Дисциплина: Линейная алгебра
Семинар 7

Тема: Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Определение. Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \; i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n$$

называют квадратичной формой.

Определение. Квадратичную форму

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \dots, n$$

не имеющую попарных произведений переменных, называют квадратичной формой канонического вида.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

Метод Лагранжа основан на последовательном выделении полных квадратов переменных.

1) Если $a_{ii} \neq 0$, то рассматриваем часть квадратичной формы, содержащей переменную x_i. Дополняем рассматриваемую сумму до полного квадрата, используя формулы:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

2) Если все коэффициенты $a_{ii}=0$, $i=1,\dots,n$ (коэффициенты при x_i^2), то перед выделением полных квадратов переменных делаем замену переменных:

$$x_1=t_1+t_2$$
$$x_2=t_1-t_2$$
$$x_3=t_3,\ \dots,\ x_n=t_n$$

Пример 1. Привести квадратичную форму $F(x_1,x_2,x_2,x_4)=2x_1x_2-4x_1x_4+2x_2x_4+2x_3x_4$ методом Лагранжа.

Решение.

Поскольку коэффициент $a_{11}=0$ (при x_1^2), то сделаем замену переменных

$$x_1=t_1+t_2$$
$$x_2=t_1-t_2$$
$$x_3=t_3$$
$$x_4=t_4.$$

Тогда

$$F(t_1,t_2,t_3,t_4)=2(t_1+t_2)(t_1-t_2)-4(t_1+t_2)t_4+$$
$$+2(t_1-t_2)t_4+2t_3t_4=2t_1^2-2t_2^2-4t_1t_4-4t_2t_4+$$
$$+2t_1t_4-2t_2t_4+2t_3t_4=2t_1^2-2t_2^2-2t_1t_4-6t_2t_4+$$
$$+2t_3t_4=\left\{\begin{array}{l}\text{выделим полный квадрат}\\ 2t_1^2-2t_1t_4=2(t_1^2-t_1t_4)=\\ =2\left(\underbrace{t_1^2-t_1t_4+\frac{1}{4}t_4^2}_{=(t_1-\frac{1}{2}t_4)^2}-\frac{1}{4}t_4^2\right)=\\ =2(t_1-\frac{1}{2}t_4)^2-\frac{1}{2}t_4^2\end{array}\right\}=$$
$$=2(t_1-\frac{1}{2}t_4)^2-\frac{1}{2}t_4^2-2t_2^2-6t_2t_4+2t_3t_4=$$
$$=\left\{\begin{array}{l}\text{выделим полный квадрат}\\ -2t_2^2-6t_2t_4=-2(t_2^2+3t_2t_4)=-2(t_2^2-3t_2t_4+\frac{9}{4}t_4^2-\\ -\frac{9}{4}t_4^2)=-2(t_2-\frac{3}{2}t_4)^2+\frac{9}{2}t_4^2\end{array}\right\}=$$

$$= 2\left(t_1 - \frac{1}{2}t_4\right)^2 - \frac{1}{2}t_4^2 - 2\left(t_2 + \frac{3}{2}t_4\right)^2 + \frac{9}{2}t_4^2 + 2t_3t_4 =$$

$$= 2\left(t_1 - \frac{1}{2}t_4\right)^2 - 2\left(t_2 + \frac{3}{2}t_4\right)^2 + 4t_4^2 + 2t_3t_4 =$$

= { выделим полный квадрат

$$4t_4^2 + 2t_3t_4 = 4\left(t_4^2 + \frac{1}{2}t_3t_4\right) = 4\left(\underbrace{t_4^2 + \frac{1}{2}t_3t_4 + \frac{1}{16}t_3^2}_{\left(t_4 + \frac{1}{4}t_3\right)^2} - \frac{1}{16}t_3^2\right) =$$

$$= 4\left(t_4 + \frac{1}{4}t_3\right)^2 - \frac{1}{4}t_3^2 \Big\}$$

$$= 2\left(t_1 - \frac{1}{2}t_4\right)^2 - 2\left(t_2 + \frac{3}{2}t_4\right)^2 + 4\left(t_4 + \frac{1}{4}t_3\right)^2 - \frac{1}{4}t_3^2$$

Обозначим $y_1 = t_1 - \frac{1}{2}t_4$

$y_2 = t_2 + \frac{3}{2}t_4$

$y_3 = t_4 + \frac{1}{4}t_3$

$y_4 = t_3$

В результате получаем квадратичную форму в каноническом виде

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2.$$

<u>Пример 2</u> Привести квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - \frac{3}{4}x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 \quad (1)$$

методом Лагранжа.

