.