

ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

СЕМИНАР 10

Функции нескольких переменных

Определение. Отображение, которое упорядоченному набору из n чисел ставит в соответствие число, т. е. отображение вида $f: A \rightarrow \mathbf{R}$, где $A \subset \mathbf{R}^n$, $n > 1$, называют функцией нескольких переменных.

Определение. Множество $D(f) = A$ точек из \mathbf{R}^n , в которых определена функция $f: A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, называют *областью определения* (существования) функции f , а множество $R(f) = \{y \in \mathbf{R}: y = f(x), x \in D(f)\}$ – *областью значений* (изменения) функции f .

Определение. Графиком функции нескольких переменных $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ называют подмножество $\Gamma(f)$ в \mathbf{R}^{n+1} , которое задается следующим образом

$$\Gamma(f) = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^{n+1} : x \in D(f), y = f(x) \} /$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а (x, y) – сокращенное обозначение арифметического вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, y)$.

Определение. Пусть задана функция нескольких переменных $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Множество $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = c\}$, где $c \in \mathbf{R}$ фиксированное, называют *поверхностью уровня*, соответствующей значению c .

Предел функции нескольких переменных

Определение. Точку $a \in \mathbf{R}^n$ называют *предельной точкой* множества $A \subset \mathbf{R}^n$, если в любой ее проколотой окрестности есть точки из множества A .

Определение. Пусть заданы функция нескольких переменных $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, множество $A \subset D(f)$, включенное в область определения $D(f)$ функции f , и предельная точка a множества A . Точку $b \in \mathbf{R}$ называют *пределом функции f в точке a* по множеству A , если для любой ε -окрестности $U(b, \varepsilon)$ точки b существует такая проколотая δ -окрестность $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ точки a , что $f(x) \in U(b, \varepsilon)$ при $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \cap A$.

В этом случае записывают $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Непрерывность функции нескольких переменных

Определение. Функцию нескольких переменных $f: A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ называют *непрерывной* в точке $a \in A$, предельной для множества A , если существует предел функции f при $x \xrightarrow[A]{} a$, равный значению функции в этой точке, т. е. если

$$\lim_{x \xrightarrow[A]{} a} f(x) = f(a).$$

Определение. Функцию $f: A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, непрерывную во всех точках множества A , называют *непрерывной на этом множестве*.

Дисциплина: Линейная алгебра
и функции нескольких переменных.

Семинар 10.

Область определения функции
нескольких переменных

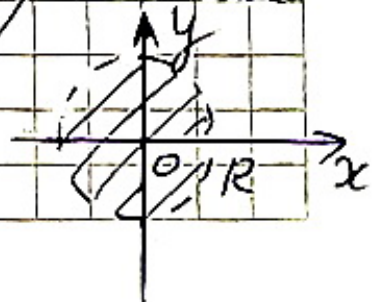
I. Найти область определения
функции двух переменных ($R = \text{const}$),
построить линии уровня.

№ 8.6 $z = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$

Решение. Выражение в знаменателе не должно быть равно 0, а подкоренное выражение больше нуля.

$R^2 - x^2 - y^2 > 0$, откуда $x^2 + y^2 < R^2$

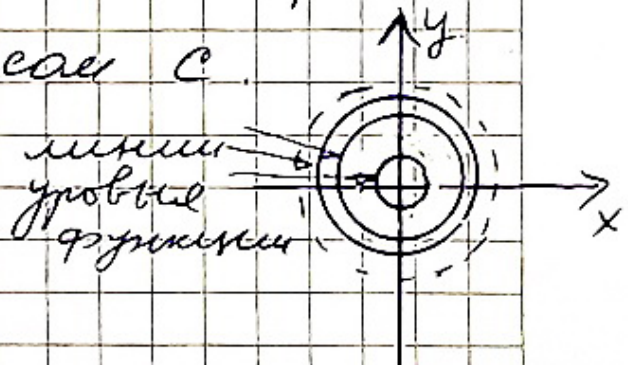
Таким образом, область определения функции - круг с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом R , не включая границу.



