Дисциплина: Линейная алгебра и функции нескольких переменных.

Семинар 14

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

I. Если уравнение поверхности задано в неявном виде $F(x,y,z)=0$ и в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ значение функции $F(x_0,y_0,z_0)=0$, то уравнение касательной к поверхности в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

(1) $$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

а уравнение нормали

(2) $$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

II. Если уравнение поверхности задано в явной форме $z=f(x,y)$, $f(x,y)$ - дифференцируемая функция, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ поверхности имеет вид

(3) $$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

а уравнение нормали

(4) $$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

---

1. Написать уравнение касательной и нормали к поверхности в указанных точках.

№1911. а) к параболоиду $z=x^2+y^2$ в точке $M(1;-2;5)$

Решение. Функция поверхности задано в явном виде, поэтому используем формулы (3) и (4).

Т.к. $f(x,y) = x^2+y^2$, то $f'_x(x;y) = 2x$, $f'_y(x;y) = 2y$.

$f'_x(x_0,y_0) = f'_x(1;-2) = 2$; $f'_y(x_0 y_0) = f'_y(1,-2) = -4$.

Тогда уравнение касательной имеет вид

$z-5 = 2(x-1) - 4(y+2)$ или $2x - 4y - z - 5 = 0$

а уравнение нормали

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}.$$

д) к конусу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ в точке $M(4;3;4)$.

Т.к. уравнение поверхности задано в неявном виде, то используем уравнения (1) и (2).

Т.к. $F(x,y,z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8}$, то $F'_x(x,y,z) = \frac{1}{8}x$;

$F'_y(x,y,z) = \frac{2}{9}y$;

$F'_z(x,y,z) = -\frac{1}{4}z$.

Найдем частные производные в точке $M(4,3,4)$

$F'_x(4;3;4) = \frac{1}{8}\cdot 4 = \frac{1}{2}$; $F'_y(4,3;4) = \frac{2}{9}\cdot 3 = \frac{2}{3}$,

$F'_z(4,3,4) = -\frac{1}{4}\cdot 4 = -1$.

Тогда уравнение касательной имеет вид

$\frac{1}{2}(x-4) + \frac{2}{3}(y-3) - 1(z-4) = 0$ или $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - z = 0$,

или $3x + 4y - 6z = 0$,

а уравнение нормали

$$\frac{x-4}{\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{\frac{2}{3}} = \frac{z-4}{-1}.$$

№1985. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

Решение

Вектор нормали к плоскости
$x+4y+6z=0$ имеет вид $\overline{n}_1=\{1;4;6\}$.
Найдем вектор нормали $\overline{n}_2$ к поверхности
$x^2+2y^2+3z^2=21$.
Вектор нормали $\overline{n}_2$ - это градиент к поверхности: $\overline{\mathrm{grad}\, F(x,y,z)}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y};\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$.
Уравнение поверхности запишем в виде
$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$.

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4y$; $\frac{\partial F}{\partial z}=6z \Rightarrow \overline{\mathrm{grad}\, F(x,y,z)}=\{2x;4y;6z\}$

Т. к. касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости $x+4y+6z=0$, то вектора $\overline{\mathrm{grad}\, F(x,y,z)}$ и $\overline{n}_1$ коллинеарны, и согласно условию коллинеарности векторов их координаты пропорциональны. Тогда

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{4}=\frac{6z}{6}.$$

Из этого уравнения следует: $y=z$
$y=2x$
$\Rightarrow z=2x$.

Подставим в уравнение поверхности $y=2x$ и $z=2x$, чтобы найти точки, в которых составим уравнения касательных.

$x^2+2(2x)^2+3(2x)^2=21$
$x^2+8x^2+12x^2=21 \Rightarrow 21x^2=21 \Rightarrow x_1=1$ или $x_2=-1$
$y_1=2$ $\quad y_2=-2$
$z_1=2$ $\quad z_2=-2$

Составим уравнение касательной к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=21$ в точке $M_1(1;2;2)$.
Т.к. $F'_x(1;2;2)=2$; $F'_y(1;2;2)=8$; $F'_z(1;2;2)=12$,
$\frac{\partial F}{\partial x}''(1;2;2)$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y}''(1;2;2)$ $\quad ''\frac{\partial F}{\partial z}(1;2;2)$

то уравнение касательной плоскости в точке $M_1(1;2;2)$ имеет вид

$$\underline{2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0}$$

или $\underline{x+4y+6z-21=0}$.

Составим уравнение касательной плоскости в точке $M_2(-1;-2;-2)$.

