ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ЛЕКЦИЯ 7

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхности второго порядка

Рассмотрим линейное арифметическое пространство $\boldsymbol{R}^n$, являющееся евклидовым пространством со скалярным произведением $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} =\cdot (y_1, \ldots, y_n)$.

Векторы из $\boldsymbol{R}^3$ или $\boldsymbol{R}^2$ можно рассматривать как геометрические векторы в «точечном» трехмерном или двумерном пространстве соответственно.

Зафиксировав в трехмерном пространстве точку, можем считать ее началом каждого вектора, а тогда каждая точка пространства определяется как конец некоторого геометрического вектора.

Аналогично и в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ векторы будем трактовать как точки.

Определение 1. Некоторую фиксированную точку O (или вектор) и ортонормированный базис $\boldsymbol{e}$ в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ называют прямоугольной системой координат в $\boldsymbol{R}^n$, точку O – началом системы координат. Координатами произвольной точки M (или вектора из $\boldsymbol{R}^n$) в этом пространстве называют координаты вектора OM в базисе $\boldsymbol{e}$.

Определение 2. Поверхностью второго порядка в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ называют множество точек $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, координаты $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ которых в прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k + c = 0, \tag{1}$$

где a_{ij}, b_k, $c = const$ – действительные коэффициенты, причем хотя бы один из коэффициентов a_{ij}, $1 \le i \le j \le n$ отличен от нуля

Замечание. Поверхность второго порядка в $\boldsymbol{R}^n$ при $n = 3$ представляет собой поверхность в пространстве, а при $n = 2$ – кривую на плоскости.

Уравнение (1) можно записать в матричной форме

$$x^{\mathrm{T}} A x + 2 b^{\mathrm{T}} x + c = 0, \tag{2}$$

где $x = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n)^{\mathrm{T}}$ – матрица-столбец, составленный из переменных;

$A = (a_{ij})$ – симметрическая матрица порядка n, $a_{ij} = a_{ji}$,

$b = (b_1 \ b_2 \ \ldots \ b_n)^{\mathrm{T}}$ – матрица-столбец, составленный из коэффициентов b_k .

Первое слагаемое левой части уравнения (2) представляет собой квадратичную форму $x^{\mathrm{T}} A x$ от координат точки. Ее называют квадратичной формой поверхности (1) (или кривой при $n = 2$) второго порядка.

Второе слагаемое представляет собой линейное слагаемое. Оно представляет собой запись удвоенного скалярного произведения вектора $\boldsymbol{b}$ и вектора $\boldsymbol{x}$.

Изменение системы координат

Пусть старая прямоугольная система координат в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ состоит из ортонормированного базиса $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ с началом в точке $\boldsymbol{b}_0$. Пусть новая прямоугольная система координат состоит из ортонормированного базиса $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n)$ и начала $\boldsymbol{c}_0$.

Рассмотрим произвольную точку $\boldsymbol{x}$ с матицами координат x_b и x_c соответственно в старой и новой системах координат.

Из определения координат точки в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ имеем соотношения

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}\, x_b, \ \ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{c}\, x_c .$$

Приравнивая выражения для $\boldsymbol{x}$, получаем

$$\boldsymbol{b}\, x_b + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{c}\, x_c + \boldsymbol{c}_0 . \tag{3}$$

Пусть U – матрица перехода из ортонормированного базиса $\boldsymbol{b}$ старой системы координат в ортонормированный базис $\boldsymbol{c}$ новой системы координат. Тогда U – ортогональная матрица (по теорему 5.9) и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\, U$.

Подставляя это представление для $\boldsymbol{c}$ в равенство (3), получаем

$$\boldsymbol{b}\, x_b + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}\, U x_c + \boldsymbol{c}_0 ,$$

или

$$\boldsymbol{b}\, (x_b - U x_c) = \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{b}_0 , \tag{4}$$

Координаты вектора $\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{b}_0$ относительно базиса $\boldsymbol{b}$ представляют собой координаты точки $\boldsymbol{c}_0$ (начала новой системы координат) относительно старой системы координат $\boldsymbol{b}$, которые обозначим через $c_{0,b}$: $\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}\, c_{0,b}$.

Подставим это равенство в правую часть выражения (4)

$$\boldsymbol{b}\, (x_b - U x_c) = \boldsymbol{b}\, c_{0,b} .$$

Отсюда следует, что

$$x_b = U x_c + c_{0,b} . \tag{5}$$

Соотношение (5) представляет собой формулу преобразования координат при изменении системы координат.

Если $c_{0,b} = 0$, т. е. начала старой и новой систем координат совпадают, то преобразование координат принимает вид

$$x_b = U x_c . \tag{6}$$

В двумерном пространстве при дополнительном условии $det\,U = 1$ преобразование (6) представляет собой поворот системы координат вокруг неподвижного начала системы координат.

В трехмерном пространстве при том же условии $det\,U = 1$ это преобразование является поворотом системы координат вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат. Ось поворота определяется собственным вектором матрицы U с собственным значением 1.

Если $det\,U = -1$, то преобразование системы координат, кроме поворота, включает преобразование симметрии относительно некоторой плоскости или сводится к одной симметрии.

Пример. Преобразование системы координат с матрицей

$$U = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & -sin\,\varphi & 0 \\ sin\,\varphi & cos\,\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

состоит в повороте на угол φ вокруг третьего вектора исходного базиса и последующей симметрии относительно плоскости, которой параллельны первые два вектора (при повороте эта плоскость перейдет в себя).

По аналогии с двумерным и трехмерным случаями условно назовем замену (6) при произвольном n поворотом системы координат в случае, если $det\,U = 1$, и поворотом системы координат с отражением (симметрией) в случае, если $det\,U = -1$.

Введенные термины условны потому, что в n-мерном пространстве при $n > 3$ теряется наглядный смысл понятия «поворот».

Если в преобразовании (5) матрица U является единичной, т. е. $U = E$, то старая и новая системы координат имеют один и тот же ортонормированный базис.

В этом случае преобразование координат имеет вид

$$x_b = x_c + c_{0,b}\,. \tag{7}$$

При $n = 2, 3$ такое преобразование означает параллельный перенос системы координат, при котором направления осей координат не изменяются.

При $n > 3$ преобразование (7) также будем называть параллельным переносом системы координат.

Любое преобразование координат вида (5) можно представить как последовательное применение двух преобразований $x' = U\,x_c$ и $x_b = x' + c_{0,b}$, которые означают параллельный перенос исходной системы координат в точку c и последующий ее поворот (возможно, с отражением), определяемый матрицей U.