Семинар № 6.

Тема: Квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Определение. Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j \ , \quad a_{ij} \in R, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n$$

называют квадратичной формой.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы.

Матрица A является симметрической, ($a_{ij} = a_{ji}$, $i \neq j$).

Квадратичную форму можно записать в матричном виде

$$x^T A x,$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец координат векторах в некотором базисе $\mathcal{B}$.

Для составления матрицы квадратичной формы удобно к каждой строке и к каждому столбцу приписать переменную с соответствующим номером. Тогда по диагонали (главной) будут располагаться коэффициты при x_i^2, а остальные элементы матрицы равны 1/2 коэффициента при x_{ij}.

<u>Пример 1.</u> Составить матрицу квадратичной формы

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2x_3 \qquad (1)$$

<u>Решение</u>

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$a_{11} = 1 \quad a_{12} = a_{21} = 2$

$a_{22} = 0 \quad a_{13} = a_{31} = 0$

$a_{33} = 0 \quad a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2}$

Квадратичную форму (1) можно записать в виде

$$F(x_1, x_2, x_3) = \underset{a_{11}}{\underset{\shortparallel}{1}} \cdot x_1^2 + \underset{a_{22}}{\underset{\shortparallel}{0}} \cdot x_{22} + \underset{a_{33}}{\underset{\shortparallel}{0}} \cdot x_{33} +$$

$$+ \underbrace{2x_1x_2 + 2x_2x_1}_{=4x_1x_2} + \underbrace{0 \cdot x_1x_3 + 0 \cdot x_3 \cdot x_1}_{=0x_1x_3} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3x_2}_{=x_1x_2} \qquad (2)$$

Примечание. 1) Красным цветом написаны пояснение. При решение задачи это записывать не нужно.

2) Записывать квадратичную форму (1) в виде (2) следует в черновике, если затрудняетесь составлять матрицу А по квадратичной форме (1).

Пример 2. Составить матрицу квадратичной формы $F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3$

Решение

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример 3. Записать квадратичную форму, если ее матрица имеет вид

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & -6 \\ 8 & -6 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Решение

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \cdot x_1^2 + 3x_1x_2 + 8x_1x_3 +$$
$$+ 3x_2x_1 - 5x_2^2 + (-6)x_2x_3 +$$
$$+ 8x_3x_1 - 6x_3x_2 + 1 \cdot x_3^2 =$$
$$= -5x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 16x_1x_3 - 12x_2x_3.$$

Пример 4. Записать квадратичную форму, если ее матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение

$$F(x_1, x_2, x_3) = 1 \cdot x_1^2 + 0 \cdot x_1x_2 - 2x_1x_3 +$$
$$+ 0 \cdot x_2x_1 + 3x_2^2 + 3x_2x_3 -$$
$$- 2x_3x_1 + 3x_3x_2 + 5x_3^2 =$$
$$= x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Критерий Сильвестра

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица квадратичной формы.

Определение. Определители

$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, ...,

$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

называют угловыми минорами матрицы A.

Критерий Сильвестра. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы A квадратичной формы были положительны:

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

Следствие. Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры чередовали знак, начиная с отрицательного: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$.

В остальных случаях, если матрица квадратичной формы невырожденная, квадратичная форма знакопеременная.

Пример 5. Определить тип квадратичной формы $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$, используя критерий Сильвестра.

Решение. 1. Составляем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Находим угловые миноры матрицы A.

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 7 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

3. Вывод.

Т. к. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, то квадратичная форма $F(x_1, x_2, x_3)$ положительно определена.

Пример 6. Определить тип квадратичной формы $F(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_3$, используя критерий Сильвестра.

Решение

1. Составляем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Вычисляем угловые миноры матрицы A.

$$\Delta_1 = -1 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

3 Вывод.

Т. к. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, то квадратичная форма отрицательно определена.

Преобразование квадратичной формы при переходе к новому базису

Пусть $x_б$ - координаты вектора x в старом базисе $\mathbb{B} = (\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_n)$, x_e - координаты вектора x в новом базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$,
A - матрица исходной квадратичной формы,
A' - матрица квадратичной формы в новом базисе.

При этом $$A' = U^T \cdot A \cdot U,$$
где $U = U_{\mathbb{B} \to e}$ - матрица перехода от старого базиса $\mathbb{B}$ к новому базису e.

Пример 7. Преобразовать квадратичную форму $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2$ к новым переменным y_1, y_2, если $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2. \end{cases}$

Решение.

1. Составляем матрицу перехода от старого базиса к новому базису.

Учитывая, что $X = U \cdot Y$, получаем

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ т.к. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2. Составляем матрицу квадратичной формы $F(x_1, x_2)$ в старом базисе

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Находим матрицу квадратичной формы в новом базисе

$$A' = U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{U^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}}_{A \cdot U} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Составляем квадратичную форму с новыми переменными y_1, y_2 (с матрицей квадратичной формы A').

$$F(y_1, y_2) = 11y_1^2 - 4y_2^2 - 2y_1y_2.$$

Пример 8. Преобразовать квадратичную форму $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ к новым координатам y_1, y_2, y_3, если

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Решение

1. Составляем матрицу перехода от старого базиса к новому базису.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ т. к. } X = U \cdot Y \text{ или } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

2. Составляем матрицу квадратичной формы $F(x_1, x_2, x_3)$ в старом базисе

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Находим матрицу квадратичной формы в новом базисе.

$$A' = U^T A \cdot U =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= U^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{= A \cdot U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Составляем квадратичную форму с новыми переменными y_1, y_2, y_3 (с матрицей квадратичной формы A').

$$F(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 6y_2y_3.$$

Домашнее задание.

Сборник задач по математике для ВТУЗов. часть 1. /Под редакцией А.Н. Ефимова, Б.П. Демидовича.

1) 4.219; 4.221; 4.223

2) Преобразовать квадратичную форму $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ к новым координатам y_1, y_2, y_3, если $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$.