ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ЛЕКЦИЯ 9

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ КАК ОТОБРАЖЕНИЯ

Открытые и замкнутые множества

Множество упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ (кортежей) из n действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ есть n-ая декартова степень $\boldsymbol{R}^n$ множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел

Для элемента $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ числа $x_1, x_2, ..., x_n$ будем называть координатами точки x в $\boldsymbol{R}^n$. Расстоянием $\rho(x, y)$ между точками

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ и } y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

назовем число

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}. \qquad (1)$$

Определение 1. Множество $U(a, \varepsilon)$ тех точек из $\boldsymbol{R}^n$, расстояние от которых до точки $a \in \boldsymbol{R}^n$ меньше ε, $\varepsilon > 0$, т. е. множество $U(a, \varepsilon) = \{ x \in \boldsymbol{R}^n : \rho(x, a) < \varepsilon \}$, называют ε-окрестностью точки a, а множество

$$U(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{ a \} = \{ x \in \boldsymbol{R}^n : 0 < \rho(x, a) < \varepsilon \}$$

проколотой ε-окрестностью точки a.

Можно сказать так: ε-окрестность точки $a \in \boldsymbol{R}^n$ – это открытый n-мерный шар радиуса ε с центром в точке a, т. е. множество точек, лежащих внутри $(n - 1)$-мерной сферы радиуса ε с центром в точке a.

Определение 2. Точку a множества $A \subset \boldsymbol{R}^n$ называют *внутренней точкой этого множества*, если существует ε-окрестность $U(a, \varepsilon)$ точки a, целиком содержащаяся в A: $U(a, \varepsilon) \subset A$. Множество всех внутренних точек A называют внутренностью множества A и обозначают $Int\, A$. Если каждая точка множества A является его внутренней точкой, то само множество A называют *открытым множеством*.

Определение 3. Окрестностью точки $a \in \boldsymbol{R}^n$ называют любое открытое множество U в $\boldsymbol{R}^n$, включающее в себя эту точку. При этом множество $U \setminus \{ a \}$ (т. е. окрестность точки, из которой удалена сама точка) называют *проколотой окрестностью* точки a.

Определение означает, что открытое множество является окрестностью каждой своей точки.

Определение 4. Точку $a \in \boldsymbol{R}^n$ называют *граничной точкой* множества $A \subset \boldsymbol{R}^n$, если любая ε-окрестность точки a содержит как точки, принадлежащие множеству A, так и точки, не принадлежащие этому множеству.

Множество всех граничных точек множества A называют *его границей* и обозначают ∂A (или $Fr\, A$).

В $\boldsymbol{R}^n$ границей замкнутого n-мерного шара $\{ x \in \boldsymbol{R}^n : \rho(x, a) < \varepsilon \}$ является множество $\{ x \in \boldsymbol{R}^n : \rho(x, a) = \varepsilon \}$,т. е. $(n - 1)$-мерная сфера.

Определение 5. Множество $a \in \boldsymbol{R}^n$ называют ограниченным множеством, если существует такое положительное число r, что r-окрестность точки $0 = (0, \ldots, 0)$ содержит множество A.

Определение 6. Множество, которое содержит все свои граничные точки (свою границу), называют *замкнутым множеством*. Замкнутое ограниченное множество в $\boldsymbol{R}^n$ называют *компактным множеством* или *компактом*.

Замкнутый круг и окружность на плоскости, замкнутый шар и сфера в пространстве являются замкнутыми и даже компактными множествами.

Определение 7. Точку $b \in \boldsymbol{R}^n$ называют *внешней точкой множества* $a \in \boldsymbol{R}^n$, если существует такая ε-окрестность этой точки, которая не пересекается с множеством A. Множество всех внешних точек множества A называют *внешностью множества* A.

Если точка $b \in \boldsymbol{R}^n$ не принадлежит множеству $A \subset \boldsymbol{R}^n$, то существуют две возможности:

а) любая ε-окрестность точки b содержит точки множества A и, следовательно, точка b является граничной точкой множества A;

б) некоторая ε-окрестность точки b не пересекается с A и, следовательно, точка b является внешней точкой множества A.

Определение 8. Множество $A \subset \boldsymbol{R}^n$, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве, называют *линейно связным*.

Определение 9. Открытое линейно связное множество называют *областью*.

