ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ЛЕКЦИЯ 8

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0, \qquad (1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ – действительные коэффициенты, причем хотя бы один из коэффициентов a_{ij}, $1 \le i \le j \le 2$ отличен от нуля.

Левую часть уравнения (1) составляют три группы членов:

1) квадратичная форма

$$F_2(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 .$$

Выражение $F_2(x_1, x_2)$ представляет собой квадратичную форму с симметрической матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$;

2) линейная форма членов первой степени

$$F_1(x_1, x_2) = b_1 x_1 + b_2 x_2 ;$$

3) свободный член $F_0 = c$.

С учетом этого соотношение (1) можно записать в виде

$$F_2(x_1, x_2) + F_1(x_1, x_2) + F_0 = 0.$$

Обозначим

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, составленная из координат точки в базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$;

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, составленная из коэффициентов при переменных x_1, x_2.

Тогда уравнение (1) можно записать в матричной форме

$$x^{\mathrm{T}} A x + x^{\mathrm{T}} b + c = \Theta, \qquad (2)$$

где Θ – нулевая матрица.

Найдем собственные значения λ_1 и λ_2 линейного оператора, соответствующего симметрической матрице A, и ортонормированные собственные векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2.

Переход от ортонормированного базиса $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ к ортонормированному базису $\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ с помощью матрицы U, координатные столбцы которой являются координатами ми собственных векторов $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ в базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

Преобразование координат проведем с помощью соотношения

$$x = U\,y\,, \tag{3}$$

где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, составленная из координат точки в базисе $\boldsymbol{e}' = (\,\boldsymbol{e}'_1\,,\boldsymbol{e}'_2\,)$.

Подставив выражение (3) в выражение (2), получаем

$$(\,U\,y\,)^{\mathrm{т}} A\,U\,y + (\,U\,y\,)^{\mathrm{т}}\,b + c = \Theta$$

откуда

$$y^{\mathrm{т}}\,U^{\mathrm{т}}A\,U\,y + y^{\mathrm{т}}\,U^{\mathrm{т}}\,b + c = \Theta, \tag{4}$$

где $A' = U^{\mathrm{т}} A\,U$ – матрица квадратичной формы в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}' = (\,\boldsymbol{e}'_1\,,\boldsymbol{e}'_2\,)$ из собственных векторов.

В этом базисе матрица квадратичной формы имеет диагональный вид

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (4) будет иметь вид

$$y^{\mathrm{т}} A' y + y^{\mathrm{т}}\,U^{\mathrm{т}}\,b + c = \Theta. \tag{5}$$

Таким образом, в новых координатах уравнение (5), а следовательно, исходное уравнение (1) запишется так

$$\lambda_1 y_1^{\,2} + \lambda_2 y_2^{\,2} + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + c = 0\,, \tag{6}$$

где $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = U^{\mathrm{т}}\,b.$

Полученное уравнение (6) в новых координатах $y_1\,,\,y_2$ не содержит взаимных произведений разноименных переменных и определяет кривую второго порядка на плоскости: эллипс, гиперболу, параболу или их вырожденные виды. Выделив полные квадраты по переменным $y_1\,,\,y_2$ получаем каноническое уравнение параллельно смещенной кривой второго порядка.

Установим связь между коэффициентами $a_{11}\,,\,a_{12} = a_{21}\,,\,a_{22}$ в уравнении (1) и собственными значениями λ_1 и λ_2 линейного оператора. Эти зависимости позволяют вывести критерий для определения типа кривой второго порядка по виду общего уравнения (1) без приведения к выражению (6).

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

матрицы квадратичной формы $F_2\,(\,x_1\,,x_2\,)$ приводит к квадратному уравнению относительно λ

$$\lambda^2 + \lambda\,(\,a_{11} + \,a_{22}\,) + (\,a_{11}\,a_{22} + \,a_{12}^{\;2}\,) = 0.$$

Для корней λ_1 и λ_2 этого уравнения имеют место соотношения согласно теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22};$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} + a_{12}^2,$$

которые остаются неизменными (инвариантными) при любом преобразовании координат.