Линия уровня ^{функции} - это кривая, в каждой точке которой значение функции одинаково.

В рассматриваемой задаче линии уровня - это семейство линий вида $x^2 + y^2 = c$, $c = const$, $c > 0$.

Придавая константе c разные значения, получаем окружности (которые будут концентрическими) с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом c .



№ 8.8
$$z = \frac{2x + 3y - 1}{x - y}$$

Решение. Область определения функции: все точки плоскости, кроме точек, лежащих на прямой $y = x$.

Линии уровня: $\frac{2x+3y-1}{x-y} = c$, $c = \text{const}$

Если $c = 0$, то $2x+3y-1=0$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Если $c = 1$, то

$$\frac{2x+3y-1}{x-y} = 1$$

$$2x+3y-1 = x-y$$

$$x+4y-1=0$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

Если $c = -1$, то

$$\frac{2x+3y-1}{x-y} = -1$$

$$2x+3y-1 = -x+y$$

$$3x+2y-1=0$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Если $c = 2$, то

$$\frac{2x+3y-1}{x-y} = 2$$

$$2x+3y-1 = 2x-2y$$

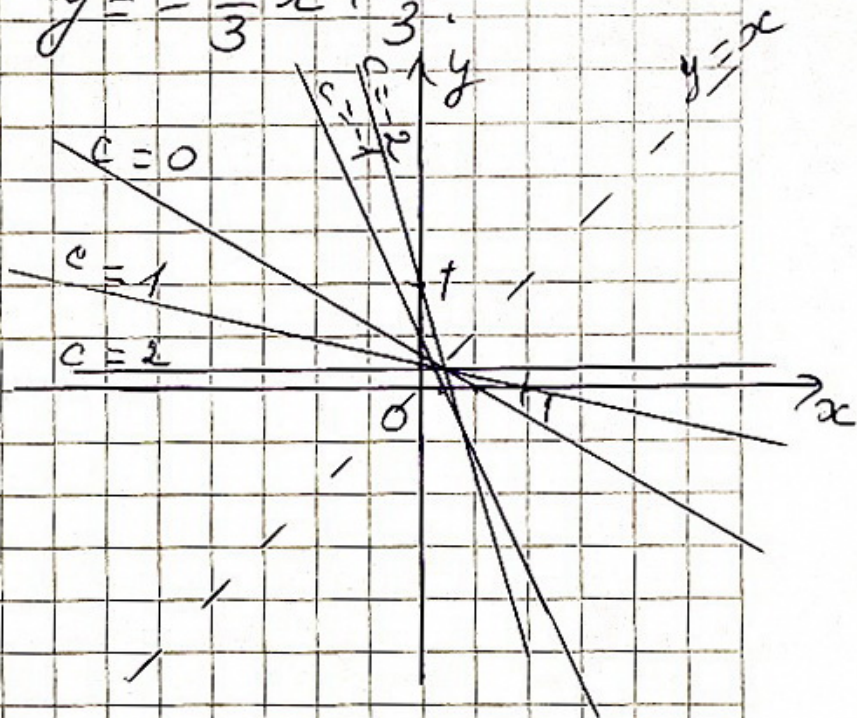
$$5y = 1, y = \frac{1}{5}$$

Если $c = -2$, то

$$\frac{2x+3y-1}{x-y} = -2$$

$$2x+3y-1 = -2x+2y$$

$$4x+y-1=0, y = -4x+1$$



№ 8, 10

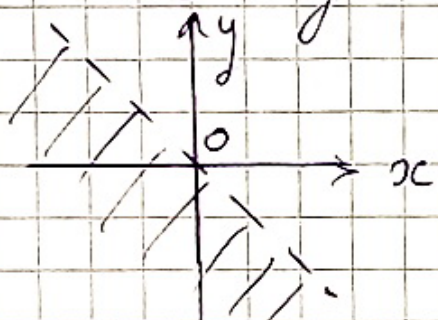
$$z = \ln(-x - y)$$

Решение

Область определения функции:

$$-x - y > 0 \Rightarrow x + y < 0 \quad \text{— полуплоскость}$$

без точек прямой $x + y = 0$
или $y = -x$.



