ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЛЕКЦИЯ 13

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Необходимое условие экстремума

Определение. Функция нескольких переменных $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, определенная в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$, имеет в этой точке локальный максимум (минимум), если существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$ точки $\boldsymbol{x}_0$, что для любой точки $\boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{U}(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$ выполняется неравенство $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_0)$ $(f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x}_0))$.

Локальный минимум и локальный максимум функции называются ее экстремумом.

Если неравенства в *определении* являются строгими, то говорят о строгом экстремуме функции.

Примечание. Обозначение $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, .., x_n)$, т. к. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума функции). Пусть функция нескольких переменных $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ имеет в точке $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ экстремум. Если функция $f(\boldsymbol{x})$ имеет в точке $\boldsymbol{x}_0$ частную производную первого порядка по переменной x_i, $1 \le i \le n$, то эта частная производная равна нулю, т. е. $f'_{x_i}(\boldsymbol{x}_0) = 0$.

Следствие. Пусть функция нескольких переменных $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ имеет в точке $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ экстремум. Тогда

1) если в точке $\boldsymbol{x}_0$ определен градиент функции $f(\boldsymbol{x})$, то он равен нулю, т. е. $\overline{grad\ f(\boldsymbol{x}_0)} = 0$;

2) если функция $f(\boldsymbol{x})$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}_0$, то ее дифференциал в точке $\boldsymbol{x}_0$ равен 0, т .е. $df(\boldsymbol{x}_0) = 0$.

Из *следствия* вытекает, что точки экстремума функции нескольких переменных $f(\boldsymbol{x})$ надо искать либо среди точек, в которых $\overline{grad\ f(\boldsymbol{x})} = 0$ (т. е. среди стационарных точек функции), либо среди точек, в которых градиент не определен (не существует одна или несколько частных производных).

Точки, в которых градиент функции равен нулю или не определен, называют критическими точками функции или точками, в которых возможен экстремум.

Согласно *теореме 1* при исследовании функции на экстремум можно не рассматривать те критические точки, в которых хотя и не все частные производные существуют, но существует, по крайней мере, одна частная производная, не равная нулю.

Обратное утверждение *теоремы 1* неверно.

Пример. Покажем, что у функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ нет экстремумов (в этом можно также убедиться, построив в прямоугольной системе координат в пространстве график этой функции).

Функция $f(x, y)$ дифференцируема на всей плоскости. Поэтому ее точки экстремума могут быть лишь среди стационарных точек. Найдем частные производные функции $f(x, y)$

$$f_x'(x, y) = 2x,\ f_y'(x, y) = -2y,$$

приравняем их к нулю и решим полученную систему уравнений

$$2x = 0,$$
$$-2y = 0.$$

Эта система имеет единственное решение $x = 0, y = 0$. Значит, функция $f(x, y)$ может иметь экстремум только в точке $(0, 0)$.

Однако при $y = 0$ функция одного переменного $f(x, 0) = x^2$ в точке $x = 0$ имеет строгий локальный минимум, т. к. $f(x, 0) = x^2 > 0 = f(0, 0), x \neq 0$, а при $x = 0$ функция одного переменного $f(0, y)$ при $y = 0$ имеет строгий локальный максимум, т. к. $f(0, y) = -y^2 < 0 = f(0, 0), y \neq 0$.

Поэтому точка $(0, 0)$ не может быть точкой экстремума функции $f(x, y)$.

Достаточное условие экстремума

Теорема 2 (достаточное условие экстремума функции). Пусть функция нескольких переменных $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ определена в окрестности $U(\boldsymbol{x}_0)$ точки $\boldsymbol{x}_0$, дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $U(\boldsymbol{x}_0)$ и дифференциал функции в точке $\boldsymbol{x}_0$ равен 0, т. е. $df(\boldsymbol{x}_0) = 0$. Тогда

1) если квадратичная форма $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ положительно определенная, то в этой точке функция $f(\boldsymbol{x})$ имеет строгий локальный минимум;

2) если квадратичная форма $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ отрицательно определенная, то в этой точке функция $f(\boldsymbol{x})$ имеет строгий локальный максимум;

3) если квадратичная форма $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ знакопеременная, то в этой точке функция $f(\boldsymbol{x})$ не имеет экстремума.

