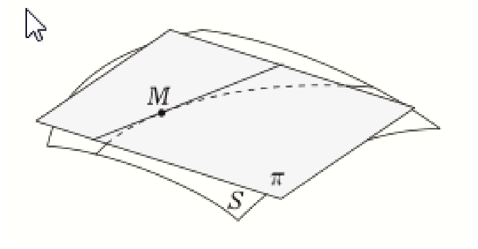
ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЛЕКЦИЯ 12

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ

Рассмотрим некоторую поверхность S в пространстве.



Пусть точка M принадлежит поверхности S и существует такая плоскость π, проходящая через точку M, которая содержит касательные, построенные в точке M ко всем кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку M. Плоскость π называют касательной плоскостью к поверхности S в точке M.

Прямую n, проходящую через точку М и перпендикулярную плоскости π, называют нормалью к поверхности S в точке M.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке M на этой поверхности найдем в предположении, что в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$ и выполнены следующие четыре условия.

1. Поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$.

2. Известны координаты (x_0, y_0, z_0) точки $M \in S$.

3. Функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в точке M.

4. Градиент функции $F(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ отличен от нуля, т. е. $\overline{grad\ f(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$.

Рассмотрим кривую γ, лежащую на поверхности S и проходящую через точку M. Зададим эту кривую параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t) \tag{1}$$

так, чтобы значение параметра $t = 0$ соответствовало точке M, т. е. чтобы

$$\varphi(0) = x_0,\ \psi(0) = y_0,\ \chi(0) = z_0.$$

Предположим, что в точке $t = 0$ функции $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ имеют производные, не обращающиеся в нуль одновременно.

Тогда

$$F(x_0, y_0, z_0) \equiv 0, \tag{2}$$

причем сложная функция в левой части тождества дифференцируема в точке $t = 0$.

Дифференцируя функцию (2) в точке $t = 0$ по правилу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\varphi'(0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\psi'(0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\chi'(0) = 0.$$

Записанное равенство означает, что вектор

$$\tau = (\varphi'(0), \psi'(0), \chi'(0)),$$

называемый касательным вектором к кривой γ в точке M, ортогонален вектору градиенту функции $F(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)} = \{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\},$$

не зависящему от выбора кривой γ.

Обозначим $F_x'(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$, $F_y'(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}$, $F_z'(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}$.

Тогда запишем градиент функции $F(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ в виде

$$\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)} = \{F_x'(x_0, y_0, z_0), F_y'(x_0, y_0, z_0), F_z'(x_0, y_0, z_0)\}.$$

Все касательные векторы в точке $M \in S$ всевозможных кривых, лежащих на поверхности S и проходящих через точку M, ортогональны градиенту $\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)}$ функции $F(x, y, z)$.

Построим плоскость π, проходящую через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)}$. Тогда касательный вектор l любой кривой, лежащей на поверхности S, в точке M будет параллелен плоскости π. Этот вектор имеет координаты $l = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Согласно определению, плоскость π является касательной плоскостью к поверхности S в точке M, а вектор $\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)}$ – перпендикулярным этой плоскости.

Тогда, поскольку вектора l и $\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)}$ ортогональны, то согласно условию перпендикулярности векторов их скалярное произведение равно 0. Записав это скалярное равнение, получаем общее уравнение плоскости π

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)\cdot(x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)\cdot(y - y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)\cdot(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Нормаль в точке M поверхности S определяется той же точкой M и тем же вектором $\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)}$, который является направляющим вектором этой прямой. Возьмем на нормали произвольную точку $M_1(x, y, z)$ и составим вектор $\overline{MM_1} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

Поскольку вектора $\overline{MM_1}$ и $\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)}$ коллинеарны, то согласно условию коллинеарности векторов их координаты пропорциональны. Тогда уравнение нормали к поверхности S в точке M можно составить как каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}. \qquad (2)$$

Замечание. Из приведенных рассуждений вытекает важное свойство градиента функции: если функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0) и градиент $\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$, то градиент ортогонален поверхности уровня $F(x, y, z) = c$, где $c = F(x_0, y_0, z_0)$. Действительно, в этом случае вектор $\overline{grad\,F(x_0, y_0, z_0)}$ является нормальным вектором касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) - c = 0$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Задача. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке $M(1; -2; 2)$.

Решение.