Чтобы определить точки какой полуплоскости является решением неравенства, берем пробную точку из какой-либо полуплоскости и подставляем

ее в неравенство. Если координаты в нее подставляем верное неравенство, то точки полуплоскости, откуда взяли точку, являются решением неравенства.

Линии уровня функции: $\ln(-x - y) = c$,

$$\Rightarrow -x - y = e^c, \quad c = \text{const}$$

Если $c = 0$, то $-x - y = e^0$,

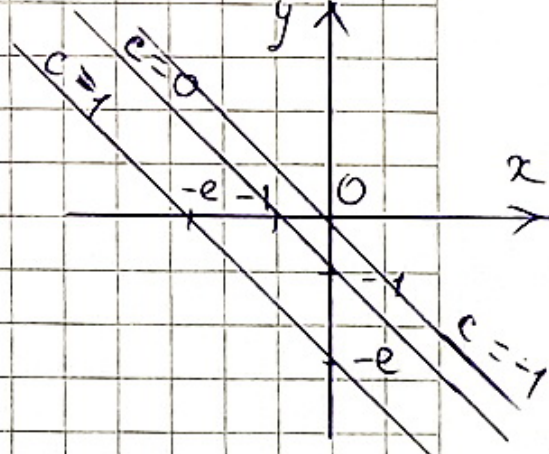
$$-x - y = 1,$$

$$y = -x - 1$$

Если $c = 1$, то $-x - y = e$,

$$y = -x - e$$

Если $c = -1$, то $-x - y = e^{-1}$, $y = -x - \frac{1}{e}$



и т.д.

$$\text{или } y = -x - 0,36$$

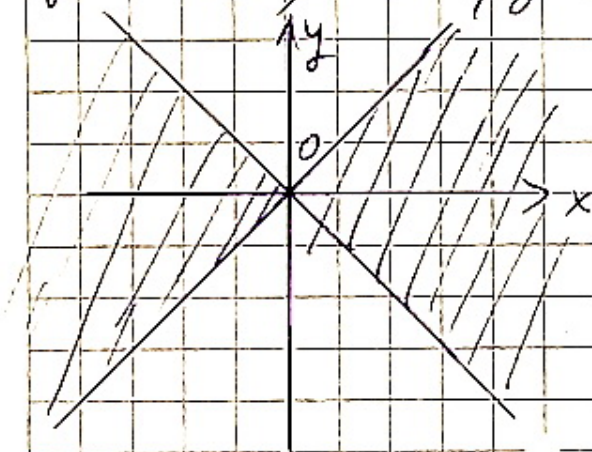
-5-

№ 8.18 $f(z, \varphi) = z \sqrt{\cos 2\varphi}$

Решение. Область определения

функции: $\cos 2\varphi \geq 0, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$
 $k \in \mathbb{Z},$
 $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k,$

т.е., область определения функции - точки плоскости, находящиеся между линиями: 1) $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) между линиями $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.



№ 8.20 $u = \ln(-x^2 - y^2 + z^2 + 1)$

Решение. Область определения функции

$$\begin{aligned} -x^2 - y^2 + z^2 + 1 &> 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 &< 1 \end{aligned}$$

Поверхности уровня функции заданы уравнением $\ln(-x^2 - y^2 + z^2 + 1) = c, c = \text{const}$

$$-x^2 - y^2 + z^2 + 1 = e^c,$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 - e^c$$

Оборачиваем $1 - e^c = a$.

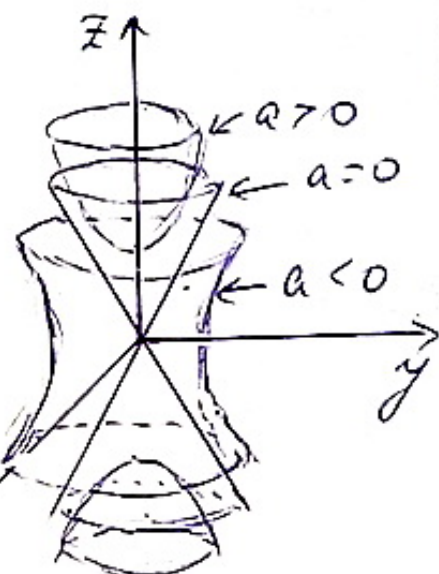
Тогда $x^2 + y^2 - z^2 = a$

Если $a = 0$, то

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 - \text{конус,}$$

если $a < 0$, то $x^2 + y^2 - z^2 = a$ - семейство однополосных гиперболоидов,

если $a > 0$, то $x^2 + y^2 - z^2 = a$ - семейство двухполосных гиперболоидов.