Т.к. $F'_x(-1;-2;-2)=-2$; $F'_y(-1;-2;-2)=-8$; $F'_z(-1;-2;-2)=-12$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_2(-1;-2;-2)$ имеет вид

$$\underline{-2(x+2)-8(y+2)-12(z+2)=0}$$

или $\underline{x+4y+6z+21=0}$.

Ответ: $x+4y+6z-21=0$

$x+4y+6z+21=0$.

№ 10.229 а) Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\sin x\cdot\cos y$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Функция поверхности задана в явном виде, поэтому будем использовать формулы (3) и (4).

Т.к. $f(x,y)=\sin x\cdot\cos y$, то $f'_x=\cos x\cdot\cos y$

$f'_y=-\sin x\cdot\sin y$.

$f'_x\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac12$; $f'_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=-\frac12$.

Тогда уравнение касательной плоскости в точке $M\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};1\right)$ имеет вид

$$\underline{z-\frac12=\frac12\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac12\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \text{ или } \underline{x-y-2z+1=0},$$

а уравнение нормали

$$\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac12}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{\frac12}=\frac{z-\frac12}{-1} \text{ или } \frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{z-\frac12}{-2}.$$

№ 10.235 На поверхности $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

Решение. Найдем градиент функции

$$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz-8$$

$F'_x(x,y,z)=2x+2y+2z$

$F'_y(x,y,z)=4y+2x+4z$

$F'_z(x,y,z)=6z+2x+4y$

Тогда $\overline{grad F(x,y,z)}=\{2x+2y+2z;4y+2x+4z;6z+2x+4y\}$.

1) Вектор нормали к плоскости XOY

$$\bar{n}_1=\{0;0;1\}.$$

Т.к. $\overline{grad F(x,y,z)} \parallel \bar{n}_1$, то координаты этих векторов пропорциональны

$$\frac{2x+2y+2z}{0}=\frac{2x+4y+4z}{0}=\frac{2x+4y+6z}{1}=t,$$

где t - коэффициент пропорциональности.

Из этого уравнения получаем

$$\begin{cases}2x+2y+2z=0\\2x+4y+4z=0\\2x+4y+6z=t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2y+2z=0\\2y+4z=t\end{cases} \Rightarrow 2z=t,$$

$$z=\frac{t}{2}$$

$$y=-\frac{t}{2}$$

$$x=0$$

Подставим $x=0, y=-\frac{t}{2}, z=\frac{t}{2}$ в уравнение поверхности

$$2\cdot\left(-\frac{t}{2}\right)^2+3\left(\frac{t}{2}\right)^2+4\left(-\frac{t}{2}\right)\left(\frac{t}{2}\right)=8$$

$$\frac{2}{4}t^2+\frac{3}{4}t^2-\frac{4}{4}t^2=8, \quad \frac{t^2}{4}=8, \quad t^2=32$$

$$t_1=4\sqrt{2}$$

$$t_2=-4\sqrt{2}$$

Если $t_1=4\sqrt{2}$, то $y_1=-2\sqrt{2}$; $z_1=2\sqrt{2}$

Если $t_2=-4\sqrt{2}$, то $y_2=2\sqrt{2}$, $z_2=-2\sqrt{2}$.

Тогда точки, в которых касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости XOY,

$M_1(0; -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ и $M_2(0; 2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.

2) Вектор нормали к плоскости XOZ

$$\bar{n}_2 = \{0; 1; 0\}.$$

Т.к. $\overline{grad F(x,y,z)} \parallel \bar{n}_2$, то

$$\frac{2x+2y+2z}{0} = \frac{2x+4y+4z}{1} = \frac{2x+4y+6z}{0} = t.$$

Из этого уравнения получаем

$$\begin{cases} 2x+2y+2z=0 \\ 2x+4y+4z=t \\ 2x+4y+6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+2z=t \\ 2y+4z=0 \end{cases} \quad -2z=t, \quad z=-\frac{t}{2}, \quad y=t, \quad x=-\frac{t}{2}.$$

Подставляем $x=0$, $y=\frac{t}{2}$, $z=-\frac{t}{2}$ в уравнение поверхности

$$\left(-\frac{t}{2}\right)^2+2t^2+3\left(-\frac{t}{2}\right)^2+2\left(-\frac{t^2}{2}\right)+2\left(-\frac{t}{2}\right)\left(-\frac{t}{2}\right)+4\left(-\frac{t^2}{2}\right)=8$$

$$\frac{t^2}{4}+2t^2+\frac{3}{4}t^2-t^2+\frac{2}{4}t^2-2t^2=8 \Rightarrow t^2=16$$

$$t_1=4, \quad t_2=-4$$

Если $t_2=-4$, то $x_2=2$; $y_2=-4$; $z_2=2$.
Если $t_1=4$, то $x_1=-2$; $y_1=4$, $z_1=-2$.

