

**ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

СЕМИНАР 15

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция нескольких переменных $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, определенная в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, имеет в этой точке локальный максимум (минимум), если существует такая проколота окрестность $\overset{\circ}{U}(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ точки \mathbf{x}_0 , что для любой точки $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{U}(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ выполняется неравенство $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ ($f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$).

Локальный минимум и локальный максимум функции называются ее экстремумом.

Если неравенства в *определении* являются строгими, то говорят о строгом экстремуме функции.

Примечание. Обозначение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. к. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Задачу исследования функции нескольких переменных $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ на экстремум часто записывают в виде

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{extr.}$$

Алгоритм исследование функции нескольких переменных на экстремум

1. Находим частные производные первого порядка функции $f(\mathbf{x})$ по переменным $x_j, j = 1, \dots, n$.

2. Находим критические точки $\mathbf{x}_{0k}, k = 1, 2, \dots$ функции $f(\mathbf{x})$.

Критическими точками функции или точками, в которых возможен экстремум называют точки, в которых градиент функции

$$\overline{\text{grad } f(\mathbf{x})} = \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right\}$$

является нулевым вектором или не определен.

Для нахождения критических точек решаем систему уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

При исследовании функции на экстремум можно не рассматривать те критические точки, в которых хотя и не все частные производные существуют, но существует, по крайней мере, одна частная производная, не равная нулю.

3. Находим частные производные второго порядка функции $f(\mathbf{x})$ по переменным $x_j, j = 1, \dots, n$ и составляем матрицу Гессе

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

4. Исследуем каждую из критических точек на наличие в ней экстремума.

Для этого:

- а) находим элементы матрицы A в критической точке \mathbf{x}_{0k} ;
- б) находим угловые миноры полученной матрицы A в стационарной точке \mathbf{x}_{0k} ;
- в) делаем выводы.

Если все найденные угловые миноры матрицы A в критической точке \mathbf{x}_{0k} больше 0, то функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}_{0k} строгий локальный минимум.

Если найденные угловые миноры матрицы A в критической точке \mathbf{x}_{0k} чередуют знак, начиная со знака «минус», то функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}_{0k} строгий локальный максимум.

Если хотя бы один из найденных угловых миноров матрицы A в критической точке \mathbf{x}_{0k} равен 0, то необходимо использовать другие методы исследования.

В остальных случаях критическая точка \mathbf{x}_{0k} не является точкой условного экстремума функции $f(\mathbf{x})$.

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $f(\mathbf{x})$, в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, достигает в этой точке условного локального максимума (минимума) при условиях

$$\begin{cases} \varphi_1(\mathbf{x}) = 0, \\ \varphi_2(\mathbf{x}) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(\mathbf{x}) = 0, \end{cases}$$

где $\varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$ – некоторые функции нескольких переменных, определенные в окрестности точки \mathbf{x}_0 , если существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(\mathbf{x}_0, \delta)$ точки \mathbf{x}_0 , что для всех точек $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{U}(\mathbf{x}_0, \delta)$, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$, выполняется неравенство $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ ($f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$).

Условный локальный минимум и условный локальный максимум функции называются ее условным экстремумом.

Если неравенства в *определении* являются строгими, то говорят о строгом условном экстремуме функции.

Примечание. Обозначение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. к. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Задачу исследования функции нескольких переменных $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ на условный экстремум при ограничениях $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$, заданных с помощью функций $\varphi_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, записывают в виде

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{extr} \quad (1)$$

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

и называют задачей на условный экстремум.

При этом функцию нескольких переменных $f(\mathbf{x})$ называют целевой функцией. Условия (2) в общем случае представляют собой систему нелинейных уравнений – уравнений связи, которую называют системой ограничений.

Исследование функции нескольких переменных на условный экстремум

Алгоритм исследования функции нескольких переменных на условный экстремум

1. Составляем функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \varphi_i(\mathbf{x}),$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$;

$\lambda_i, i = 1, \dots, m$ – множители Лагранжа;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2. Находим частные производные первого порядка функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ по переменным $x_j, j = 1, \dots, n$ и множителям Лагранжа $\lambda_i, i = 1, \dots, m$.