<u>Решение</u>

Рассмотрим члены квадратической формы, содержащие x_1: $4x_1^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 =$

= { выделим полный квадрат } =

$= 4\left(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_1x_3\right) =$ { используем формулу $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ } =

$$= 4\Big(\underbrace{x_1^2 + \frac{1}{16}x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3}_{=\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2} - \frac{1}{16}x_2^2 - x_3^2 -$$

$$-\frac{1}{2}x_2x_3) = 4(x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3)^2-\frac{1}{4}x_2^2-4x_3^2+2x_2x_3$$

С учетом этого преобразования квадратичная форма (1) будет иметь вид

$$F(x_1,x_2,x_3) = 4(x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3)^2-\frac{1}{4}x_2^2-4x_3^2+2x_2x_3-$$

$$-\frac{3}{4}x_2^2-4x_2x_3+x_3^2 = 4(x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-$$

$$-3x_3^2 = \Big\{ \text{выделим полный квадрат}$$

$$-x_2^2-2x_2x_3 = -(\underbrace{x_2^2+2x_2x_3+x_3^2}_{=(x_2+x_3)^2}-x_3^2) =$$

$$= -(x_2+x_3)^2+x_3^2 \Big\} =$$

$$= 4(x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3)^2-(x_2+x_3)^2+x_3^2-3x_3^2 =$$

$$= 4(x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3)^2-(x_2+x_3)^2-2x_3^2.$$

Обозначим $y_1 = x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3$

$y_2 = x_2+x_3$

$y_3 = x_3$.

Тогда квадратичная форма (1) в квадратичной форме будет иметь вид:

$$F(y_1,y_2,y_3) = 4y_1^2-y_2^2-2y_3^2.$$

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований

Пусть $F(x) = x^T A x$ - заданная квадратичная форма в базисе $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду

1. Составляем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Составляем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

и находим его корни, среди которых могут быть кратные. Записываем все корни с учетом их кратности: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

3. Для каждого корня характеристического уравнения λ_i находим решение системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i) x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda_i) x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_i) x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Если корень λ_i имеет кратность r, то однородная система уравнений (2) имеет r линейно независимых решений, которые образуют фундаментальную систему решений (ФСР).

4. Ортогонализируем полученную систему независимых векторов (из ФСР), ортонормируем ее и получаем ортонормированный базис из собственных векторов $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в n-мерном евклидовом пространстве.
5. Записываем заданную квадратичную форму в новом базисе $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$
$$F(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$
где $y_1, y_2, \dots, y_n$ - координаты вектора x в базисе $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
6. Записываем матрицу ортогонального преобразования U, координатными столбцами которой являются координаты полученных собственных векторов.

<u>Пример 3.</u> Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму
$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \qquad (3)$$
к каноническому виду и записать ее в каноническом виде.

<u>Решение.</u>

1. Составляем матрицу квадратичной формы (3)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Составляем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$.
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0. \qquad (4)$$

Корнями уравнения (4) являются:

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$.

3. Находим собственные векторы для собственных значений λ_i, $i = 1, 2, 3$.

Пусть $\lambda_{1,2} = -1$. Составляем однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (1-(-1))x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (1-(-1))x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (1-(-1)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг этой системы уравнений равен 1. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из двух решений:

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = t$, $x_2 = q$, $t, q \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_1 = -q - t$

$$\Rightarrow \text{ФСР}: \quad q\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda = -1$.

Пусть $\lambda_3 = 5$. Составляем однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (1-5)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (1-5)x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (1-5)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+2x_2-4x_3=0 \end{cases} \qquad (4)$$

Ранг системы уравнений равен 2. Следовательно, размерность пространства решений системы уравнений (4) равна 1.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \\ 0 & 6 & -6 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = p,\ p \in \mathbb{R}$

$x_2 = p \qquad \Rightarrow \quad p\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$x_1 = p$

собств. вектор, соответствующий собственному числу $\lambda = 5$

Таким образом, получим систему линейно независимых векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

4. Ортогонализируем полученную систему линейно независимых векторов a_1, a_2, a_3 методом Грама-Шмидта.

Полагаем $b_1 = a_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Тогда $b_2 = a_2 - \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$,

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Пронормируем вектора b_1, b_2, b_3

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицей ортогонального преобразования является матрица

$$U = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

В ортонормированном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ матрица квадратичной формы имеет диагональный вид $A' = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$

В результате квадратичная форма в каноническом виде: $F(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$

Домашнее задание

Сборник задач по математике для ВТУЗов часть 1. / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича

№4211, 4.212, 4.214, 4.216