ДИСЦИПЛИНА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

СЕМИНАР 8

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0, \qquad (1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ – действительные коэффициенты, причем хотя бы один из коэффициентов $a_{ij}, 1 \le i \le j \le 2$ отличен от нуля.

Левую часть уравнения (1) составляют три группы членов:

1) квадратичная форма

$$F_2(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Выражение $F_2(x_1, x_2)$ представляет собой квадратичную форму с симметрической матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$;

2) линейная форма членов первой степени

$$F_1(x_1, x_2) = b_1x_1 + b_2x_2;$$

3) свободный член $F_0 = c$.

Проводя преобразования общего уравнение кривой второго порядка, получаем уравнение вида (процесс преобразования подробно изложен в лекции 8)

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + c = 0.$$

Алгоритм преобразования общего уравнения кривой второго порядка к каноническому уравнению этой кривой

1. Определение типа кривой второго порядка, исходя из знака выражения

$$a_{11}a_{22} + a_{12}^2.$$

2. Составление характеристического уравнения $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ и нахождение его корней (собственных значений) λ_1 и λ_2.

3. Нахождение ортогональных собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2. Координаты этих векторов в старом базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ являются решениями однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

при подстановке в нее последовательно $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$.

4. Построение ортонормированной системы векторов (ортонормированный базис) $\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$. Для этого необходимо пронормировать собственные вектора.

5. Составление ортогональной матрицы перехода U от старого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$, координатные столбцы которой являются координатами собственных векторов $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ в базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

6. Составление уравнения (6), используя преобразование координат $x = U y$.

7. Выделение полных квадратов по переменным y_1, y_2 в уравнении (6). В результате получаем каноническое уравнение (параллельно смещенной) кривой второго порядка.

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0, \qquad (2)$$

где a_{ij}, $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3,$ b_k, $k = 1, 2, 3$, c – действительные коэффициенты, причем хотя бы один из коэффициентов a_{ij}, $1 \le i \le j \le 3$ отличен от нуля.

Левую часть уравнения (2) составляют три группы членов:

1) квадратичная форма

$F_2(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$;

2) линейная форма членов первой степени

$F_1(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$;

3) свободный член $F_0 = c$.

Проводя преобразования общего уравнение поверхности второго порядка подобно преобразованию общего уравнение кривой второго порядка, получаем уравнение вида

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + c = 0.$$

Выделив полные квадраты по переменным y_1, y_2, y_3 в уравнении (8), получаем каноническое уравнение поверхности второго порядка.

Примечание. В приведенных ниже задачах матрица перехода U от старого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ обозначена через T.

Домашнее задание

Сборник задач по математике для ВТУЗов. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. № 4.227, 4.229, 4.231.

Задача 7.2. Привести уравнение кривой

$$-8x_2^2+6x_1x_2+12x_1-26x_2-11=0 \tag{7.15}$$

к каноническому виду с помощью поворота осей координат системы Ox_1x_2 и последующего параллельного переноса. Построить кривую в исходной системе координат.

◄ Здесь $a_{11}=0,\ \ a_{22}=-8,\ \ a_{12}=3$. Установим тип кривой, заданной уравнением (7.15). Для этого найдем знак выражения $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$: $0\cdot(-8)-3^2=-9<0$. Следовательно, уравнение (7.15) определяет *гиперболический* тип кривой.

Запишем матрицу **A** квадратичной формы $F_2(x_1,x_2)=-8x_2^2+$ $+6x_1x_2$, связанной с уравнением (7.15):

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & -8\end{pmatrix},$$

и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 3\\ 3 & -8-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2+8\lambda-9=0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1=-9,\ \ \lambda_2=1$.

Квадратичная форма в новых координатах y_1, y_2 примет канонический вид

$$F_2(y_1,y_2)=-9y_1^2+y_2^2. \tag{7.16}$$

Найдем ортогональное преобразование **X** = **TY**, которое приводит квадратичную форму, связанную с уравнением (7.15), к каноническому виду (7.16). Для этого определим взаимно ортогональные нормированные собственные элементы, отвечающие найденным собственным значениям λ_1 и λ_2.