3. Находим стационарные точки $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)_k, k = 1, 2, \dots$ функции Лагранжа, решая систему уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n} = 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_m} = 0. \end{array} \right.$$

4. Находим частные производные второго порядка функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ по переменным $x_j, j = 1, \dots, n$ и составляем матрицу Гессе

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

5. Исследуем каждую из стационарных точек на наличие в ней условного экстремума.

Для этого:

- а) находим элементы матрицы A в стационарной точке $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)_k$;
- б) находим угловые миноры полученной матрицы A в стационарной точке $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)_k$;
- в) делаем выводы.

Если все найденные угловые миноры матрицы A в стационарной точке $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)_k$ больше 0, то функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}_{0k} строгий условный локальный минимум при условии $\varphi_i(\mathbf{x}_{0k}) = 0, i = 1, \dots, m$.

Если найденные угловые миноры матрицы A в стационарной точке $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)_k$ чередуют знак, начиная со знака «минус», то функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}_{0k} строгий условный локальный максимум при условии $\varphi_i(\mathbf{x}_{0k}) = 0, i = 1, \dots, m$.

Если хотя бы один из найденных угловых миноров матрицы A в стационарной точке $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)_k$ равен 0, то необходимо использовать другие методы исследования.

В остальных случаях точка \mathbf{x}_{0k} не является точкой условного экстремума функции $f(\mathbf{x})$.

Экстремумы: Лекция 15
Матрица Гессе

Задача 15.

Экстремумы функции нескольких переменных

1. Найти экстремумы функции

№ 8.187 $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Решение 1. Найдём частные производные функции первого порядка.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$$

2. Найдём критические точки, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} / \cdot (-2) \\ + \end{array} \right\}$$

$$-3y = -9 \Rightarrow \underline{\underline{y = 3}}$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

Т.о., точка $B(0; 3)$ - критическая точка.

3. Найдём частные производные второго порядка функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y - 3) = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1.$$

Составим матрицу Гессе (она всегда симметрическая)
 $\text{т.е. } a_{ij} = a_{ji}; i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Найдём условия минора: $\Delta_1 = 2 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

5. Т.к. все условия минора матрица A больше нуля, то точка $B(0, 3)$ является точкой строгого локального минимума.

При этом $z_{\min}(x, y) = z(0, 3) = -9.$

№ 8 189 $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

Решение 1. Найдём частные производные первого порядка функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 3x^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y + 4.$$

2. Найдём критические точки, решив систему уравнений $\begin{cases} 6x - 3x^2 = 0 \\ 6y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}, \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$

Т.о., получили критические точки:

$$B(0, -\frac{2}{3}), C(2; -\frac{2}{3}).$$

3. Найдём частные производные второго порядка функции. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 - 6x; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

Составим матрицу Гессе.

$$A = \begin{pmatrix} 6-6x & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Исследуем на экстремум критическую точку $B(0, -\frac{2}{3})$.

Найдём элементы матрицы A в точке $B(0, -\frac{2}{3})$

$$A|_{(0, -\frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдём условия минора матрицы $A|_{(0, -\frac{2}{3})}$:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = 36 > 0.$$

Все условия минора больше 0 \Rightarrow

точка $B(0, -\frac{2}{3})$ - точка строго локального минимума функции z . При этом

$$z_{\min}(x, y) = z(0, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$$

5) Исследуем на экстремум критическую точку $C(2; -\frac{2}{3})$.

Найдём элементы матрицы A в точке $C(2; -\frac{2}{3})$

$$A|_{(2; -\frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Находим условия миноры матрицы $A|_{(2; -\frac{2}{3})}$:

$$\Delta_1 = -6 < 0, \Delta_2 = -36 < 0$$

Поскольку $\Delta_2 < 0$, то критическая точка $C(2; -\frac{2}{3})$ не является точкой экстремума.

Ответ: Точка $B(0; -\frac{2}{3})$ - точка локального минимума функции?

$$z_{\min}(x, y) = z(0; -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$$

№ 194 $u = xy^2z^3(1-x-2y-3z), x > 0, y > 0, z > 0.$

Решение. Найдем частные производные и проверим функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3(1-x-2y-3z) - xy^2z^3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy^2z^3(1-x-2y-3z) - 2xy^2z^3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2(1-x-2y-3z) - 3xy^2z^2$$