Следующие множества являются областями:

любая ε-окрестность $U(a, \varepsilon)$ точки $a \in \boldsymbol{R}^n$;

проколотая ε-окрестность $U(a, \varepsilon)$ точки $a \in \boldsymbol{R}^n$;

(открытое) кольцо в $\boldsymbol{R}^2$ с центром в точке (a_1, a_2) и радиусами r и R, которое можно описать неравенством

$$r_2 < (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < R^2, (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2.$$

Функции нескольких переменных

Определение 10. Отображение, которое упорядоченному набору из n чисел ставит в соответствие число, т. е. отображение вида $f : A \to \boldsymbol{R}$, где $A \subset \boldsymbol{R}^n$, $n > 1$, называют функцией нескольких переменных.

Определение 11. Множество $D(f) = A$ точек из $\boldsymbol{R}^n$, в которых определена функция $f : A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, называют *областью определения* (существования) функции f, а множество $R(f) = \{ y \in \boldsymbol{R}: y = f(x), x \in D(f)\}$ – *областью значений* (изменения) функции f.

Определение 12. Графиком функции нескольких переменных $f : \boldsymbol{R}^n \to R$ называют подмножество $\Gamma(f)$ в $\boldsymbol{R}^{n+1}$, которое задается следующим образом

$$\Gamma(f) = \{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : x \in D(f), y = f(x) \}/$$

Здесь $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а (x, y) – сокращенное обозначение арифметического вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n, y)$.

Определение 13. Пусть задана функция нескольких переменных $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. Множество $\{ x \in \boldsymbol{R}^n : f(x) = c \}$, где $c \in \boldsymbol{R}$ фиксированное, называют *поверхностью уровня*, соответствующей значению c.

Предел функции нескольких переменных

Определение 11. Точку $a \in \boldsymbol{R}^n$ называют *предельной точкой* множества $A \subset \boldsymbol{R}^n$, если в любой ее проколотой окрестности есть точки из множества A.

Предельная точка множества может либо принадлежать этому множеству, либо не принадлежать ему.

Если точка a является предельной для множества A, то в любой окрестности $U(a, \varepsilon)$ этой точки содержится бесконечно много точек множества A.

Определение 12. Точку a называют *изолированной точкой множества* A, если $a \in A$ и существует такая ее проколотая окрестность, которая не содержит точек из множества A.

Отметим, что любая точка $a \in A$ является либо предельной точкой множества A, либо изолированной точкой A.

Определение 13. Пусть заданы функция нескольких переменных $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, множество $A \subset D(f)$, включенное в область определения $D(f)$ функции f, и предельная точка a множества A. Точку $b \in \boldsymbol{R}$ называют *пределом функции* f в точке a по множеству A, если для любой ε-окрестности $U(b, \varepsilon)$ точки b существует такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ точки a, что $f(x) \in U(b, \varepsilon)$ при $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \cap A$.

В этом случае записывают $b = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ A}} f(x)$.

Замечание. Условие, что точка $a \in \boldsymbol{R}^n$, в которой рассматривается предел функции по множеству $A \subset \boldsymbol{R}^n$, является предельной точкой A, существенно. Действительно, если точка a не является предельной точкой A, то в достаточно малой проколотой окрестности этой точки нет точек множества A и условие определения 13, хотя формально и остается корректным, теряет содержательный смысл. В дальнейшем, говоря о пределе функции f в точке a по множеству A, будем всегда предполагать, что точка a является предельной для A.

Если некоторая проколотая окрестность точки a содержится в множестве A (в частности, если точка a внутренняя для A), мы можем считать, что $A = \boldsymbol{R}^n$. В этом случае мы будем говорить о пределе функции в точке a и обозначать его, опуская упоминание множества A

$$b = \lim_{x \to a} f(x).$$

При этом определение предела упрощается: точка b есть предел функции в точке a, если для любой ε-окрестности $U(b, \varepsilon)$ точки b существует такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ точки a, что из условия $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ следует $f(x) \in U(b, \varepsilon)$.

Определение 14. Функцию нескольких переменных $f: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ называют *бесконечно малой* при $x \underset{A}{\to} a$ (a – предельная точка множества A), если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = 0$.