Рассмотрим функцию $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$. Эта функция обеспечивает выполнение условий 1 – 4 в данной задаче. Следовательно, касательная плоскость и нормаль к сфере в точке M существуют.

Найдем частные производные первого порядка функции $F(x, y, z)$

$$F_x'(x, y, z) = 2x,\ F_y'(x, y, z) = 2y,\ F_z'(x, y, z) = 2z.$$

Значения частных производных в точке $M(1, -2, 2)$ равны

$$F_x'(1, -2, 2) = 2,\ F_y'(1, -2, 2) = -4,\ F_z'(1, -2, 2) = 4.$$

Тогда уравнение касательной плоскости в точке M имеет вид

$$2(x-1) - 4(y+2) + 4(z-2) = 0,$$

а уравнения нормали в этой точке

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{4}.$$

Рассмотрим случай, когда поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $M(x_0, y_0)$. Найдем уравнения касательной плоскости и нормали в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Поверхность S опишем уравнением вида $F(x, y, z) = 0$, а в качестве функции $F(x, y, z)$ возьмем функцию $f(x, y) - z$, т. е. $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Тогда условия 1 – 4 будут выполнены, и, следовательно, в точке M существуют касательная плоскость и нормаль к поверхности S.

Найдем частные производные первого порядка функции $F(x, y, z)$

$$F_x'(x,y,z) = f_x'(x,y)\ ,\ F_y'(x,y,z) = f_y'(x,y),\ F_z'(x,y,z) = -1$$

и вычислим их в точке $M(x_0, y_0)$

$$F_x'(x_0, y_0, z_0) = f_x'(x_0, y_0)\ ,\ F_y'(x_0, y_0, z_0) = f_y'(x_0, y_0),\ F_z'(x_0, y_0, z_0) = -1$$

Подставляя найденные частные производные в точке $M(x_0, y_0)$в уравнение (1), получаем уравнение касательной плоскости

$$f_x'(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) - 1\ \cdot(z - z_0) = 0, \tag{3}$$

а подставляя частные производные в точке $M(x_0, y_0)$ в уравнение (2) получаем уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}\ . \tag{4}$$

Задача. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к графику функции $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ в точке $(2, -1, 7)$ (где $7 = f(2, -1)$).

Решение.

Функция $f(x, y)$ является дифференцируемой в точке $(2, -1)$. Поэтому в соответствующей точке графика этой функции существуют касательная плоскость и нормаль.

Введем функцию $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.

Найдем частные производные первого порядка функции $F(x, y, z)$

$$F_x'(x,y,z) = f_x'(x,y) = 2x - y\ ,\ F_y'(x,y,z) = f_y'(x,y) = -x + 2y\ ,\ F_z'(x,y,z) = -1.$$

Значения частных производных в точке $(2, -1)$ равны: $f_x'(2, -1) = 5$, $f_y'(2, -1) = -4$.

В соответствии с уравнением (3) получаем уравнение касательной плоскости к графику функции $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ в точке $(2, -1, 7)$

$$5\cdot(x - 2) - 4\cdot(y + 1) - 1\cdot(z - 7) = 0\ ,$$

а в соответствии с уравнением (4) – каноническое уравнение нормали

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-7}{-1}\ .$$

Понятие касательной плоскости позволяет дать геометрическую интерпретацию дифференциалу функции нескольких переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ двух переменных дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда ее дифференциал dz в этой точке равен

$$dz = f_x'(x_0, y_0)\,dx + f_y'(x_0, y_0)\,dy. \tag{5}$$

В то же время уравнение $z = f(x, y)$, рассматриваемое в прямоугольной системе координат *Oxyz*, задает поверхность в пространстве, и эта поверхность в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ имеет касательную плоскость с уравнением (3)

$$f_x'(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) - 1\cdot(z - z_0) = 0.$$

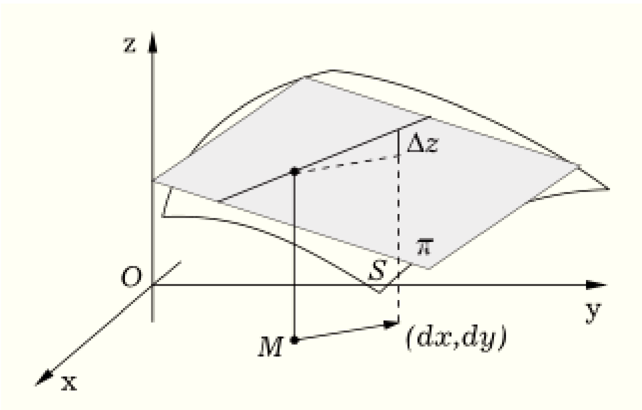
Запишем это уравнение в виде

$$(z - z_0) = f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Обозначив $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = \Delta z$, перепишем это уравнение в виде

$$\Delta z = f_x'(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y'(x_0, y_0) \cdot \Delta y. \qquad (6)$$