Из последнего равенства и условий определения типа кривых второго порядка следует, что если

1) $a_{11} a_{22} + a_{12}^2 > 0$, то уравнение (1) определяет кривую *эллиптического* типа;

2) $a_{11} a_{22} + a_{12}^2 < 0$, то уравнение (1) определяет кривую *гиперболического* типа;

3) $a_{11} a_{22} + a_{12}^2 = 0$ и $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, то уравнение (1) определяет кривую *параболического* типа.

Алгоритм преобразования общего уравнения кривой второго порядка к каноническому уравнению этой кривой

1. Определение типа кривой второго порядка, исходя из знака выражения

$$a_{11} a_{22} + a_{12}^2.$$

2. Составление характеристического уравнения $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ и нахождение его корней (собственных значений) λ_1 и λ_2.

3. Нахождение ортогональных собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2. Координаты этих векторов в старом базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ являются решениями однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

при подстановке в нее последовательно $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$.

4. Построение ортонормированной системы векторов (ортонормированный базис) $\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$. Для этого необходимо пронормировать собственные вектора.

5. Составление ортогональной матрицы перехода U от старого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$, координатные столбцы которой являются координатами собственных векторов $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ в базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

6. Составление уравнения (6), используя преобразование координат $x = U y$.

7. Выделение полных квадратов по переменным y_1, y_2 в уравнении (6). В результате получаем каноническое уравнение (параллельно смещенной) кривой второго порядка.

Классификация кривых второго порядка

1. Эллипс.

Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O\,(x_0\,, y_0)$

$$\frac{x-x_0}{a^2}+\frac{y-y_0}{b^2}=1.$$

2. Мнимый эллипс (пустое множество).

Каноническое уравнение мнимого эллипса с центром в точке $O\,(x_0\,, y_0)$

$$\frac{x-x_0}{a^2}+\frac{y-y_0}{b^2}=-1.$$

3. Окружность.

Каноническое уравнение окружности с центром в точке $O\,(x_0\,, y_0)$ и радиусом R

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

4. Точка (вырожденный эллипс).

Каноническое уравнение точки (вырожденного эллипса) $O\,(x_0\,, y_0)$

$$\frac{x-x_0}{a^2}+\frac{y-y_0}{b^2}=0 \text{ или } (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0.$$

5. Гипербола.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $O\,(x_0\,, y_0)$, с ветвями, направленными влево и вправо

$$\frac{x-x_0}{a^2}-\frac{y-y_0}{b^2}=1.$$

Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $O\,(x_0\,, y_0)$, с ветвями, направленными вверх и вниз

$$-\frac{x-x_0}{a^2}+\frac{y-y_0}{b^2}=1.$$

6. Парабола.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O\,(x_0\,, y_0)$

$$(y-y_0)^2=2p\,(x-x_0) \text{ или } (x-x_0)^2=2p\,(y-y_0).$$

7. Пара пересекающихся прямых.

Каноническое уравнение пары пересекающихся прямых, проходящих через точку $O\,(x_0\,, y_0)$

$$\frac{x-x_0}{a^2}-\frac{y-y_0}{b^2}=0.$$

8. Пара параллельных прямых.

Каноническое уравнение пары параллельных прямых

$$(x-x_0)^2=a^2 \text{ или } (y-y_0)^2=a^2,\ a\neq 0.$$

9. Пара мнимых параллельных прямых (пустое множество).

Каноническое уравнение пары параллельных прямых (пустое множество)

$$(x-x_0)^2=-a^2 \text{ или } (y-y_0)^2=-a^2,\ a\neq 0.$$

10. Пара совпавших параллельных прямых.