Собственные элементы найдем из системы уравнений

$$\begin{cases}-\lambda x_1+3x_2=0,\\ 3x_1+(-8-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

При $\lambda_1 = -9$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Размерность пространства решений равна единице. Общим решением системы является элемент $\boldsymbol{f}_1 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, где α — произвольное действительное число. В качестве нормированного собственного элемента возьмем $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$.

Аналогично при $\lambda_2 = 1$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 - 9x_2 = 0, \end{cases}$$

которая имеет общее решение $\boldsymbol{f}_2 = \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, где β — произвольное действительное число. В качестве нормированного собственного элемента возьмем $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$.

Таким образом, определена матрица ортогонального преобразования:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \quad (\det \mathbf{T} = 1).$$

Ортогональное преобразование

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

приводит квадратичную форму $F_2(x_1, x_2)$ к каноническому виду (7.16). Это преобразование является поворотом осей координат на угол φ, который определяется из соотношения $-\operatorname{tg}\varphi = 3 \Rightarrow$ $\varphi = -\operatorname{arctg} 3$.

Выразим старые координаты x_1 и x_2 через новые y_1 и y_2:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} y_1 + \dfrac{3}{\sqrt{10}} y_2, \\ x_2 = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{10}} y_2. \end{cases} \tag{7.17}$$

Линейные члены уравнения (7.15) $F_1(x_1, x_2) = 12x_1 - 26x_2 - 11$ перепишем в новых координатах, подставив вместо x_1 и x_2 правые части соотношений (7.17):

$$F_1(x_1, x_2) = 12x_1 - 26x_2 - 11 =$$

$$= 12\left(\frac{1}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}} y_2\right) - 26\left(-\frac{3}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} y_2\right) - 11,$$

или

$$F_1(y_1, y_2) = 9\sqrt{10}\,y_1 + \sqrt{10}\,y_2 - 11.$$

П р и м е ч а н и е. Преобразование линейной части уравнения (7.15) можно проводить в матричном виде. Тогда

$$F_1(y_1, y_2) = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} & -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \end{pmatrix} - 11 =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} y_1 + \dfrac{3}{\sqrt{10}} y_2 & -\dfrac{3}{\sqrt{10}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{10}} y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \end{pmatrix} - 11 =$$

$$= 12\left(\frac{1}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}} y_2\right) - 26\left(-\frac{3}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} y_2\right) - 11 =$$

$$= 9\sqrt{10}\,y_1 + \sqrt{10}\,y_2 - 11.$$

Итак, в системе координат Oy_1y_2, образованной из системы Ox_1x_2 поворотом осей на угол $\varphi = -\operatorname{arctg} 3$, уравнение кривой имеет вид

$$-9y_1^2 + y_2^2 + 9\sqrt{10}\,y_1 + \sqrt{10}\,y_2 - 11 = 0.$$

Выделив полные квадраты по переменным y_1, y_2, получим уравнение

$$-9\left(y_1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+\left(y_2+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=-9,$$

или

$$\frac{\left(y_1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{1}-\frac{\left(y_2+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{9}=1. \qquad (7.18)$$

Уравнение (7.18) в системе координат Oy_1y_2 действительно представляет собой каноническое уравнение *гиперболы*.

Положим $y_1'=y_1-\frac{\sqrt{10}}{2}$, $y_2'=y_2+\frac{\sqrt{10}}{2}$, т. е. выполним параллельный перенос осей координат системы Oy_1y_2 так, что начало координат перейдет в точку $O'\left(\frac{\sqrt{10}}{2};-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$. В новой системе координат $O'y_1'y_2'$ уравнение данной кривой имеет канонический вид:

$$\frac{y_1'^2}{1}-\frac{y_2'^2}{9}=1.$$

Построим гиперболу (рис. 7.1). ▶

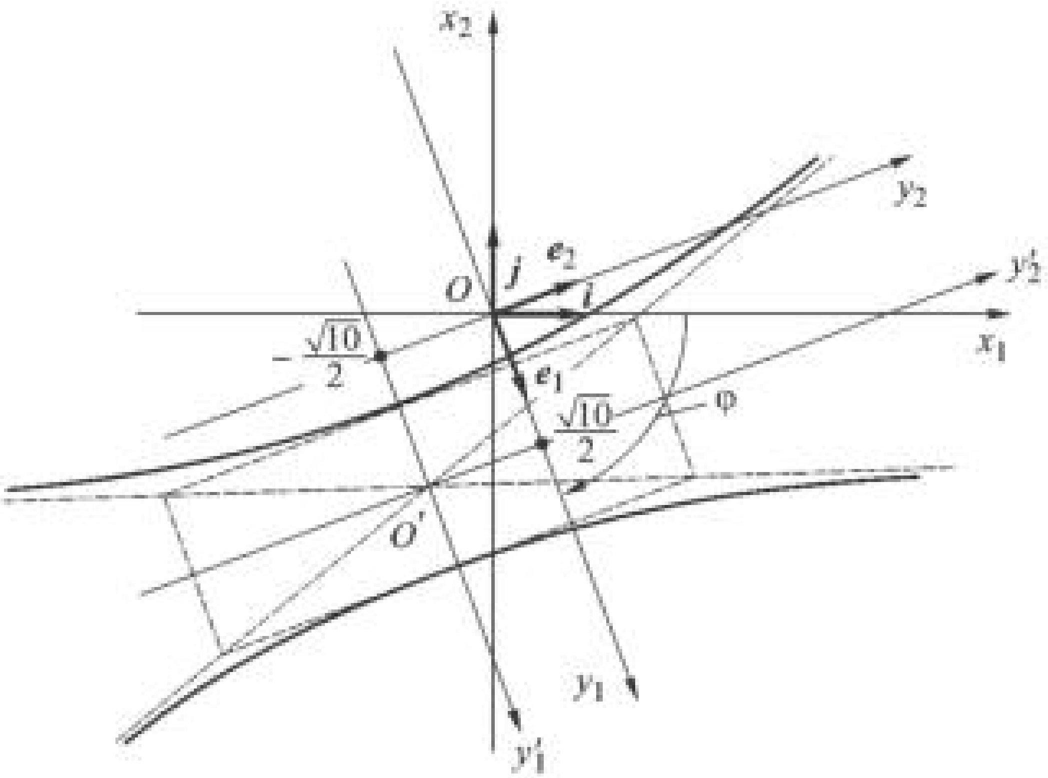

Рис. 7.1

Задача 7.3. С помощью поворота осей координат системы Ox_1x_2 и последующего параллельного переноса привести уравнение кривой

$$5x_1^2+4x_1x_2+8x_2^2-32x_1-56x_2+80=0 \qquad (7.19)$$

к каноническому виду. Построить кривую в исходной системе координат.

◄ Здесь $a_{11}=5,\ \ a_{22}=8,\ \ a_{12}=2$. Установим тип кривой, заданной уравнением (7.19). Для этого найдем знак выражения $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$: $\ 5\cdot 8-2^2=36>0$. Следовательно, уравнение (7.19) определяет *эллиптический* тип кривой.

Запишем матрицу **A** квадратичной формы $F_2(x_1,x_2)=5x_1^2+$ $+4x_1x_2+8x_2^2$, связанной с уравнением (7.19):

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix},$$

и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-13\lambda+36=0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1=4,\ \ \lambda_2=9$.

Квадратичная форма в новых координатах y_1, y_2 примет канонический вид

$$F_2(y_1,y_2)=4y_1^2+9y_2^2. \qquad (7.20)$$

Найдем ортогональное преобразование **X** = **TY**, которое приводит квадратичную форму, связанную с уравнением (7.19), к каноническому виду (7.20). Для этого определим взаимно ортогональные нормированные собственные элементы, отвечающие найденным собственным значениям λ_1 и λ_2.