Поскольку приращения Δx и Δy независимых переменных x и y в точке (x_0, y_0) являются и дифференциалами dx и dy этих переменных, то из выражений (5) и (6) получаем, что дифференциал dz совпадает с приращением Δz.



Таким образом, дифференциал функции двух переменных есть приращение в точке M аппликаты точки на касательной плоскости, соответствующее приращениям dx и dy независимых переменных.

КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ КРИВОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим на плоскости xOy кривую γ и точку M на этой кривой. Найдем уравнения касательной и нормали к кривой γ в точке в предположении, что выполнены следующие четыре условия.

1. Кривая γ задана уравнением $f(x, y) = 0$.
2. Известны координаты (x_0, y_0) точки $M \in \gamma$.
3. Функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в точке M.
4. Градиент функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) отличен от нуля, т. е. $\overline{grad\ f(x_0, y_0)} \neq 0$.

Если кривая γ на плоскости является графиком некоторой действительной функции действительного переменного $y = \varphi(x)$, то касательная к этой кривой в точке $(x_0, f(x_0))$ определяется уравнением

$$y = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0), \qquad (7)$$

а достаточным условием существования касательной является дифференцируемость функции $y = \varphi(x)$ в точке $x = x_0$.

Пусть кривая γ задана уравнением $f(x, y) = 0$, функция $f(x, y)$ является дифференцируемой в точке $M(x_0, y_0)$, градиент функции $f(x, y)$ в точке M равен

$$\overline{grad\ f(x_0, y_0)} = \left\{ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right\} = \{ f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0)\}.$$

Пусть $\overline{grad\ f(x_0, y_0)} \neq 0$, тогда одна из частных производных функции $f(x, y)$ в точке M отлична от нуля. Пусть, например, $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда выполнены условия теоремы о неявной функции.

Согласно этой теореме, уравнение $f(x, y) = 0$ в некотором прямоугольнике P с центром в точке M задает дифференцируемую функцию $\varphi(x), x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \delta > 0$.

Тогда уравнение касательной к кривой γ в точке M можно записать в виде (7). Учитывая выражение $\varphi'(x_0) = -\dfrac{f_x'(x_0, y_0)}{f_y'(x_0, y_0)}$ для производной неявной функции $\varphi(x)$ и равенство $\varphi(x_0) = y_0$, получаем

$$y = y_0 - \frac{f_x'(x_0, y_0)}{f_y'(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) \quad \text{или} \quad y - y_0 = -\frac{f_x'(x_0, y_0)}{f_y'(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0).$$

Откуда уравнение касательной к кривой γ в точке M будет иметь вид

$$f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0. \tag{8}$$

Поскольку нормаль к кривой в точке M проходит через эту точку и перпендикулярна касательной, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)}. \tag{9}$$

Если $f_x'(x_0, y_0) \neq 0$, то, поменяв местами переменные x и y и повторив рассуждения, получим те же уравнения касательной и нормали.

Задача. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 - x^2 y + y^2 = 1$ в точке $M(1, 2)$.

Решение.

Функция $f(x, y) = x^3 - x^2 y + y^2 - 1$ является дифференцируемой в точке $(1, 2)$. Поэтому в соответствующей точке кривой существуют касательная и нормаль.

Найдем частные производные первого порядка функции $f(x, y)$

$$f_x'(x, y) = 3x^2 - 2xy, \quad f_y'(x, y) = -x^2 + 2y.$$

Значения частных производных в точке $(1, 2)$ равны: $f_x'(1, 2) = -1$, $f_y'(1, 2) = 3$.

В соответствии с уравнением (8) получаем уравнение касательной к кривой $x^3 - x^2 y + y^2 = 1$ в точке $M(1, 2)$

$$-1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 2) = 0,$$

а в соответствии с уравнением (9) – уравнение нормали

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{3} \quad \text{или} \quad 3x + y - 5 = 0.$$