Тип квадратичной формы $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ можно определить с помощью критерия Сильвестра или приведением ее к каноническому виду.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, дважды дифференцируемую в окрестности точки $P(x_0, y_0)$. Пусть в этой точке выполнено необходимое условие экстремума функции, т. е.

$$f_x'(x_0, y_0) = 0,\ f_y'(x_0, y_0) = 0.$$

В точке $P(x_0, y_0)$ матрица Гессе $f''(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$, представляющая собой матрицу квадратичной формы $d^2f(x_0, y_0)$, имеет вид

$$d^2f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}''(x_0, y_0) & f_{xy}''(x_0, y_0) \\ f_{ex}''(x_0, y_0) & f_{yy}''(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A = f_{xx}''(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0, y_0)$.

Используя эти обозначения, дифференциал второго порядка функции $f(x, y)$ в точке $P(x_0, y_0)$ можно записать в виде

$$d^2f(x_0, y_0) = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2,$$

а матрицу Гессе в виде

$$d^2f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Теорема 3 (достаточное условие экстремума для функции двух переменных).

Пусть функция $f(x, y)$ определена в окрестности $U(x_0, y_0)$ точки $P(x_0, y_0)$, дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $U(x_0, y_0)$ и дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $P(x_0, y_0)$ равен 0, т. е. $df(x_0, y_0) = 0$. Тогда

1) если $A > 0$ и $AC - B^2 > 0$, то в точке $P(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный минимум;

2) если $A < 0$ и $AC - B^2 > 0$, то в точке $P(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный максимум;

3) если $AC - B^2 < 0$, то функция $f(x, y)$ не имеет в точке $P(x_0, y_0)$ экстремума.

Примечание. Если $AC - B^2 = 0$, то квадратичная форма $d^2f(x_0, y_0)$ вырождена, функция $f(x, y)$ может иметь в точке $P(x_0, y_0)$ локальный экстремум, а может и не иметь его. В этом случае по виду второго дифференциала в точке $P(x_0, y_0)$ определить поведение функции $f(x, y)$ нельзя и необходимы другие методы исследования.

Исследование функций на экстремум

Задачу исследования функции нескольких переменных $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ на экстремум часто записывают в виде

$$f(\boldsymbol{x}) \to extr.$$

Решение этой задачи включает два этапа:

1. Нахождение критических точек, используя необходимое условие экстремума функции.

2. Исследование каждой критической точки на наличие в ней экстремума функции, используя достаточные условия экстремума функции или непосредственный анализ поведения функции в окрестности исследуемой точки.

Пример. Рассмотрим задачу $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 \to extr$.

Решение.

Найдем частные производные функции $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$ первого порядка

$$f_x'(x, y) = 3x^2 + 2y,\ f_y'(x, y) = 2x + 2y$$

и приравняем их к нулю

$$3x^2 + 2y = 0,$$

$$2x + 2y = 0.$$

Полученная система уравнений имеет два решения

$$x_1 = 0, y_1 = 0 \text{ и } x_2 = \frac{2}{3}, y_2 = -\frac{2}{3}.$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ имеет две стационарные точки

$$P_1(0, 0) \text{ и } P_2(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}).$$

Найдем частные производные второго порядка функции $f(x, y)$

$$f_{xx}''(x, y) = 6x,\ f_{xy}''(x_0, y_0) = 2, f_{yy}''(x, y) = 2.$$

1) Подставляя в найденные частные производные второго порядка функции $f(x, y)$ координаты точки $P_1(0, 0)$, получаем

$$A = f_{xx}''(0, 0) = 0, B = f_{xy}''(0, 0) = 2, C = f_{yy}''(0, 0) = 2.$$

Отсюда $AC - B^2 = 0 \cdot 2 - 2^2 = -4 < 0$, и, согласно достаточным условиям экстремума функции двух переменных, в точке $P_1(0, 0)$ функция $f(x, y)$ экстремума не имеет.

2) Подставляя в найденные частные производные второго порядка функции $f(x, y)$ координаты точки $P_2(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, получаем

$$A = f_{xx}''(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = 4, B = f_{xy}''(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = 2, C = f_{yy}''(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = 2.$$

Отсюда $A = 4 > 0$, $AC - B^2 = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4 > 0$, и, согласно достаточным условиям экстремума функции двух переменных, в точке $P_2(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный минимум. При этом $f(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$.

Следует отметить, что у функции $f(x, y)$ есть значения, меньшие $f_{min}(x, y)$. Например, $f(-10, 0) = -1000$. Таким образом, минимум функции в точке P_2 носит локальный характер, а не абсолютный. Значение функции $f(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$ является наименьшим лишь в некоторой окрестности точки P_2, а не во всей плоскости.