Собственные элементы найдем из системы уравнений

$$\begin{cases}(5-\lambda)x_1+2x_2=0,\\ 2x_1+(8-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

При $\lambda_1=4$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Размерность пространства решений равна единице. Общим решением системы является элемент $f_1 = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, где α — произвольное действительное число. В качестве нормированного собственного элемента возьмем $e_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Аналогично при $\lambda_2 = 9$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

которая имеет общее решение $f_2 = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, где β — произвольное действительное число. В качестве нормированного собственного элемента возьмем $e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Таким образом, определена матрица ортогонального преобразования:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad (\det \mathbf{T} = 1).$$

Ортогональное преобразование

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

приводит квадратичную форму $F_2(x_1, x_2)$ к каноническому виду (7.20). Это преобразование является поворотом осей координат на угол φ, который определяется из соотношения: $-\mathrm{tg}\,\varphi = 1/2 \Rightarrow$ $\varphi = -\mathrm{arctg}\,(1/2)$.

Линейные члены уравнения (7.19) $F_1(x_1, x_2) = -32x_1 - 56x_2 + 80$ перепишем в новых координатах:

$$F_1(y_1, y_2) = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 \\ -56 \end{pmatrix} + 80 =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_2 & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 \\ -56 \end{pmatrix} + 80 =$$

$$= -32\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2\right) - 56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2\right) + 80 =$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{144}{\sqrt{5}} y_2 + 80.$$

Таким образом,

$$F_1(y_1, y_2) = -\frac{8}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{144}{\sqrt{5}} y_2 + 80.$$

Итак, в системе координат Oy_1y_2, образованной из системы Ox_1x_2 поворотом осей на угол $\varphi = -\operatorname{arctg}(1/2)$, уравнение кривой имеет вид

$$4y_1^2 + 9y_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{144}{\sqrt{5}} y_2 + 80 = 0.$$

Выделив полные квадраты по переменным y_1, y_2, получим уравнение

$$\frac{\left(y_1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}{9} + \frac{\left(y_2 - \dfrac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2}{4} = 1. \qquad (7.21)$$

Уравнение (7.21) в системе координат Oy_1y_2 действительно представляет собой каноническое уравнение *эллипса*.

Положим $y_1' = y_1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $y_2' = y_2 - \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$, т. е. осуществим параллельный перенос осей координат системы Oy_1y_2 так, что начало координат перейдет в точку $O'\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$. В новой системе координат $O'y_1'y_2'$ уравнение данной кривой имеет канонический вид

$$\frac{y_1'^2}{9}+\frac{y_2'^2}{4}=1.$$

Построим эллипс (рис. 7.2). ►

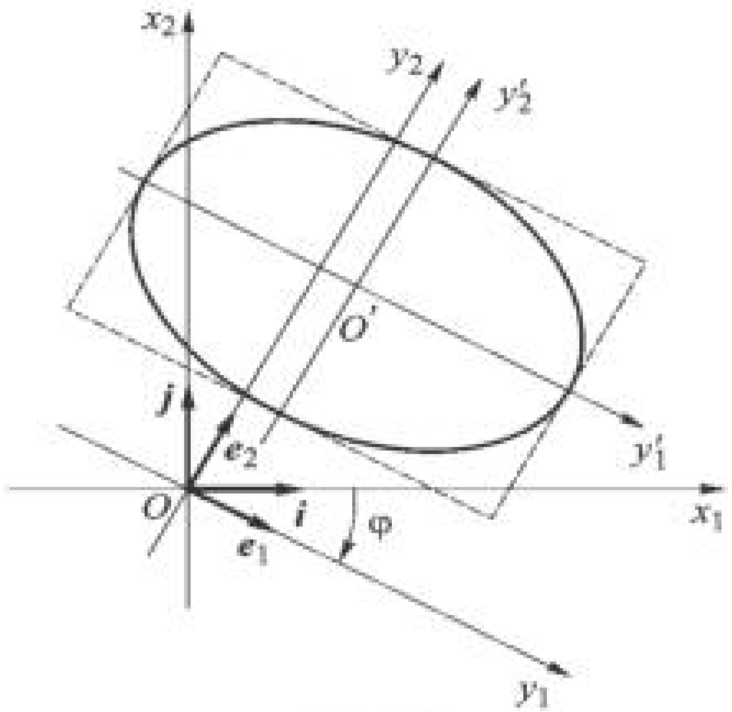

Рис. 7.2

Задача 7.4. С помощью поворота осей координат системы Ox_1x_2 и последующего параллельного переноса привести уравнение кривой

$$4x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-$$

$$-2x_1-14x_2+7=0 \qquad (7.22)$$

к каноническому виду. Построить кривую в исходной системе координат.

