Дисциплина: Линейная алгебра и функции нескольких переменных

Семинар 13.

Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных

Градиентом функции называется вектор, координатами которого являются частные производные функции по соответствующим координатам.

Градиент функции $u = f(x, y, z)$ имеет вид $\overline{\operatorname{grad} f(x,y,z)} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$

или $\overline{\operatorname{grad} f(x,y,z)} = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии (или поверхности) уровня функции. Направление градиента функции в каждой точке является направлением наибольшего возрастания функции.

Производная функции $u=f(x,y,z)$ по направлению $\bar{s}_0$ определяется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{s}_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где α, β, γ – углы между направлением вектора $\bar{s}_0$ и соответствующими осями координат;

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{s}_0$, являются координатами единичного вектора $\bar{s}_0$.

Производная по направлению $\bar{s}_0$ характеризует скорость изменения функции в данном направлении.

Производная функции $u=f(x,y,z)$ в направлении $\bar{s}_0$ связана с градиентом функции формулой

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{s}_0}=\underbrace{(\overline{\operatorname{grad} u}, \bar{s}_0)}_{\text{скалярное произведение.}}$$

① Найти градиент функции $u=xyz$ в точке $(1;2;3)$.
№1886

<u>Решение.</u> $\frac{\partial u}{\partial x}=yz, \frac{\partial u}{\partial y}=xz, \frac{\partial u}{\partial z}=xy$

Тогда $\overline{\operatorname{grad} u(x,y,z)}=yz\bar{i}+xz\cdot\bar{j}+xy\bar{k}$.

$\operatorname{grad} u(1;2,3)=2\cdot3\cdot\bar{i}+1\cdot3\cdot\bar{j}+1\cdot2\cdot\bar{k}$

$\overline{grad\, u(1;2;3)} = 6\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$

② Найти величину и направление
№1887 $\overline{grad\, u}$ в точке $(2;-2;1)$, если
$u = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. Найдем градиент функции
$u = x^2 + y^2 + z^2$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$.

Тогда $\overline{grad\, u(x,y,z)} = 2x \cdot \bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$

$\overline{grad\, u(2;-2;1)} = 4\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$.

Величина градиента ф-ции в точке $(2;-2;1)$

$|\overline{grad\, u(2;-2,1)}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$.

Направление вектора определяется направляющими косинусами:

$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(2,-2,1)}{|\overline{grad\, u(2;-2;1)}|}$; $\cos\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(2;-2;1)}{|\overline{grad\, u(2;-2;1)}|}$;

$\cos\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}(2;-2;1)}{|\overline{grad\, u(2;-2;1)}|}$

$\cos\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$; $\cos\gamma = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

③ Найти угол между градиентами
№1888. функции $z = \ln\frac{y}{x}$ в точках
$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ и $B(1,1)$.

Решение. Найдем градиент функции
$$z = \ln\frac{y}{x}:$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{y}.$$
Тогда $\overline{\operatorname{grad} z(x,y)} = \left(-\frac{1}{x}\right)\bar{i} + \frac{1}{y}\bar{j}$.

$\bar{a} = \overline{\operatorname{grad} z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)} = -2\bar{i} + 4\bar{j}$

$\bar{b} = \overline{\operatorname{grad} z(1,1)} = -\bar{i} + \bar{j}$

Угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ найдем по формуле
$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{-2\cdot(-1)+4\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2+(4)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2}} =$$
$$= \frac{6}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$ Тогда $\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$.

④ Найти производную функции
№1876 $z = x^2 - xy - 2y^2$ в точке $P(1,2)$ в направлении составляющем с осью OX угол в $60°$.

Решение. По условию $\alpha = 60°$. Угол β вектора с осью OY равен $\beta = 90° - \alpha = 30°$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 4y .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1;2) = 0 \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y}(1;2) = -9$$

Производная по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial S_0} = \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(1;2)\cos\beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial S_0} = 0 \cdot \cos 60^\circ + (-9) \cdot \cos 30^\circ = -9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Знак „–" показывает, что функция $z = x^2 - xy - 2y^2$ в данном направлении убывает.

(5) Найти производную функции
№ 1879 $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $M(1;2;-1)$ в направлении, составляющем одинаковые углы со всеми координатными осями.

<u>Решение.</u> Для направляющих косинусов справедлива формула

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Т.к. $\alpha = \beta = \gamma$, то $3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ или

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Найдем $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial x}(1;2;-1) = 2$;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3z ; \; \frac{\partial u}{\partial y}(1;2;-1) = 3 ;$$

$\frac{\partial u}{\partial z} = -3y$; $\frac{\partial u}{\partial z}(1;2;-1) = -6$;

Тогда $\frac{\partial u}{\partial \bar{s}_0} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

или $\frac{\partial u}{\partial \bar{s}_0} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 6 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(6) Найти производную функции
№1880 $u = xy + yz + zx$ в точке $M(2;1;3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5;5;15)$.

Решение. Найдем вектор $\overline{MN} = \{3;4;12\}$.

$|\overline{MN}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

Найдем направляющие косинусы вектора $\overline{MN}$: $\cos\alpha = \frac{x_{MN}}{|\overline{MN}|}$; $\cos\beta = \frac{y_{MN}}{|\overline{MN}|}$;

$\cos\gamma = \frac{z_{MN}}{|\overline{MN}|}$.

$\cos\alpha = \frac{3}{13}$; $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

Найдем частные производные функции в точке M:

$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z$; $\frac{\partial u}{\partial x}(2;1;3) = 4$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = x + z$; $\frac{\partial u}{\partial y}(2;1;3) = 5$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = y + x$, $\frac{\partial u}{\partial z}(2;1;3) = 3$.

Тогда производная функции по направлению вектора $\overline{MN}$:

$$\frac{\partial u}{\partial S_0} = 4 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{4}{13} + 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{68}{13}.$$

Домашнее задание

1. Найти производную функции $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ в точке $M(1;2)$ в направлении от точки M к точке $N(4;6)$.

2. Найти производную функции $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $P(1;1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

3. Найти градиент функции $z = x^2 + y^2 - 3xy$ в точке $A(2;1)$.

4. Найти градиент функции $u = \sqrt{x^2 - y^2 + yz}$ в точке $A(4;2;-1)$ и его величину.