



$$\varphi(x) = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \Big|_{y=\varphi(x)}.$$

Теорему 1 можно обобщить на случай одного уравнения с  $n + 1$  неизвестными.

Теорема 2.

Пусть в окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0)$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbf{R}$ , задана функция  $F(x, y)$  от  $n + 1$  переменных ( $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $y \in \mathbf{R}$ ), удовлетворяющая условиям:

- 1)  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
- 2) функция  $F(x, y)$  определена и непрерывно дифференцируема в  $U$ ;
- 3) частная производная функции  $F(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  по переменному  $y$  отлична от нуля, т. е.  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда точка  $(x_0, y_0)$  имеет окрестность вида

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1} : |x - x_0| < \delta_x, |y - y_0| < \delta_y\},$$

в которой уравнение  $F(x, y) = 0$  разрешимо относительно  $y$ , т. е. в окрестности  $U(x_0, \delta_x) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| < \delta_x\}$  определена функция нескольких переменных  $y = \varphi(x)$ , удовлетворяющая тождеству  $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$ .

При этом функция  $y = \varphi(x)$  непрерывно дифференцируема в  $U(x_0, \delta_x)$ , а ее частные производные в  $U(x_0, \delta_x)$  могут быть вычислены по формулам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = - \frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)} \Big|_{y=\varphi(x)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Теоремы 1 и 2 не только дают формулы для вычисления производных неявных функций, но и дают достаточные условия дифференцируемости неявной функции.

Покажем, что формулы дифференцирования неявной функции могут быть получены, если использовать предположение о дифференцируемости неявной функции и правило дифференцирования сложной функции. Пусть функция  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in G \subset \mathbf{R}^n$ , определена неявно уравнением  $F(x, y) = 0$ . Тогда в области  $G$  имеем  $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$ . Считая, что функции  $y = \varphi(x)$  и  $z = F(x, y)$  дифференцируемы в соответствующих точках, причем  $F'_y(x, y) \neq 0$ , по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0, \quad x \in G.$$

Из этого уравнения получаем

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial z}{\partial x_k}}{\frac{\partial z}{\partial y}},$$

что представляет собой иную запись формулы (2).

### Производная по направлению

Пусть функция нескольких переменных  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in \mathbf{R}^n$  и задан вектор  $s \neq \mathbf{0}$  с началом в точке  $x_0$ . Обозначим через  $s^\circ$  единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор  $s$ :

$$s^\circ = \frac{s}{|s|} = (v_1, \dots, v_n).$$

На векторе  $s$  возьмем точку  $x = x_0 + \Delta x = (x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2, \dots, x_{n0} + \Delta x_n)$ ,  $\Delta x_i = t v_i, i = 1, 2, \dots, n$ . При этом расстояние от точки  $x$  до  $x_0$

$$\Delta s = |\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}, \Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n).$$

*Определение.* Производной функции  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  в точке  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  по направлению вектора  $s$  называют число

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial s} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t s^\circ) - f(x_0)}{t},$$

если этот предел существует.

Из этого определения можно сделать вывод о том, что производная по направлению вектора представляет собой скорость изменения значений функции  $f$  в точке  $x_0$  в направлении вектора  $s$ .

*Теорема 3.* Если функция  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , то в этой точке она имеет производную по направлению любого ненулевого вектора  $s$ , причем

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} v_i,$$

где  $s^\circ = \frac{s}{|s|} = (v_1, \dots, v_n)$ .

*Доказательство.*

Полное приращение функция  $f$  в точке  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  можно имеет вид

$$\Delta f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + \alpha(\Delta x) |\Delta x|,$$

где  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Разделим обе части этого равенства на  $\Delta s = |\Delta x|$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta s} + \alpha(\Delta x).$$

Поскольку  $\frac{\Delta x_i}{\Delta s} = v_i, i = 1, \dots, n$ , то  $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} v_i + o(\Delta x)$ .

Переходя в этом выражении к пределу при  $\Delta s \rightarrow 0$ , по определению получаем

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} v_i.$$

### Градиент функции нескольких переменных

*Определение.* Пусть функция нескольких переменных  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  в точке  $x$  имеет все частные производные первого порядка. Вектор

$$\overline{\text{grad } f(x)} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\},$$

составленный из частных производных первого порядка функции  $f(x)$  в точке  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , называют градиентом функции  $f$  в точке  $x$ .

Используя определение градиента, можно записать производную функции  $f(x)$  в точке  $x$  по направлению вектора  $s$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial s} = (\overline{\text{grad } f(x)}, s).$$

#### Свойства градиента функции

1. Если функция  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  дифференцируема в точке  $x \in \mathbf{R}^n$ , то в этой точке

$$\frac{\partial f(x)}{\partial s} = \text{пр}_s \overline{\text{grad } f(x)},$$

где  $\text{пр}_s \overline{\text{grad } f(x)}$  – проекция вектора  $\overline{\text{grad } f(x)}$  на направление вектора  $s$ .

2. Если функция  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  дифференцируема в точке  $x \in \mathbf{R}^n$  и  $\overline{\text{grad } f(x)} \neq 0$ , то при  $s = \overline{\text{grad } f(x)}$  имеем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial s} = |\overline{\text{grad } f(x)}|.$$

3. Если функция  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  дифференцируема в точке  $x \in \mathbf{R}^n$ , то в этой точке вектор  $\overline{\text{grad } f(x)}$  указывает направление наибольшего роста функции  $f(x)$ .

4. Если функция  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  дифференцируема в точке  $x \in \mathbf{R}^n$ , то в этой точке вектор  $-\overline{\text{grad } f(x)}$  задает направление наибольшего убывания функции  $f(x)$ .

5. Если функция  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  дифференцируема в точке  $x \in \mathbf{R}^n$ , то наибольшая скорость роста (убывания) функции  $f(x)$  в этой точке равна  $|\overline{\text{grad } f(x)}|$  ( $-|\overline{\text{grad } f(x)}|$ ).