ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЛЕКЦИЯ 14

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $f(\boldsymbol{x})$, в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$, достигает в этой точке условного локального максимума (минимума) при условиях

$$\begin{cases} \varphi_1(\boldsymbol{x}) = 0, \\ \varphi_2(\boldsymbol{x}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(\boldsymbol{x}) = 0, \end{cases}$$

где $\varphi_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, m$ – некоторые функции нескольких переменных, определенные в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$, если существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ точки $\boldsymbol{x}_0$, что для всех точек $\boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{U}(\boldsymbol{x}_0, \delta)$, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, выполняется неравенство $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_0)$ $\;f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x}_0))$.

Условный локальный минимум и условный локальный максимум функции называются ее условным экстремумом.

Если неравенства в *определении* являются строгими, то говорят о строгом условном экстремуме функции.

Примечание. Обозначение $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2., .., x_n)$, т. к. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$.

Задачу исследования функции $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ на условный экстремум при ограничениях $\varphi_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, заданных с помощью функций $\varphi_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, записывают в виде

$$f(\boldsymbol{x}) \to extr \tag{1}$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

и называют задачей на условный экстремум.

При этом функцию $f(\boldsymbol{x})$ называют целевой функцией. Условия (2) в общем случае представляют собой систему нелинейных уравнений – уравнений связи, которую называют системой ограничений.

Необходимое условие условного экстремума

Рассмотрим случай функции двух переменных.

Теорема 1 (необходимое условие условного экстремума функции). Пусть функции двух переменных $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $P(x_0, y_0)$. Если функция $f(x, y)$ имеет в точке $P(x_0, y_0)$ условный экстремум при условии $\varphi(x, y) = 0$, причем $\overline{grad\,\varphi(x_0, y_0)} \neq 0$, то существует такое число λ, которое вместе с координатами x_0 и y_0 точки P удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f_x'(x,y) + \lambda \cdot \varphi_x'(x,y) = 0, \\ f_y'(x,y) + \lambda \cdot \varphi_y'(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Систему уравнений (3) можно записать в виде

$$\overline{grad\ f(x,y)} = -\lambda \cdot \overline{grad\,\varphi(x,y)},\ \varphi(x, y) = 0.$$

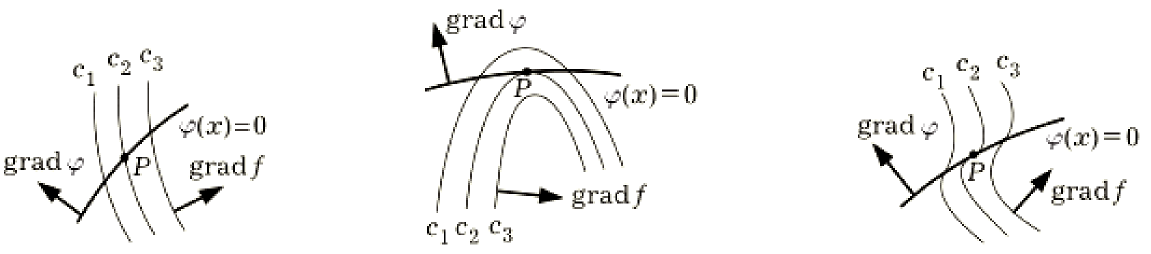
Дадим ей следующую геометрическую интерпретацию.

Если в точке условного экстремума выполняются условия *теоремы 1*, то линия уровня целевой функции касается кривой, заданной уравнением связи.

На рисунках 1 а, б, в показаны линии уровня функции $f(x, y)$: $f(x, y) = c_1$, $f(x, y) = c_2$, $f(x, y) = c_3$, $c_1 < c_2 < c_3$ (это определяется направлением градиента функции $f(x, y)$, являющимся направлением ее наибольшего возрастания).

На рисунках 1а и 1в показаны ситуации, при которых необходимое условие условного экстремума в точке P выполнено, но функция $f(x, y)$ на кривой $\varphi(x, y) = 0$ не может иметь экстремума.

На рисунке 1б показано поведение функции в окрестности точки условного максимума P. В соответствии с указанным направлением градиента функции $f(x, y)$ имеем $c_1 < c_2 < c_3$, что и обеспечивает локальный максимум $f(x, y)$ в точке P на кривой $\varphi(x, y) = 0$.



а *б* *в*

Рисунок 1

Введем функцию

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)). \qquad (4)$$

Определение. Функция

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y))$$

называется функцией Лагранжа, а параметр λ – множителем Лагранжа.

При этом систему уравнений (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} L_x'(x,y)=0, \\ L_y'(x,y)=0, \\ L_\lambda'(x,y)=0. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда задача на условный экстремум

$$f(\boldsymbol{x}) \to extr,$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, m,$$

при выполнении условий *теоремы 1* сводится к поиску стационарных точек функции Лагранжа (4) и их анализу.