2. Находим критические точки, решая систему уравнений

$$\begin{cases} y^2z^3(1-x-2y-3z) - xy^2z^3 = 0 \\ 2xy^2z^3(1-x-2y-3z) - 2xy^2z^3 = 0 \\ 3xy^2z^2(1-x-2y-3z) - 3xy^2z^2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. $x > 0, y > 0, z > 0$, то разделим 1^е уравнение на y^2z^3 , 2^е уравнение - на $2xy^2z^3$, 3^е уравнение - на $3xy^2z^2$. Получаем

$$\begin{cases} 1-x-2y-3z=0 \\ 1-x-3y-3z=0 \\ 1-x-2y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+3z=1 \\ x+3y+3z=1 \\ x+2y+4z=1 \end{cases}$$

Решим систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{matrix} + \\ - \\ -2 \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 1 & 3 & 3 & | & 1 \\ 1 & 2 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -4 & -3 & | & -1 \\ 0 & -2 & -5 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -4 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & -7 & | & \dots \end{pmatrix}$$

Отсюда $7z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{7}$

$$-4y - 3 \cdot \frac{1}{7} = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{7}$$

$$2x + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$\Rightarrow B(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ - критическая точка

3. Найдите частные производные второго порядка функции.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y^2 z^3; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12xyz^3; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -36xy^2 z^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yz^3(1-x-2y-3z) - 2y^2 z^3 - 2xyz^3 = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -3y^2 z^3 - 3xy^2 z^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 6xyz^2(1-x-2y-3z) - 6xy^2 z^2 - 6xyz^3 = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

Составим матрицу Гессе

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

4. Вычислим частные производные второго порядка в критической точке $B(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{1}{7}) = -\frac{2}{7^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{1}{7}) = -\frac{12}{7^5};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{1}{7}) = -\frac{36}{7^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{1}{7}) = -\frac{2}{7^5};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{1}{7}) = -\frac{6}{7^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{6}{7^5}$$

Подставим значения этих частных производных в матрицу Гессе.

$$A|_{(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{1}{7})} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7^5} & -\frac{2}{7^5} & -\frac{6}{7^5} \\ -\frac{2}{7^5} & -\frac{12}{7^5} & -\frac{6}{7^5} \\ -\frac{6}{7^5} & -\frac{6}{7^5} & -\frac{36}{7^5} \end{pmatrix}$$

5. Найдите условия минора матрицы $A|_{(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{1}{7})}$:

$$\Delta_1 = -\frac{2}{7^5} < 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{2}{7^5} & -\frac{2}{7^5} \\ -\frac{2}{7^5} & -\frac{12}{7^5} \end{vmatrix} = \frac{20}{7^5} > 0,$$

$$\Delta_3 = |A|_{(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{1}{7})} = -1080 < 0.$$

III. Если известны координаты вершин $A(1, 1, 1)$ и $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и известно, что AB — гипотенуза прямого треугольного равнобедренного треугольника, то найти u_{max} , $(x, y, z) = u(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{7}$.

II. Найти условия экстремума функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$ методом Лагранжа. Составим функцию Лагранжа.

$$L(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

где $\varphi(x, y, \lambda) = x + 3 - y$

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 + \lambda(x + y + 3)$$

2. Находим частные производные первого порядка функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - y + 1 + \lambda; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - x + 1 + \lambda; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + 3.$$

3. Найдем стационарные точки, решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 1 + \lambda = 0 \\ 2y - x + 1 + \lambda = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Т.о. $B(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ — стационарная точка.

4. Находим частные производные второго порядка функции Лагранжа по x и по y

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1 = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}.$$

Составим матрицу Гессе

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Находим главные миноры матрицы A

$$\Delta_1 = 2 \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

т.к. главные миноры матрицы A, в точке P(-3/2; -1/2) -
- матрица ^{является} строго ^{положительно} определенная
функции. При этом min(x, y) = 2(-3/2) - 1/2 = -5/2.

№ 8.205. z = 2x + y при x^2 + y^2 = 1.

Решение. 1. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = z(x, y) - \lambda \cdot \varphi(x, y), \text{ где } \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

$$L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

2. Находим частные производные первого порядка
функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1$$

3. Находим стационарные точки, решая систему
уравнений

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Если } \lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ то } x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}, y_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Если } \lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ то } x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

В результате получаем стационарные точки
B(-2/√5; -1/√5; √5/2) и C(1/√5; 1/√5; -√5/2).

