ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ЛЕКЦИЯ 10

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные

Определение 1. Пусть функция $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ определена в δ-окрестности $U(a, \delta)$ точки $a \in \boldsymbol{R}^n$. Обозначим через Δx_i такое приращение независимого переменного x_i в точке a, при котором точка $a = (a_1, ..., a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ принадлежит $U(a, \delta)$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|\Delta x_i| < \delta$. Тогда определена разность значений функции f, соответствующая приращению Δx_i:

$$\Delta_i f(a, \Delta x_i) = f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Эту разность называют *частным приращением функции нескольких переменных* f в точке a по независимому переменному x_i.

Частное приращение обозначают также через $\Delta_i f(a)$ или $\Delta_{x\,i} f(a)$.

Определение 2. Частной производной функции f в точке a по переменному x_i называется предел отношения частного приращения функции по переменному x_i к приращению Δx_i этого же переменного при $\Delta x_i \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(a)}{\Delta x_i}.$$

Дифференцируемость функций нескольких переменных

Пусть функция нескольких переменных $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ определена в некоторой окрестности точки $x \in \boldsymbol{R}^n$ и $\Delta x\,(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)^{\mathrm{T}}$ – такой вектор приращений независимых переменных, что точка $x + \Delta x$ тоже принадлежит этой окрестности. В этом случае определено *полное приращение функции* f

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

соответствующее приращению Δx переменных в точке x, где

$$|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}.$$

Определение 3. Функцию $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, определенную в некоторой окрестности точки x, называют *дифференцируемой в точке* x, если ее полное приращение в окрестности этой точки можно представить в виде

$$\Delta f(x) = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + ... + a_n \Delta x_n + \alpha(\Delta x)\,|\Delta x|, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ не зависят от приращений Δx, а функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$.

Определение 4. Функцию f называют дифференцируемой в области $X \subset \boldsymbol{R}^n$, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Теорема 1 (*необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных*).

Если функция нескольких переменных $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ дифференцируема в точке x, то у этой функции в точке x существуют все (конечные) частные производные \

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1, 2, \dots, n,$$

причем коэффициенты a_i в выражении (1) равны значениям соответствующих частных производных в точке x

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство.

Для дифференцируемой в точке x функции f представление (1) верно для любого приращения Δx. В том числе, это представление верно, если приращение Δx имеет вид

$$\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_i, 0, \dots 0)^{\mathrm{T}},\ \Delta x_i \neq 0,$$

где номер i выбран произвольным образом и зафиксирован. В этом случае $|\Delta x| = |\Delta x_i|$, соответствующее полное приращение $\Delta f(x)$ функции $f(x)$ сводится к ее i-му частному приращению $\Delta_i f(x)$, а равенство (1) принимает вид

$$\Delta f(x) = \Delta_i f(x) = a_{\mathrm{i}} \Delta x_i + \alpha(\Delta x)|\Delta x|.$$

Разделим это равенство на Δx_I и найдем предел при $\Delta x_i \to 0$. В результате получим

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(a)}{\Delta x_i} = a_i + \lim_{\Delta x_i \to 0} \alpha(\Delta x) \frac{|\Delta x_i|}{\Delta x_i} = a_i \cdot$$

Поскольку функция $\alpha(\Delta x)$ бесконечно малая при $\Delta x_i \to 0$, а отношение $\frac{|\Delta x_i|}{\Delta x_i} = \pm 1$ ограничено, так что последний предел равен нулю.

Следовательно, производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ в точке x существует и равна a_i.

Теорема доказана.

Следствие. Если функция нескольких переменных $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ дифференцируема в точке x, то в этой точке ее полное приращение $\Delta f(x)$ можно представить в виде

$$\Delta f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n + \alpha(\Delta x)\,|\Delta x|,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Теорема 2 (*необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных, связанное с ее непрерывностью*).

Если функция нескольких переменных дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке a. Тогда ее полное приращение в точке a можно представить в виде

$$\Delta f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} \Delta x_k + \alpha(\Delta x)\,|\Delta x|,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отсюда следует, что существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x_k + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)\,|\Delta x| = 0,$$

означающий, что функция $f(x)$ непрерывны в точке a.

Действительно, полагая $\Delta x = x - a$, получаем, что $f(x) = f(a) + \Delta f(a)$. При $x \to a$ имеем $\Delta x \to 0$ и, следовательно, $\Delta f(a) \to 0$.

Таким образом, $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$, что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке a.

Теорема доказана.

Следствие. Если функция нескольких переменных дифференцируема в некоторой области, то она непрерывна в этой области.