Предел функции нескольких переменных.

II. Найти пределы.

№ 8.33

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy}$$

Решение. Оборачиваем $z = xy$.

Условие $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ равносильно условию $z \rightarrow 0$ (т.е. $(x, y) \rightarrow (0, 0)$).

$$\text{Тогда } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \text{ (по 1-му замечательному пределу)}$$

$$\text{N 8.35} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$$

Решение. Сделаем замену
 $z = x^2 + y^2$.

Условие $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ равносильно
 условию $z \rightarrow 0$ ($(x, y) \rightarrow (0, 0)$).

Поэтому

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e \quad (\text{по 2-му замечательному пределу}).$$

№ 8.37. Показать, что при $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ функция $z = \frac{x}{y-x}$ может стремиться к любому пределу. Привести примеры такого приближения точки (x, y) к точке $(0, 0)$, при котором $\lim z = 3$, $\lim z = 2$, $\lim z = 1$, $\lim z = -2$.

Решение. Пусть точка $P(x, y)$ стремится к точке $P_0(0, 0)$. Рассмотрим изменение x и y вдоль прямой $y = kx$.

Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y-x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{kx-x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x(k-1)} = \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k-1}.$$

Предел не существует при $k=1$.

Предел зависит от траектории движения от точки $P(x, y)$ к точке $P_0(0, 0)$.

① $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} z = 3$. Тогда $\frac{1}{k-1} = 3$, $1 = 3k - 3$,
 $k = \frac{4}{3}$,
т.е. приближение к точке $P_0(0, 0)$
по прямой $y = \frac{4}{3}x$.

② $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} z = 2$. Тогда $\frac{1}{k-1} = 2$, $1 = 2k - 2$
 $k = \frac{3}{2}$,
т.е. приближение к точке $P_0(0, 0)$
по прямой $y = \frac{3}{2}x$.

③ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} z = 1$. Тогда $\frac{1}{k-1} = 1$, $1 = k - 1$,
 $k = 2$,
т.е. приближение к точке $P_0(0, 0)$ по
прямой $y = 2x$.

④ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} z = -2$, Тогда $\frac{1}{k-1} = -2$,

$$1 = -2k + 2, k = \frac{1}{2},$$

т.е. приближение к точке $P_0(0,0)$ по прямой $y = \frac{1}{2}x$.

Непрерывность функции нескольких переменных

III. Найти точки разрыва функции
двух переменных.

№ 8.48 $z = \frac{x^2 + y^2}{(x+y)(y^2 - x)}$

Решение. Функция не определена
при $(x+y)(y^2 - x) = 0$.

Отсюда получаем линии разрыва:

1) $x+y = 0 \Rightarrow y = -x$ - прямая.

2) $y^2 - x = 0 \Rightarrow y^2 = x$ - парабола.

№ 8.51. $u = \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1}$

Решение. Функция не определена
при $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Тогда поверхность разрыва
является эллипсоид с центром в
точке $O(0,0,0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

№ 8.46. $z = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$

Решение. Функция не определена
в точках (x,y) , в которых $\sin x \cdot \sin y = 0$,
т.е. $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $\sin y = 0 \Rightarrow y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Тогда поверхность разрыва
поверхности $x = \pi k$ или $y = \pi n, k, n \in \mathbb{Z}$.

Домашнее задание

Сборник задач по математике
для ВТУЗов. Под ред. А.В. Воронцова
и Б.П. Демидовича.

№ 8.7, 8.12, 8.20, 8.34, 8.36, 8.47, 8.52