Каноническое уравнение пары совпавших параллельных прямых

$$(x-x_0)^2=0^2 \text{ или } (y-y_0)^2=0.$$

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+$$
$$+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+c=0, \tag{7}$$

где a_{ij}, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$, b_k, $k=1,2,3$, c – действительные коэффициенты, причем хотя бы один из коэффициентов a_{ij}, $1\le i\le j\le 3$ отличен от нуля.

Левую часть уравнения (7) составляют три группы членов:

1) квадратичная форма

$F_2(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$;

2) линейная форма членов первой степени

$F_1(x_1,x_2,x_3)=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$;

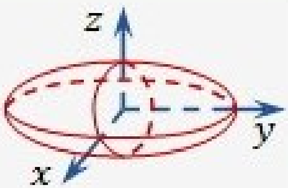
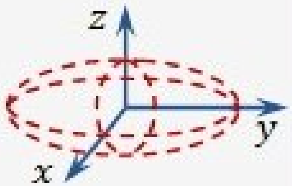
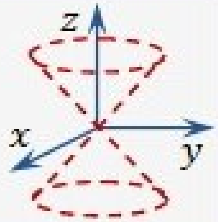
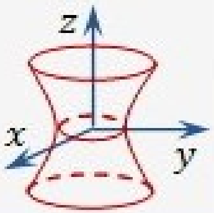
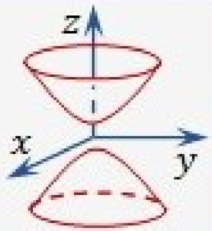
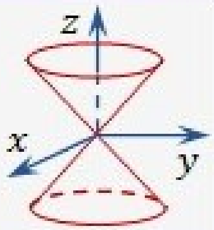
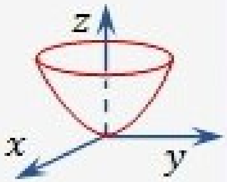
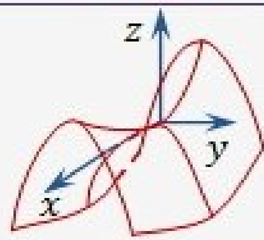
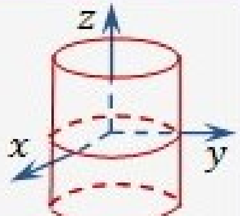
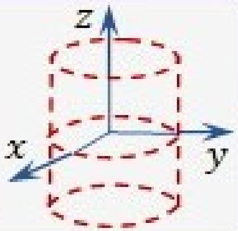
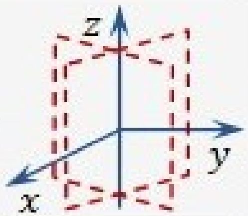
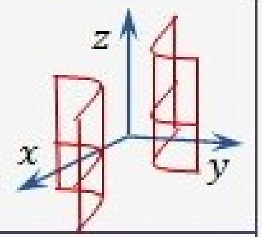
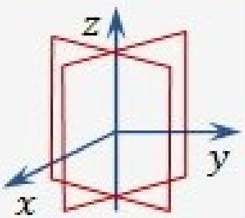
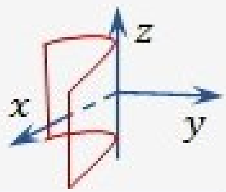
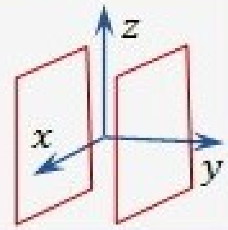
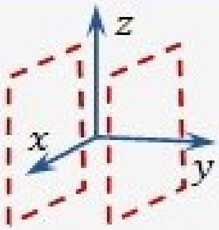
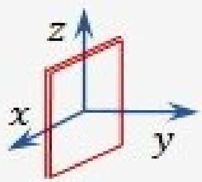
3) свободный член $F_0=c$.