Теорема 1. Для того чтобы существовал предел функции $f: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ при $x \underset{A}{\to} a$, равный b, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела представление

$$f(x) = b + \alpha(x),$$

где $\alpha: A \to \boldsymbol{R}^m$ — бесконечно малая при $x \underset{A}{\to} a$.

Определение 15. Пусть задана функция нескольких переменных $f: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ и a – предельная точка множества A. Если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $x \in A \cap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ выполняется неравенство $f(x) > M$ ($f(x) < -M$ или $|f(x)| > M$), то говорят, что функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ (соответственно $-\infty$ или ∞) при $x \underset{A}{\to} a$ и пишут

$$\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = +\infty \;\; \Big(\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = -\infty, \; \lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = \infty\Big).$$

Во всех трех случаях функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой* при $x \underset{A}{\to} a$.

Определение 15. Функция нескольких переменных $f: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ ограничена на множестве A, если множество $f(A) = \{\, y \in \boldsymbol{R}: \; y = f(x), \; x \in A \,\}$ ограничено. Эта функция ограничена при $x \underset{A}{\to} a$ (локально ограничена в точке a), если существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ точки a, что функция ограничена на множестве $A \cap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$.

Основные свойства предела функции нескольких переменных

1. Если функция $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ имеет предел в точке $a \in \boldsymbol{R}^n$ по множеству A, то этот предел единственный.

2. Если функция $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ имеет (конечный) предел в точке a по множеству A, то она ограничена при $x \underset{A}{\to} a$.

3. Если у функций $f, g : A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = B, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ A}} g(x) = D$$

то существуют и пределы

$$\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) + \lim_{\substack{x \to a \\ A}} g(x) = B + D, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ A}} c f(x) = c B, \; c = const.$$

4. Если у функций $f, g : A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = B, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ A}} g(x) = D$$

то существуют и пределы

$$\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) \cdot \lim_{\substack{x \to a \\ A}} g(x) = B \cdot D, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ A}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{D}, \; D \neq 0.$$

5. Если функция $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ имеет предел при $x \underset{A}{\to} a$, равный b, и $b > 0$ ($b < 0$), то существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ точки a, что в точках множества $A \cap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ функция f положительна (отрицательна).

6. Если у функций $f, g : A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = B, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ A}} g(x) = D, \; B < D$$

то существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ точки a, что при $x \in A \cap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.

7. Если у функций $f, g : A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = B, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ A}} g(x) = D, \; B \leq D$$

то существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ точки a, что при $x \in A \cap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ выполнено неравенство $f(x) \leq g(x)$.

8. Если функции $f, g, h : A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ в некоторой проколотой окрестности точки a удовлетворяют неравенствам $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $x \in A$, и существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ A}} g(x) = B,$$

то существует и предел $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ A}} h(x) = B$.

9. Произведение функции, бесконечно малой при $x \underset{A}{\to} a$, на функцию, ограниченную при при $x \underset{A}{\to} a$, есть функция, бесконечно малая при $x \underset{A}{\to} a$.

Непрерывность функции нескольких переменных

Определение 16. Функцию нескольких переменных $f: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ называют *непрерывной* в точке $a \in A$, предельной для множества A, если существует предел функции f при $x \underset{A}{\to} a$, равный значению функции в этой точке, т. е. если

$$\lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = f(a).$$

Определение 17. Функцию $f: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, непрерывную во всех точках множества A, называют *непрерывной на этом множестве*.

Локальные свойства непрерывных функций нескольких переменных

(вытекают из свойств 2–6 предела функции нескольких переменных)

1. Если функции $f_i: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $i = 1, \ldots, k$, непрерывны в некоторой точке $a \in A$, то любая их линейная комбинация непрерывна в этой точке.

2. Если функции $f, g: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ непрерывны в некоторой точке $a \in A$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$, а при $g(a) \neq 0$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в этой точке.

3. Если функция $f: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ непрерывна в точке $a \in A$, то она ограничена в пересечении множества A с некоторой окрестностью точки a.

4. Если функция $f: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), то существует окрестность точки a, в которой функция f в точках множества A положительна (отрицательна).

5. Если функции $f: A \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ непрерывны в точке $a \in A$ и $f(a) < g(a)$, то существует окрестность этой точки, в которой в точках множества A выполнено неравенство $f(x) < g(x)$.

Отметим, что в сформулированных свойствах упоминание о множестве A можно опустить, если точка a является внутренней точкой множества A.