◄ Здесь $a_{11}=4$, $a_{22}=1$, $a_{12}=-2$. Установим тип кривой, которая задается уравнением (7.22). Найдем знак выражения $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$: $4\cdot 1-(-2)^2=0$. Следовательно, уравнение (7.22) определяет *параболический* тип кривой.

Запишем матрицу **A** квадратичной формы $F_2(x_1,x_2)=4x_1^2-$ $-4x_1x_2+x_2^2$, связанной с уравнением (7.22):

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix},$$

и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5)=0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

Квадратичная форма в новых координатах y_1, y_2 примет канонический вид

$$F_2(y_1, y_2) = 5y_2^2. \tag{7.23}$$

Найдем ортогональное преобразование **X** = **TY**, которое приводит квадратичную форму, связанную с уравнением (7.22), к каноническому виду (7.23). Для этого определим взаимно ортогональные нормированные собственные элементы, отвечающие найденным собственным значениям λ_1 и λ_2.

Собственные элементы найдем из системы уравнений

$$\begin{cases}(4-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0,\\ -2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0.\end{cases}$$

В результате получим нормированные собственные элементы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5}\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\end{pmatrix},$$

отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 5$ соответственно.

Матрица ортогонального преобразования

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix} \quad (\det \mathbf{T} = 1).$$

Ортогональное преобразование

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

приводит квадратичную форму $F_2(x_1, x_2)$ к каноническому виду (7.23). Это преобразование является поворотом осей координат на угол φ, который определяется из соотношения: $-\operatorname{tg}\varphi = -2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 2$.

Уравнение кривой в координатах y_1, y_2 примет вид

$$(y_1 \quad y_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1 \quad y_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -14 \end{pmatrix} + 7 = 0,$$

или, после упрощений,

$$5y_2^2 - 6\sqrt{5}y_1 - 2\sqrt{5}y_2 + 7 = 0. \tag{7.24}$$

Итак, в системе координат Oy_1y_2, образованной из системы Ox_1x_2 поворотом осей на угол $\varphi = \operatorname{arctg} 2$, уравнение кривой имеет вид (7.24).

Выделив полные квадраты по переменным y_1, y_2, получим уравнение

$$\left(y_2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}\left(y_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right). \tag{7.25}$$

Уравнение (7.25) в системе координат Oy_1y_2 действительно представляет собой каноническое уравнение *параболы*.

Положим $y_1' = y_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$, $y_2' = y_2 - \frac{\sqrt{5}}{5}$, т. е. осуществим параллельный перенос осей координат системы Oy_1y_2 так, что начало координат перейдет в точку $O'\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. В новой системе координат $O'y_1'y_2'$ уравнение данной кривой имеет канонический вид