Проводя преобразования общего уравнение поверхности второго порядка подобно преобразованию общего уравнение кривой второго порядка, получаем уравнение вида

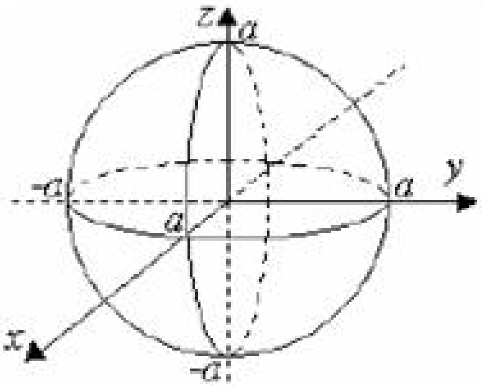
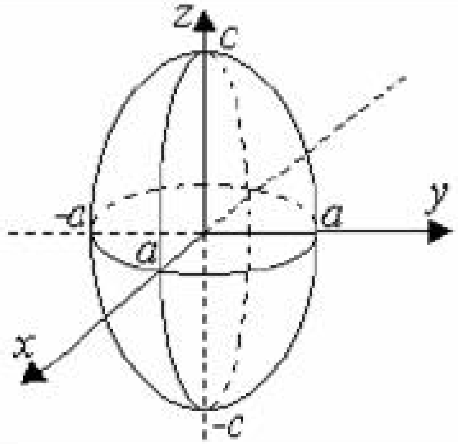
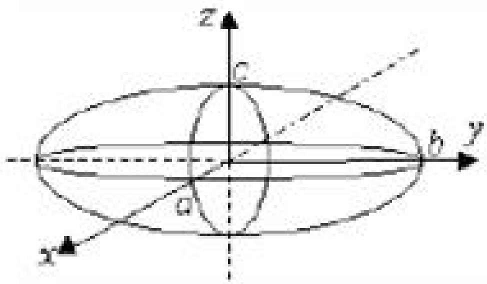
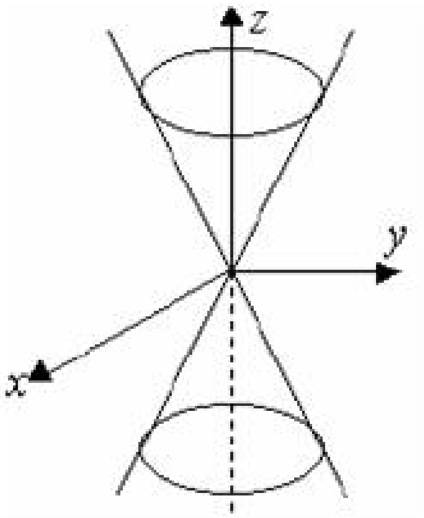
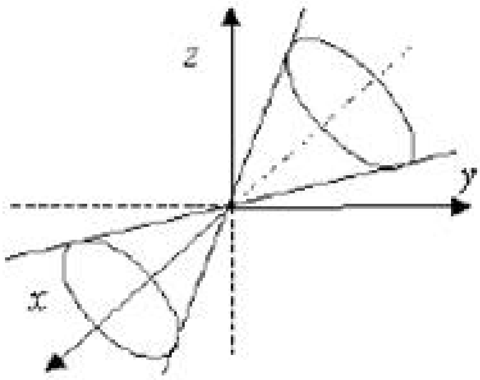
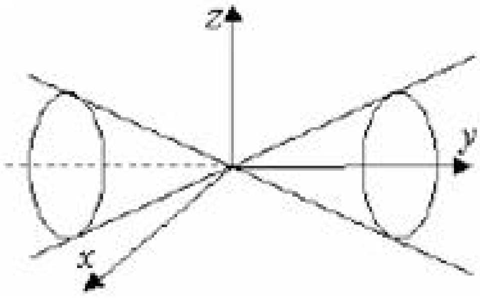
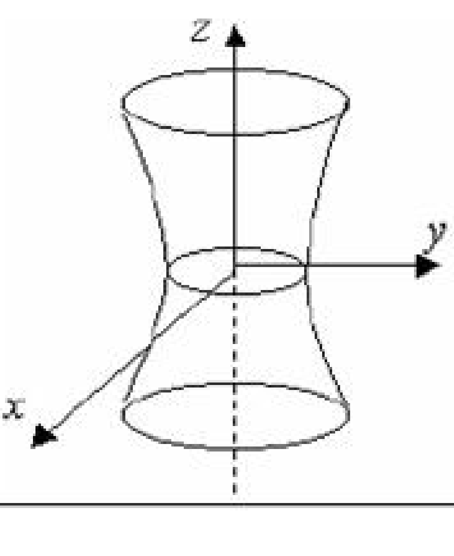
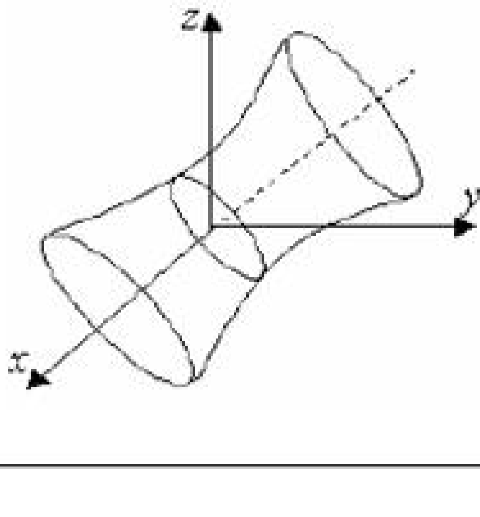
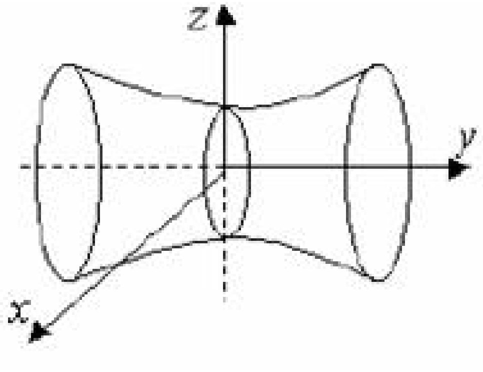
$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2+\beta_1y_1+\beta_2y_2+\beta_3y_3+c=0. \tag{8}$$