4. Находим частные производные второго порядка
функции Лагранжа

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}.$$

Составим матрицу Гессе

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

б.) Исследуем на условные экстремумы точку $B(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{2})$

Находим элемент матрицы Гессе в точке B

$$A|_{(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{2})} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Находим условные миноры матрицы $A|_{(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{2})}$

$$\Delta_1 = \sqrt{5} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 5 > 0.$$

П.к. условные миноры больше нуля, то точка $B(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}})$ является точкой строго

условного локального минимума: $Z_{\min}(x, y) = -\sqrt{5}$.

в.) Исследуем на условные экстремумы стационарную точку $C(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{5}}{2})$.

Находим элемент матрицы Гессе в точке C

$$A|_{(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{5}}{2})} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

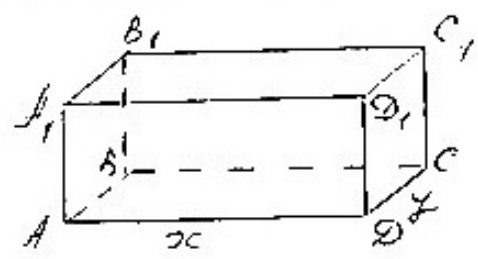
Находим условные миноры матрицы $A|_{(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{5}}{2})}$

$$\Delta_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2} < 0, \Delta_2 = 5 > 0.$$

П.к. условные миноры чередуются, то точка $C(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}})$ является точкой строго условного локального максимума

$$Z_{\max}(x, y) = z(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}.$$

III. Наибольшее и наименьшее значение функции
 п. 8.216 Из всех прямоугольных параллелепипедов,
 имеющих данную сумму длин ребер $12a$,
 найти параллелепипед с наибольшим объемом.



Решение

Обозначим

$AD = BC = A_1D_1 = B_1C_1 = x, x > 0;$
 $AB = DC = A_1B_1 = C_1D_1 = y, y > 0$
 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = z, z > 0.$

По условию заданы $4x + 4y + 4z = 12a$,
 откуда $x + y + z = 3a$ и $z = 3a - x - y$.

В качестве функции возьмем объем параллелепипеда, т.е. нужно найти его максимум.

Примечание. В качестве функции выдвигают параметр, который нужно максимизировать или минимизировать по условию задачи.

Объем равен $V = x \cdot y \cdot z$. С учетом $z = 3a - x - y$
 получаем $V = xy(3a - x - y)$ или $V = 3axy - x^2y - oxy^2$

1. Найдем частные производные первого порядка функции V : $\frac{\partial V}{\partial x} = 3ay - 2xy - y^2$,

$\frac{\partial V}{\partial y} = 3ax - x^2 - 2xy$.

2. Найдем критические точки, решая систему уравнение $\begin{cases} 3ay - 2xy - y^2 = 0 \\ 3ax - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$

Т.к. $x > 0, y > 0$, то разделим первое уравнение на y , а второе уравнение - на x :

$\begin{cases} 3a - 2x - y = 0 \\ 3a - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3a \\ x + 2y = 3a \end{cases} \begin{matrix} \\ / \cdot (-2) \end{matrix} +$
 $-3y = -3a \Rightarrow y = a$

Тогда $z = 3a - x - y = 3a - a - a = a$. $x = a$

Отсюда точка $B(a, a, a)$ является критической точкой.

3. Найдём главные производные второго порядка функции V

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2x; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 3a - 2x - 2y.$$

Составим матрицу Гессе

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 3a - 2x - 2y \\ 3a - 2x - 2y & -2y \end{pmatrix}.$$

4. Найдём миноры матрицы A в критической точке $B(a; a; a)$.

$$A|_{(a, a, a)} = \begin{pmatrix} -2a & -a \\ -a & -2a \end{pmatrix}.$$

5. Найдём условия минора матрицы $A|_{(a, a, a)}$:

$$\Delta_1 = -2a < 0, \text{ т.к. } a > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2a & -a \\ -a & -2a \end{vmatrix} = 4a^2 - a^2 = 3a^2 > 0.$$

П.к. условия минора чередуют знак, начиная с "-", то $B(a, a, a)$ является точкой строгого локального максимума функции.

Таким образом, искомыми параметрами является куб с длиной ребра a . При этом $V_{\max} = a^3$.

Домашнее задание

№ 204, 8.206, 8.188, 8.193, 8.221.