$$y_2'^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}y_1'.$$

Построим параболу (рис. 7.3). ►

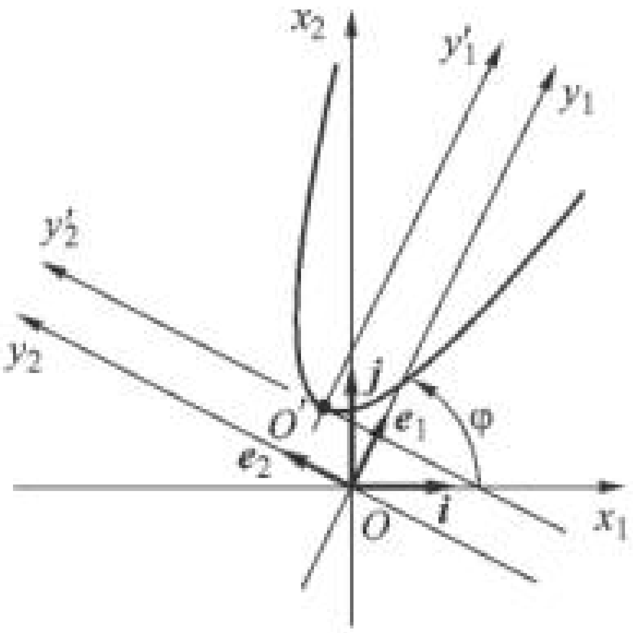

Рис. 7.3

Задача 7.6. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка

$$3x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3-12x_1-10=0. \qquad (7.30)$$

Построить поверхность в канонической системе координат.

◄ Квадратичная форма

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3,$$

связанная с уравнением (7.30), имеет симметрическую матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти собственные значения этой матрицы, решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-6) = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6.$

Определим взаимно ортогональные нормированные собственные элементы, отвечающие найденным собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.

Собственные элементы найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + (5-\lambda)x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

В результате получим нормированные собственные элементы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6$ соответственно.

Матрица ортогонального преобразования

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad (\det \mathbf{T} = -1).$$

Уравнение поверхности в координатах y_1, y_2, y_3 примет вид

$$(y_1 \quad y_2 \quad y_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}+$$

$$+(y_1 \quad y_2 \quad y_3)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}-10=0,$$

или, после упрощений,

$$3y_1^2+2y_2^2+6y_3^2-\frac{12}{\sqrt{3}}y_1-\frac{12}{\sqrt{2}}y_2-\frac{12}{\sqrt{6}}y_3-10=0.$$

Выделив полные квадраты по переменным y_1, y_2, y_3, получим уравнение

$$3\left(y_1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+2\left(y_2-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+6\left(y_3-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2-24=0.$$

Положим $y_1'=y_1-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $y_2'=y_2-\frac{3}{\sqrt{2}}$, $y_3'=y_3-\frac{1}{\sqrt{6}}$, т. е. осуществим параллельный перенос осей координат системы $Oy_1y_2y_3$ так, что начало координат перейдет в точку $O'\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. В новой системе координат $O'y_1'y_2'y_3'$ уравнение данной поверхности имеет канонический вид:

$$\frac{y_1'^2}{8}+\frac{y_2'^2}{12}+\frac{y_3'^2}{4}=1.$$

Это уравнение *эллипсоида*.

Поскольку $\det \mathbf{T}=-1$, то $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ образуют левую тройку элементов.

Построим эллипсоид в новой (канонической) системе координат $O'y_1'y_2'y_3'$ (рис. 7.4). ►

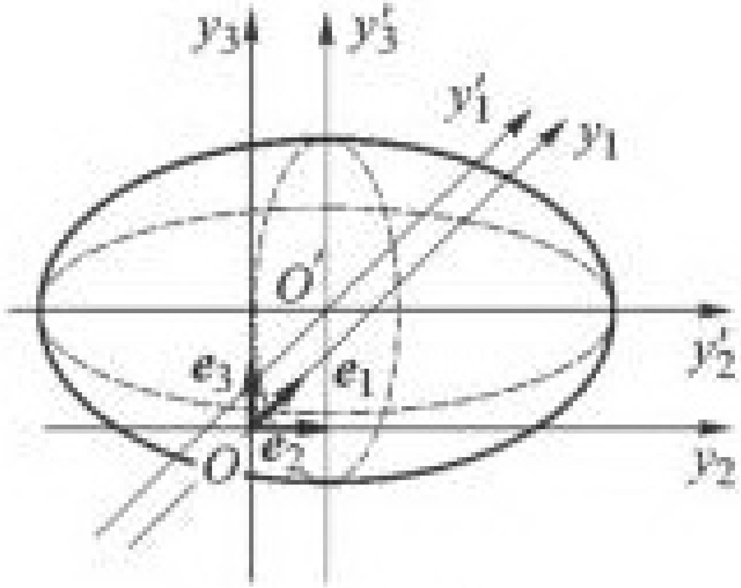

Рис. 7.4