Выделив полные квадраты по переменным y_1, y_2, y_3 в уравнении (8), получаем каноническое уравнение поверхности второго порядка.

Классификация уравнений поверхностей второго порядка

1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение эллипсоида 	2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение мнимого эллипсоида 	3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение мнимого конуса 
4.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение однополостного гиперболоида 	5.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение двуполостного гиперболоида 	6.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение конуса 
7.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение эллиптического параболоида 	8.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение гиперболического параболоида 	9.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение эллиптического цилиндра 
10.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ Уравнение мнимого эллиптического цилиндра 	11.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей 	12.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение гиперболического цилиндра 
13.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары пересекающихся плоскостей 	14.	$y^2=2px$ Уравнение параболического цилиндра 	15.	$y^2-b^2=0$ Уравнение пары параллельных плоскостей 
16.	$y^2+b^2=0$ Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей 	17.	$y^2=0$ Уравнение пары совпадающих плоскостей 		Для всех уравнений $a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0$ Для уравнений 1 и 2 $a \geq b \geq c$ Для уравнений 3,4,5,6,7,9,10 $a \geq b$

Поверхности второго порядка

<table>
<tr><td colspan="3">Эллипсоиды</td></tr>
<tr><td>сфера</td><td>эллипсоид вращения</td><td>трехосный эллипсоид</td></tr>
<tr><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Конус второго порядка</td></tr>
<tr><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$</td><td>$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Однополостный гиперболоид</td></tr>
<tr><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$</td><td>$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>