В этом случае функция Лагранжа по определению имеет вид

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \varphi_i(\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$,

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Числа λ_i, $i = 1, \ldots, m$, называются множителями Лагранжа.

Теорема 2 (необходимое условие условного экстремума функции нескольких переменных).

Пусть функции $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ и $\varphi_i: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, $i = 1, \ldots, m$, определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$, причем ранг матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial \varphi_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & & \frac{\partial \varphi_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{7}$$

частных производных функций φ_i в точке $\boldsymbol{x}_0$ равен m. Если в точке $\boldsymbol{x}_0$ функция $f(\boldsymbol{x})$ имеет условный локальный экстремум при условиях $\varphi_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, которые вместе с координатами точки $\boldsymbol{x}_0$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_1}=0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_n}=0, \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial \lambda_1}=0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial \lambda_m}=0. \end{cases} \qquad (8)$$

Достаточные условия условного экстремума

Теорема 3 (достаточные условия условного экстремума).

Пусть функции $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ и $\varphi_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $i = 1, \ldots, m$, определены и дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$, $\varphi_i(\boldsymbol{x}_0) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, причем ранг матрицы $\Phi = \{ \dfrac{\partial \varphi_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j} \}$ (матрица (7)) частных производных функций φ_i в точке $\boldsymbol{x}_0$ равен m и координаты точки $\boldsymbol{x}_0$ вместе с координатами некоторого вектора $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2.,.., \lambda_m)$ удовлетворяют системе уравнений (8).

Тогда:

1) если квадратичная форма $d^2 L(\boldsymbol{x}_0)$ положительно определенная, то функция $f(\boldsymbol{x})$ имеет в точке $\boldsymbol{x}_0$ строгий условный локальный минимум при условии $\varphi_i(\boldsymbol{x}_0) = 0$, $i = 1, \ldots, m$;

2) если квадратичная форма $d^2 L(\boldsymbol{x}_0)$ отрицательно определенная, то функция $f(\boldsymbol{x})$) имеет в точке $\boldsymbol{x}_0$ строгий условный локальный максимум при условии $\varphi_i(\boldsymbol{x}_0) = 0$, $i = 1, \ldots, m$;

3) если квадратичная форма $d^2 L(\boldsymbol{x}_0)$ знакопеременная, то функция $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ не имеет условного экстремума.

Примечание. Если квадратичная форма $d^2 L(\boldsymbol{x}_0)$ вырождена, функция $f(\boldsymbol{x})$ может иметь в точке $\boldsymbol{x}_0$ условный локальный экстремум, а может и не иметь его. В этом случае по виду второго дифференциала в точке $\boldsymbol{x}_0$ выявить поведение функции $f(\boldsymbol{x})$ нельзя и необходимы другие методы исследования.

Тип квадратичной формы $d^2 L(\boldsymbol{x}_0)$ можно определить с помощью критерия Сильвестра или приведением ее к каноническому виду.

Исследование функций на условный экстремум

Рассмотрим задачу на условный экстремум

$$f(\mathbf{x}) \to extr,$$

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\ \ldots,\ m,$$

Алгоритм решения задачи на условный экстремум

1. Составляем функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \varphi_i(\mathbf{x}),$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$;

λ_i, $i = 1,\ \ldots,\ m$ – множители Лагранжа;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2. Находим частные производные первого порядка функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ по переменным x_j, $j = 1,\ \ldots,\ n$ и множителям Лагранжа λ_i, $i = 1,\ \ldots,\ m$.

3. Находим стационарные точки $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)_k$, $k = 1, 2, \ldots$ функции Лагранжа, решая систему уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_m} = 0. \end{cases}$$

4. Находим частные производные второго порядка функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ по переменным x_j, $j = 1,\ \ldots,\ n$ и составляем матрицу Гессе

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2\, \partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n\, \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1\, \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n\, \partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1\, \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2\, \partial x_n} & \ldots & \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

5. Исследуем каждую из стационарных точек на наличие в ней условного экстремума. Для этого:

а) находим элементы матрицы A в стационарной точке $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$;

б) находим угловые миноры полученной матрицы A в стационарной точке $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$;

в) делаем выводы.

Если все найденные угловые миноры матрицы A в стационарной точке $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ больше 0, то функция $f(\boldsymbol{x})$ имеет в точке $\boldsymbol{x}_0$ строгий условный локальный минимум при условии $\varphi_i(\boldsymbol{x}_0) = 0, i = 1, ..., m$.