Тогда точки, в которых касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости XOZ,

$M_3(-2, 4; -2)$ и $M_4(2; -4; 2)$.

Аналогично находим точки, в которых касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости YOZ

$M_5(4; -2; 0)$ и $M_6(-4; 2; 0)$

В этом случае нормаль к плоскости YOZ

$$\bar{n}_3 = \{1; 0; 0\}.$$

№ 8.238. Под каким углом пересекаются цилиндр $x^2+y^2=a^2$ и гиперболический параболоид $bz=xy$ в общей точке (x_0, y_0, z_0)?

Решение. Углом между двумя поверхностями в точке их пересечения называется угол между касательными плоскостями, проведенными к данным поверхностям, в рассматриваемой точке.

Угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям.

Т.к. градиент функции, описывающей поверхность, направлен в каждой точке перпендикулярно поверхности, то угол между поверхностями в данной точке равен углу между градиентами к поверхностям в этой точке.

Градиент функции, описывающей цилиндр, имеет вид $\overline{\operatorname{grad} F(x,y,z)} = \{F'_x(x,y,z); F'_y(x,y,z); F'_z(x,y,z)\}$, где $F(x,y,z)=x^2+y^2-a^2$.

Тогда $\overline{\operatorname{grad} F(x,y,z)} = \{2x; 2y; 0\}$,

$$\overline{\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)} = \{2x_0, 2y_0, 0\}.$$

Градиент функции, описывающей гиперболический параболоид имеет вид

$$\overline{\operatorname{grad} G(x,y,z)} = \{G'_x(x,y,z); G'_y(x,y,z); G'_z(x,y,z)\},$$

где $G(x,y,z)=xy-bz$.

Тогда $\overline{\operatorname{grad} G(x,y,z)} = \{y, x, -b\}$,

$$\overline{\operatorname{grad} G(x_0,y_0,z_0)} = \{y_0; x_0; -b\}.$$

Используя скалярное произведение векторов, находим $\cos\varphi = \dfrac{\overline{\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)} \cdot \overline{\operatorname{grad} G(x_0,y_0,z_0)}}{|\overline{\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)}| \cdot |\overline{\operatorname{grad} G(x_0,y_0,z_0)}|}$, где φ - угол между векторами (градиентами).

$$\cos\varphi = \frac{2x_0\cdot y_0 + 2y_0\cdot x_0 + 0\cdot(-6)}{\sqrt{4x_0^2+4y_0^2+0^2}\cdot\sqrt{y_0^2+x_0^2+(-6)^2}} =$$

$$= \frac{4x_0y_0}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2+b^2}} = \left\{\begin{matrix} \text{т.к. } xy = bz \\ x^2+y^2=a^2 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}},$$

т. е. $$\varphi = \arccos\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

№8.230 Найти расстояние от начала координат до касательной плоскости к поверхности $z = y\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{a}$ в точке $\left(\frac{\pi a}{4}; a; a\right)$.

Решение. Составим уравнение касательной плоскости к поверхности $z = y\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{a}$.

Т. к. уравнение поверхности задано явно, то используем формулу (3).

$$f'_x(x,y) = y\frac{1}{\cos^2\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a}\ ;\ f'_y(x,y) = \mathrm{tg}\,\frac{x}{a}$$

В точке $\left(\frac{\pi a}{4}; a; a\right)$ имеем $f'_x\left(\frac{\pi a}{4}, a\right) = \frac{a}{a\cos^2\frac{\pi a}{4a}} = 2;$

$$f'_y\left(\frac{\pi a}{4}, a\right) = \mathrm{tg}\,\frac{\pi a}{4a} = 1$$

Тогда уравнение касательной плоскости в точке $\left(\frac{\pi a}{4}; a; a\right)$ имеет вид

$$z - a = 2\left(x - \frac{\pi a}{4}\right) + (y - a)$$

или $$2x + y - z - \frac{\pi a^3}{2} = 0.$$

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$ где A, B, C - координаты нормали к плоскости.

Расстояние от точки $O(0,0,0)$ до касательной плоскости $2x+y-z-\frac{\pi a^3}{2}=0$ равно

$$d=\frac{\left|2\cdot0+1\cdot0+(-1)\cdot0-\frac{\pi a^3}{2}\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\pi a^3}{2\sqrt{6}}$$

Т.о. $d=\frac{\pi a^3}{2\sqrt{6}}$.

Домашнее задание

№ 8.229(б), 8.231, 8.233(а), 8.234.