Если найденные угловые миноры матрицы A в стационарной точке $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ чередуют знак, начиная со знака «минус», то функция $f(\boldsymbol{x})$ имеет в точке $\boldsymbol{x}_0$ строгий условный локальный максимум при условии $\varphi_i(\boldsymbol{x}_0) = 0, i = 1, ..., m$.

Если хотя бы один из найденных угловых миноров матрицы A в стационарной точке $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ равен 0, то необходимо использовать другие методы исследования.

В остальных случаях точка $\boldsymbol{x}_0$ не является точкой условного экстремума функции $f(\boldsymbol{x})$.

Задача.

Рассмотрим следующую задачу на условный экстремум:

$$x + 2y + z \to extr$$
$$2x^2 + y^2 - z^2 = 2,$$
$$y^2 + z^2 = 2.$$

Решение.

По условию задачи

$f(x, y, z) = x + 2y + z$, $\varphi_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 - 2$, $\varphi_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2$.

1. Составляем функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + 2y + z + \lambda_1 \cdot (2x^2 + y^2 - z^2 - 2) + \lambda_2 \cdot (y^2 + z^2 - 2).$$

2. Находим частные производные первого порядка функции Лагранжа $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$ по переменным x, y, z и множителям Лагранжа λ_1, λ_2.

$$L_x(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 1 + 4\lambda_1 \cdot x,$$

$$L_y(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2 + 2\lambda_1 \cdot y + 2\lambda_2 \cdot y,$$

$$L_z(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - 2\lambda_1 \cdot z + 2\lambda_2 \cdot z,$$

$$L_{\lambda_1}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2x^2 + y^2 - z^2 - 2,$$

$$L_{\lambda_2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = y^2 + z^2 - 2.$$

3. Находим стационарные точки функции Лагранжа, решая систему уравнения

$$\begin{aligned}
&1 + 4\lambda_1 \cdot x = 0,\\
&2 + 2\lambda_1 \cdot y + 2\lambda_2 \cdot y = 0,\\
&1 - 2\lambda_1 \cdot z + 2\lambda_2 \cdot z = 0,\\
&2x^2 + y^2 - z^2 - 2 = 0,\\
&y^2 + z^2 - 2 = 0.
\end{aligned}$$

В результате получаем две точки:

1) $x = 1, y = 1,\ z = 1,\ \lambda_1 = -\frac{1}{4},\ \lambda_2 = -\frac{3}{4};$

2) $x = -1, y = -1,\ z = -1,\ \lambda_1 = \frac{1}{4},\ \lambda_2 = \frac{3}{4}.$

Таким образом, получили две точки, которые могут быть точками условного экстремума: $P_1(1, 1, 1)$ и $P_2(-1, -1, -1)$.

4. Находим частные производные второго порядка функции Лагранжа $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$ по переменным x, y, z

$$L_{xx}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 4\lambda_1,$$

$$L_{yy}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2,$$

$$L_{zz}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = -2\lambda_1 + 2\lambda_2,$$

$$L_{xy}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 = L_{yx}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$L_{xz}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial z}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 = L_{zx}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$L_{yz}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial z}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 = L_{zy}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2).$$

Составляем матрицу Гессе

$$A = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{yx} & L_{zx} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{zy} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

5. Исследуем каждую из стационарных точек на наличие в ней условного экстремума.

1) Найдем элементы матрицы Гессе в точке $x = 1, y = 1, z = 1, \lambda_1 = -\frac{1}{4}, \lambda_2 = -\frac{3}{4}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим угловые миноры полученной матрицы A_1:

$$\Delta_1 = -1 < 0; \ \Delta_2 = 2 > 0; \ \Delta_3 = -2 < 0.$$

Поскольку угловые миноры матрицы A_1 в стационарной точке

$$(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = (1, 1, 1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$$

чередуют знак, начиная со знака «минус», то функция $f(x, y, z) = x + 2y + z$ имеет в точке $P_1(1, 1, 1)$ строгий условный локальный максимум при условиях

$$2x^2 + y^2 - z^2 = 2,$$
$$y^2 + z^2 = 2.$$

2) Найдем элементы матрицы Гессе в точке $x = -1, y = -1, z = -1, \lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{3}{4}$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим угловые миноры полученной матрицы A_1:

$$\Delta_1 = 1 > 0; \ \Delta_2 = 2 > 0; \ \Delta_3 = 2 > 0.$$

Поскольку все угловые миноры матрицы A_1 в стационарной точке

$$(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = (-1, -1, -1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$$

больше 0, то функция $f(x, y, z) = x + 2y + z$ имеет в точке $P_2(-1, -1, -1)$ строгий условный локальный минимум при условиях

$$2x^2 + y^2 - z^2 = 2,$$
$$y^2 + z^2 = 2.$$